

多形状参数的二次双曲多项式曲线

谢进^{1),2)} 檀结庆¹⁾

¹⁾ (合肥工业大学计算机与信息学院, 合肥 230009) ²⁾ (合肥学院数理系, 合肥 230022)

摘要 给出了带多个形状参数的二次双曲多项式基函数, 该基函数具有二次非均匀 B 样条基的绝大多数性质。基于这种基函数, 建立了一种带多个形状参数的二次双曲多项式曲线, 该类曲线对于非均匀节点为 C^1 连续。根据形状参数的不同取值, 曲线的形状既能整体又能局部地变化。并且毋需采用重节点技术或解方程组, 就能直接插值某些控制点或控制边。此外, 它还能精确表示双曲线。

关键词 B 样条曲线 双曲多项式曲线 多形状参数 整体与局部调控 插值

中图法分类号: TP391 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2009)06-1206-06

Quadratic Hyperbolic Polynomial Curves with Multiple Shape Parameters

XIE Jin^{1),2)}, TAN Jie-qing¹⁾

¹⁾ (School of Computer & Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009)

²⁾ (Department of Mathematics and Physics, Hefei University, Hefei 230022)

Abstract Quadratic hyperbolic polynomial basis functions with multiple shape parameters are presented in this paper, which possess the most properties of quadratic non-uniform B-spline basis functions. Based on the basis functions, quadratic hyperbolic polynomial curves with multiple shape parameters are constructed. These curves are C^1 -continuous with a non-uniform knot vector. With different values of the shape parameters, the shapes of the curves can be adjusted totally or locally. Without using multiple knots or solving equations, the curves can be interpolated given certain control points or control polygon edges directly. And hyperbolic polynomial curves can represent hyperbolas exactly.

Keywords B-spline curve, hyperbolic polynomial curve, multiple shape parameters, totally or locally adjust, interpolation

1 引言

Bézier 曲线和 B 样条曲线是计算机辅助几何设计中被广泛用于曲线造型的重要工具^[1]。但这些方法还有一定的局限性。一方面它们的形状相对于控制点是固定的, 如果要调整曲线的形状, 需要调整相应的控制顶点的位置。有理 Bézier 曲线和有理 B 样条曲线中的权因子具有调整曲线形状的作用, 但

是其求导和求积的过程较为复杂, 且权因子的选择并不十分清楚^[2-3]。另一方面, 它们不能表示除抛物线以外的圆锥曲线, 然而现代数控加工过程中经常会遇到一些具有二次曲线型的产品加工。为了克服它们在造型方面的不足, 近几十年来, 人们对带形状参数的非多项式曲线产生了兴趣: Schoenberg 早在 1964 年就引入三角 B 样条^[4]。1979 年 Lyche & Winther 建立了任意阶三角 B 样条的递推式^[5], 此外还有不少文章研究三角 B 样条, 如文献[6]、[7]、

基金项目: 国家自然科学基金项目(60773043, 60473114); 安徽省自然科学基金项目(070416273X); 安徽省教育厅科技创新团队基金项目(2005TD03); 安徽省教育厅自然科研基金项目(J2008B250)

收稿日期: 2007-03-16; **改回日期**: 2008-01-22

第一作者简介: 谢进(1970~), 男, 副教授。合肥工业大学计算机与信息学院计算机应用技术专业博士研究生。主要研究领域为计算机辅助几何设计及计算机图形学。E-mail: hfuxiejin@126.com

[8]等。为了更好调控曲线形状,Han 则提出带一个形状参数的二次非均匀三角多项式曲线^[9]。这种三角多项式曲线不仅具有二次 B 样条曲线的许多重要性质,而且还能直接表示圆或椭圆。另外,王文涛等人提出一类带一个形状参数的双曲多项式均匀 B 样条^[10],可以方便地表示双曲线。然而形状参数的不同取值只能对曲线进行整体调控,但却无法做局部调控。

本文给出了一种带多形状参数的二次双曲多项式曲线,它具有二次 B 样条曲线绝大多数重要性质,对于固定的控制多边形,利用形状参数的不同取值,既能整体又能局部调控曲线的形状。值得指出的是由于使用多形状参数,只要令某个或某些形状参数取 $\frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}$,曲线就能直接插值于控制点甚至于控制边,而不需要解方程组。因而多形状参数的二次双曲多项式曲线的引入对几何造型系统无疑是有用的。

2 二次双曲多项式基函数

2.1 基函数的构造

定义 1 任给节点 $u_0 < u_1 < \dots < u_{n+3}$, $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$, 称 $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{n+3}\}$ 为节点向量。设

$$\frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1} \leq \lambda, \mu \leq \frac{1}{\sinh 1}, \text{ 令 } t_i = \frac{u - u_i}{\Delta u_i}$$

$$\alpha_i = \frac{(\sinh 1 + \mu_{i-1}(\cosh 1 - 1))\Delta u_i}{(\sinh 1 + \mu_{i-1}(\cosh 1 - 1))\Delta u_i + (\sinh 1 + \lambda_i(\cosh 1 - 1))\Delta u_{i-1}}$$

$$\beta_i = \frac{(\sinh 1 + \lambda_{i+1}(\cosh 1 - 1))\Delta u_i}{(\sinh 1 + \lambda_{i+1}(\cosh 1 - 1))\Delta u_i + (\sinh 1 + \mu_i(\cosh 1 - 1))\Delta u_{i+1}}$$

$$c(t; \lambda) = \frac{(\cosh(1-t) - 1)(1 - \lambda \sinh t)}{\cosh 1 - 1}$$

$$d(t; \mu) = \frac{(\cosh t - 1)(1 - \mu \sinh(1-t))}{\cosh 1 - 1}$$

则称

$$b_i(u) = \begin{cases} \beta_i d(t_i; \mu_i) & u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 1 - \alpha_{i+1} c(t_{i+1}; \lambda_{i+1}) - \beta_{i+1} d(t_{i+1}; \mu_{i+1}) & u \in (u_{i+1}, u_{i+2}) \\ \alpha_{i+2} c(t_{i+2}; \lambda_{i+2}) & u \in [u_{i+2}, u_{i+3}) \\ 0 & u \notin [u_i, u_{i+3}) \end{cases} \quad (1)$$

为第 i 个带形状参数 $\mu_i, \lambda_{i+1}, \mu_{i+1}, \lambda_{i+2}$ 的二次双曲多项式基函数,简称二次双曲多项式基。

2.2 基函数的性质

为了证明基函数的性质,先给出下列引理

引理 1 当 $\frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1} \leq \lambda, \mu \leq \frac{1}{\sinh 1}$ 时

$$\frac{(\cosh(1-t) - 1)(1 - \lambda \sinh t)}{\cosh 1 - 1} +$$

$$\frac{(\cosh t - 1)(1 - \mu \sinh(1-t))}{\cosh 1 - 1} \leq 1$$

证明 当 $\frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1} \leq \lambda, \mu \leq \frac{1}{\sinh 1}$ 时

$$\frac{(\cosh(1-t) - 1)(1 - \lambda \sinh t)}{\cosh 1 - 1} +$$

$$\frac{(\cosh t - 1)(1 - \mu \sinh(1-t))}{\cosh 1 - 1} \leq$$

$$\frac{(\cosh(1-t) - 1)(\cosh 1 - 1) + \sinh 1 \sinh t}{(\cosh 1 - 1)^2} +$$

$$\frac{(\cosh t - 1)((\cosh 1 - 1) + \sinh 1 \sinh(1-t))}{(\cosh 1 - 1)^2}$$

设

$$f(t) = \frac{(\cosh(1-t) - 1)((\cosh 1 - 1) + \sinh 1 \sinh t)}{(\cosh 1 - 1)^2} +$$

$$\frac{(\cosh t - 1)((\cosh 1 - 1) + \sinh 1 \sinh(1-t))}{(\cosh 1 - 1)^2}$$

则 $f'(t) = 0$, 于是 $f(t) \equiv f(1) = 1$

即 $\frac{(\cosh(1-t) - 1)(1 - \lambda \sinh t)}{\cosh 1 - 1} +$

$$\frac{(\cosh t - 1)(1 - \mu \sinh(1-t))}{\cosh 1 - 1} \leq 1$$

定理 1 式(1)所定义的基函数具有以下性质:

(1) 当 $u_i \leq u \leq u_{i+3}$ 时, $b_i(u) \geq 0$;

(2) 当 $u_0 \leq u < u_i, u_{i+3} < u \leq u_{n+3}$ 时, $b_i(u) = 0$;

(3) 当 $u_2 \leq u \leq u_{n+1}$ 时, $\sum_{i=0}^n b_i(u) = 1$ 。

证明 只需讨论 $u_{i+1} \leq u \leq u_{i+2}$ 的情况,

当 $u_i \leq u \leq u_{i+1}$ 或 $u_{i+2} \leq u \leq u_{i+3}$ 时, 结论是显然的。

设 $\gamma_{i+1} = \max\{\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}\}$,

$$\text{则 } \alpha_{i+1} c(t_{i+1}) + \beta_{i+1} d(t_{i+1}) \leq \gamma_{i+1} (c(t_{i+1}) + d(t_{i+1}))$$

由引理 1 知 $c(t_{i+1}) + d(t_{i+1}) \leq 1$

于是 $\alpha_{i+1} c(t_{i+1}) + \beta_{i+1} d(t_{i+1}) \leq \gamma_{i+1} \leq 1$

所以 $b_i(u) \geq 0, u_i < u < u_{i+3}$ 。

由基函数定义易知,性质 2 显然成立。

当 $u_i \leq u \leq u_{i+1}, i = 2, 3, \dots, n$ 时, 由于 $b_{i-2}(u) = \alpha_i c(t_i), b_{i-1}(u) = 1 - \alpha_i c(t_i) - \beta_i d(t_i), b_i(u) = \beta_i d(t_i)$, 且 $b_j(u) = 0, j \neq i-2, i-1, i$,

可知 $\sum_{i=0}^n b_i(u) = 1$ 。

2.3 基函数的连续性

定理 2 设节点向量 $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{n+3}\}$ 满足 $u_0 < u_1 < \dots < u_{n+3}$, 基函数 $b_i(u) \in C^1(-\infty, +\infty)$ 。

证明 显然 $b_i(u_i^-) = 0, b'_i(u_i^+) = 0, b_i(u_{i+3}^-) = 0, b'_i(u_{i+3}^+) = 0$ 。这里仅讨论在 $u = u_{i+1}$ 处的连续性, 在 $u = u_{i+2}$ 处可以采用同样的方法处理。

直接计算得到

$$b_i(u_{i+1}^-) = \beta_i, b_i(u_{i+1}^+) = 1 - \alpha_{i+1}$$

$$b'_i(u_{i+1}^-) = \frac{\sinh 1 + (\cosh 1 - 1)\mu_i}{(\cosh 1 - 1)\Delta u_i} \beta_i$$

$$b'_i(u_{i+1}^+) = \frac{\sinh 1 + (\cosh 1 - 1)\lambda_{i+1}}{(\cosh 1 - 1)\Delta u_{i+1}} \alpha_{i+1}$$

又由 α_i, β_i 的定义可得

$$\alpha_{i+1} = 1 - \beta_i$$

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_i}{\Delta u_i (\sinh 1 + (\cosh 1 - 1)\lambda_{i+1})} \\ &= \frac{\alpha_{i+1}}{\Delta u_{i+1} (\sinh 1 + (\cosh 1 - 1)\mu_i)} \end{aligned}$$

因此

$$b_i^{(k)}(u_{i+1}^-) = b_i^{(k)}(u_{i+1}^+), k = 0, 1$$

于是, 定理的结论成立。

图 1 表示形状参数对基函数的影响, 其中的参数 $\{\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 6\} = \{-0.8, -0.5, 0.8, 0.0, -1, 0.5\}$; $\{\mu_i, i = 0, 1, \dots, 5\} = \{1.0, -0.5, -0.5, 0.0, -0.5, -1\}$ 。与二次 B 样条基相比, 多形状参数的二次双曲多项式基函数的形状不仅上下有变化, 而且左右也都发生变化, 故可做局部调控。

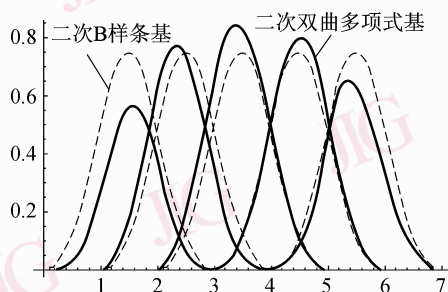


图 1 形状参数对基函数的影响

Fig. 1 Basis functions with multiple shape parameters

2.4 重节点的情形

与二次 B 样条基函数相似, 二次双曲多项式基函数当节点重数 $k \leq 3$ 时仍有意义。这时只要把对应的区间缩小为零, 并去掉基函数的相应段即可。例如, 当 $u_i = u_{i+1}$ 时, $\Delta u_i = 0$, 定义:

$$b_i(u) = \begin{cases} 1 - \alpha_{i+1}c(t_{i+1}; \lambda_{i+1}) - \beta_{i+1}d(t_{i+1}; \mu_{i+1}) & u \in [u_{i+1}, u_{i+2}) \\ \alpha_{i+2}c(t_{i+2}; \lambda_{i+2}) & u \in [u_{i+2}, u_{i+3}) \\ 0 & u \notin [u_i, u_{i+3}) \end{cases} \quad (2)$$

容易证明重节点时, 带形状参数基函数的连续性有以下定理:

定理 3 如果 $u = u_j (j = i, i+1, i+2, i+3)$ 是基函数 $b_i(u)$ 的 $k (k = 2, 3)$ 重节点, 则基函数的支撑区间从 3 减少为 $4 - k$ 段。当 $k = 2$ 时基函数在 u_j 上连续, $k = 3$ 时不连续。

图 2 表示重节点时的基函数, 这里的节点 $u = 3$ 为 2 重点, 其余节点为单重且等距。形状参数的取值与图 1 相同。可以看出, 由于形状参数取值不同, 二次双曲多项式基呈现不对称。

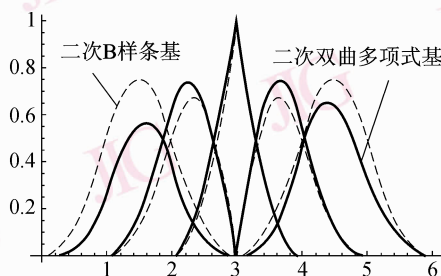


图 2 重节点时的基函数

Fig. 2 Basis functions with multiple knots

3 二次双曲多项式曲线

定义 2 任给 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中控制点 $p_0, p_1, \dots, p_n$, 节点向量 $U = (u_0, u_1, \dots, u_{n+3})$ 及形状参数 $\frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1} \leq \lambda_i, \mu_i \leq \frac{1}{\sinh 1}$, 则

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^n b_i(u) p_i \quad (3)$$

$$n \geq 2, u \in [u_2, u_{n+1}]$$

称为多形状参数的二次双曲多项式曲线, 其中 $b_i(u)$ 由式(1)所定义。

当 $u_i < u_{i+1} (i = 2, 3, \dots, n)$ 时, 曲线 $\mathbf{r}(u)$ 对应于区间 $[u_i, u_{i+1}]$ 上的一段曲线可表示成

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(u) &= \sum_{j=i-2}^i b_j(u) p_j \\ &= \alpha_i c(t_i; \lambda_i) p_{i-2} + [1 - \alpha_i c(t_i; \lambda_i) - \beta_i d(t_i; \mu_i)] p_{i-1} + \beta_i d(t_i; \mu_i) p_i \end{aligned} \quad (4)$$

由式(4)可得曲线段 $r_i(u)$ 及其导矢 $r'_i(u)$ 在两端的值为

$$\begin{cases} r_i(u_i) = \alpha_i p_{i-2} + (1 - \alpha_i) p_{i-1} \\ r_i(u_{i+1}) = (1 - \beta_i) p_{i-1} + \beta_i p_i \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} r'_i(u_i) = \frac{\sinh 1 + \lambda_i (\cosh 1 - 1)}{(\cosh 1 - 1) \Delta u_i} \alpha_i (p_{i-1} - p_{i-2}) \\ r'_i(u_{i+1}) = \frac{\sinh 1 + \mu_i (\cosh 1 - 1)}{(\cosh 1 - 1) \Delta u_i} \beta_i (p_i - p_{i-1}) \end{cases} \quad (6)$$

即两端点位置分别在两控制边 $p_{i-2}p_{i-1}$ 与 $p_{i-1}p_i$ 上,且端矢分别与之平行。

3.1 曲线的连续性

根据基函数的连续性定理 2 和定理 3, 立即得到下述关于式(3)曲线的连续性定理。

定理 4 对于非均匀节点向量 $U = (u_0, u_1, \dots, u_{n+3})$ 当 $u = u_i$ 为单重节点时,则式(3)曲线在该点处 C^1 连续;当 $u = u_i$ 为 $k(k = 2, 3)$ 重节点时,则式(4)曲线在该点处 C^{2-k} 连续。

3.2 曲线的整体及局部可调性

由 α_i, β_i 的定义和式(5)的定义知,曲线 $r_i(u)$ 实际上含有 4 个形状参数 $\lambda_i, \mu_{i-1}, \lambda_{i+1}, \mu_i$ 。利用这些参数能整体或局部调控曲线的端点位置及形状,甚至可插值于控制点或控制边。现分 3 种情况讨论。

(1) $\lambda_i = \mu_{i-1} = \lambda_{i+1} = \mu_i = \lambda$, 即所有的参数相等成为单参数。这时 α_i, β_i 与参数无关。曲线段的两端点 $r_i(u_i), r_i(u_{i+1})$ 与二次 B 样条(虚线)的端点保持一致。当 λ 增大时,中间控制点 p_{i-1} 对应的权随之增大,曲线靠向 p_{i-1} , λ 可整体调控曲线段。图 3 中的实线从上到下分别取 $\lambda = 0.850\ 9, -0.5, -1.5$ 。

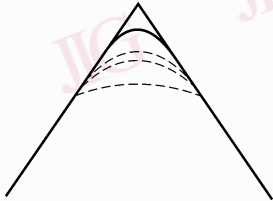


图 3 单形状参数整体调控曲线

Fig. 3 Single shape parameter adjusts curves totally

(2) $\lambda_i = \mu_{i-1}$ 且 $\lambda_{i+1} = \mu_i$, 但 $\lambda_{i+1} \neq \lambda_i$ 。这时实际上只有两个参数, α_i, β_i 仍与参数无关。曲线段的两端点也与二次 B 样条(虚线)保持一致。当 λ_i, λ_{i+1} 取不同值时,可局部调控曲线的形状。图 4 中

的偏左的实线的 $\lambda_2 = \mu_1 = -0.5, \lambda_3 = \mu_2 = -2.0$, 偏右的实线的 $\lambda_2 = \mu_1 = -2.0, \lambda_3 = \mu_2 = -0.5$ 。

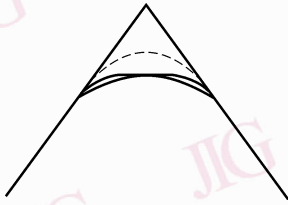


图 4 多形状参数局部调控曲线

Fig. 4 Multiple shape parameters adjust curves locally

(3) $\lambda_i \neq \mu_{i-1}$ 或 $\lambda_{i+1} \neq \mu_i$ 。这时 α_i 或 β_i 的值不仅与节点有关,而且也与参数有关,曲线段的端点 $r_i(u_i)$ 或 $r_i(u_{i+1})$ 的位置沿两控制边发生变化。特别当 $\lambda_i = \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}$ 时,曲线段插值控制点 p_{i-2} ; 当 $\mu_i = \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}$ 时曲线段插值控制点 p_i 。当 $\lambda_i = \mu_i = \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}$ 时曲线段为直线段 $p_{i-2}p_i$ 。当 $\mu_{i-1} = \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}$ 时插值控制点 p_{i-1} , 且落在控制边 $p_{i-1}p_i$ 上,当 $\lambda_{i+1} = \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}$ 时插值控制点 p_{i-1} , 且落在控制边 $p_{i-2}p_{i-1}$ 上。图 5 的曲线 1 的 $\mu_1 = 0.15, \lambda_2 = 0.8, \mu_2 = \lambda_3 = 0.6$, 这时右端点与二次 B 样条(曲线 4)的相同,左端点则不同。曲线 2 的 $\mu_1 = \mu_2 = 0.5, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\sinh 1}{\cosh 1 - 1}$, 与控制边 p_0p_1 一致,曲线 3 的 $\mu_1 = 0.3, \lambda_2 = -0.6, \mu_2 = 0.5, \lambda_3 = \frac{\sinh 1}{\cosh 1 - 1}$ 曲线插值控制点 p_2 。曲线 5 的 $\mu_1 = 1, \lambda_2 = -2, \mu_2 = 0.5, \lambda_3 = -0.5$, 这时左右端点二次 B 样条曲线都不相同。曲线 6 的 $\lambda_2 = \mu_2 = \frac{\sinh 1}{\cosh 1 - 1}, \mu_1 = \lambda_3 = 1$, 即直线段 p_0p_2 。由此可见带多形状参数的二次双曲多项

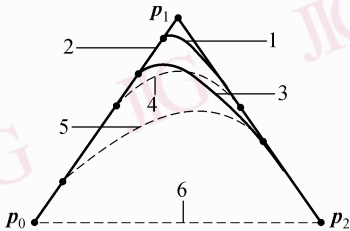


图 5 端点发生变化乃至插值

Fig. 5 End points change and interpolate

式曲线具有更灵活的局部调控性,并且不用重节点技术就可以直接插值控制点或控制边。

3.3 开曲线与闭曲线

由前可知,对于多形状参数的二次双曲多项式曲线,可以不用重节点技术就能实现插值。让形状参数 $\lambda_2 = \mu_n = \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}$, 这样可保证生成开的二次双曲多项式曲线分别以 p_0 和 p_n 为起点和终点。图 6 表示开二次双曲多项式曲线 $n = 6$, 所有曲线的 $\lambda_2 = \mu_6 = \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}$, 即插值于两端点。其中虚线的形状参数为 $\{\lambda_i, i = 3, 4, \cdots, 7\} = \{0.0, 0.5, -1.5, -1.0, 0.5\}$, $\{\mu_i, i = 1, 2, \cdots, 5\} = \{-1.0, 0.5, -0.5, 0.0, 0.0\}$; 实线的形状参数为 $\{\lambda_i, i = 3, 4, \cdots, 7\} = \{-0.5, 0.0, 0.5, 0.0, -0.5\}$, $\{\mu_i, i = 1, 2, \cdots, 5\} = \{0.5, -0.5, 0.5, 0.2, -1.0\}$ 。

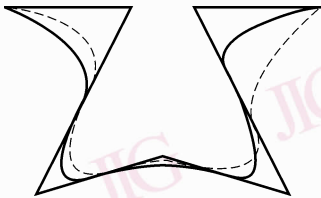


图 6 开曲线
Fig. 6 Open curves

为了生成闭的二次双曲多项式曲线,可增设控制点 $p_{n+1+j} = p_j (j = 0, 1)$ 。令节点步长 $\Delta u_{n+1+j} = \Delta u_j (j = 0, 1, 2)$ 及形状参数 $\lambda_{n+1+j} = \lambda_j, \mu_{n+1+j} = \mu_j, (j = 0, 1, 2)$, 于是闭曲线的表达式可写成

$$r(u) = \sum_{i=0}^{n+2} b_i(u) p_i \quad u \in [u_2, u_{n+2}] \quad (7)$$

图 7 表示闭的二次双曲多项式曲线。虚线的 $\{\lambda_i, i = 2, 3, \cdots, 10\} = \left\{ -0.6, 0.6, \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}, 0.2, -0.5, 0.5, -0.5, -0.5, -0.6 \right\}$, $\{\mu_i, i = 1, 2, \cdots, 9\} = \left\{ 0.5, -0.5, 0.6, \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}, 0.2, 0.5, -0.2, -0.5, 0.5 \right\}$; 由于虚线中 $\lambda_4 = \mu_4 = \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}$, 它插值两相隔控制点。实线 $\{\lambda_i, i = 2, 3, \cdots, 10\} = \{-0.6, 0.2, -1.2, -0.2, 1.0, -0.2, 0.5, 0.5, -0.6\}$; $\{\mu_i, i = 1, 2, \cdots, 9\} = \left\{ 0.5, 0.5, \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}, \right.$

$\left. \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}, -0.2, -0.9, 0.2, 0.5, 0.5 \right\}$, 由于实线中 $\mu_3 = \mu_5 = \frac{\sinh 1}{1 - \cosh 1}$, 它插值一控制边。

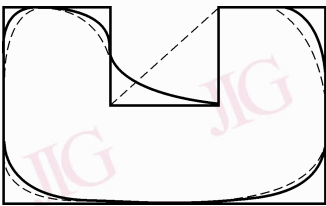


图 7 闭曲线
Fig. 7 Close curves

3.4 多形状参数的二次双曲 Bézier 曲线段

引入带多形状参数的二次双曲 Bézier 曲线段。设 $u_i < u_{i+1}$, 并且 u_i 和 u_{i+1} 为二重节点, 即 $\Delta u_{i-1} = \Delta u_{i+1}$, 则当 $u \in [u_i, u_{i+1}]$ 时

$$\begin{aligned} b_{i-2}(u) &= \frac{(\cosh(1-t_i) - 1)(1 - \lambda_i \sinh t_i)}{\cosh 1 - 1} \\ b_{i-1}(u) &= 1 - b_{i-2}(u) - b_i(u) \\ b_i(u) &= \frac{(\cosh t_i - 1)(1 - \mu_i \sinh(1-t_i))}{\cosh 1 - 1} \end{aligned}$$

这时式(5)定义的曲线段 $r_i(u)$ 成为带形状参数 λ_i, μ_i 的二次双曲 Bézier 曲线段, 它满足端点插值及相切条件:

$$\begin{aligned} r_i(u_i) &= p_{i-2}, r_i(u_{i+1}) = p_i \\ r'_i(u_i) &= \frac{\sinh 1 + \lambda_i (\cosh 1 - 1)}{(\cosh 1 - 1) \Delta u_i} (p_{i-1} - p_{i-2}) \\ r'_i(u_{i+1}) &= \frac{\sinh 1 + \mu_i (\cosh 1 - 1)}{(\cosh 1 - 1) \Delta u_i} (p_i - p_{i-1}) \end{aligned}$$

与二次 Bézier 曲线不同的是它能做整体或局部调控。图 8 表示各种带形状参数的二次双曲 Bézier 曲线段。其中曲线 1 的 $\lambda_i = \mu_i = 0.8509$; 曲线 2 的 $\lambda_i = 0, \mu_i = 0.8$; 曲线 3 的 $\lambda_i = 0.8, \mu_i = 0$; 曲线 4 为二次 Bézier 曲线段; 曲线 5 的 $\lambda_i = \mu_i = -1.0$ 。

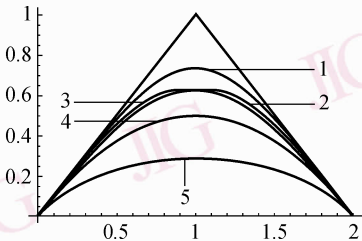


图 8 多形状参数的二次双曲 Bézier 曲线段
Fig. 8 Quadratic hyperbolic Bézier curve segments with multiple shape parameters

3.5 二次双曲多项式曲线精确表示双曲线

定理5 设平面上的3点 $\mathbf{p}_{i-2} = (x_0, y_0)$, $\mathbf{p}_{i-1} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{p}_i = (x_2, y_2)$ 节点等距, 且令所有的 $\lambda_i = \mu_i = 0$, 若 $y_0 = y_1$, 且 $x_2 - x_1 = (x_1 - x_0) \cosh 1$, 则当 $u \in [u_i, u_{i+1}]$ 时, 则以 $\mathbf{p}_{i-2}, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i$ 为控制顶点的二次双曲多项式曲线段式(4)表示双曲线的一部分。

证明 当节点等距, $\lambda_i = \mu_i = 0$ 时, 此时

$\alpha_i = \beta_i = \frac{1}{2}$, 式(4)写为

$$r_i(u) = \mathbf{p}_{i-1} + \frac{1}{2(\cosh 1 - 1)} [-\mathbf{p}_i + 2\mathbf{p}_{i-1} - \mathbf{p}_{i-2} + (\mathbf{p}_{i-2} - \mathbf{p}_{i-1}) \cosh(1-t) + (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) \cosh t]$$

即

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + \frac{1}{2(\cosh 1 - 1)} \{-x_2 + 2x_1 - x_0 + [(x_0 - x_1) \cosh 1 + x_2 - x_1] \cosh t - (x_0 - x_1) \sinh 1 \sinh t\} \\ y(t) = y_1 + \frac{1}{2(\cosh 1 - 1)} \{-y_2 + 2y_1 - y_0 + [(y_0 - y_1) \cosh 1 + y_2 - y_1] \cosh t - (y_0 - y_1) \sinh 1 \sinh t\} \end{cases}$$

当 $y_0 = y_1$, 且 $x_2 - x_1 = (x_1 - x_0) \cosh 1$ 时, 得到

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(x_1 + x_0) + \frac{x_1 - x_0}{2(\cosh 1 - 1)} \sinh 1 \sinh t \\ y(t) = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{2(\cosh 1 - 1)} + \frac{y_2 - y_1}{2(\cosh 1 - 1)} \cosh t \end{cases} \quad (8)$$

显然, 式(8)为双曲线的参数方程。特别地, 令 $y_0 = y_1 = 0, y_2 = \cosh 1 - 1, x_0 = 0, x_1 = \cosh 1 - 1$

则式(8)变为

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(\cosh 1 - 1) + \frac{1}{2} \sinh 1 \sinh t \\ y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh t \end{cases} \quad (9)$$

式(9)表示一条双曲线上半部分(如图9实线所示), 要表示整个上支, 只要令 $t \in [-1, 1]$ 即可。

4 结论

本文所构造的多形状参数的二次双曲多项式曲线, 具有二次B样条曲线许多重要性质, 如连续性、凸包性、几何不变性等。但在局部调控及插值方面更具灵活性。不足之处是不能表示椭圆等圆锥曲线,

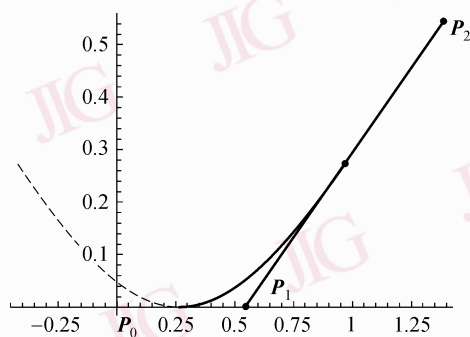


图9 双曲线的一支

Fig. 9 One branch of hyperbola

这可用三角多项式曲线去解决。

参考文献 (References)

- Shi Fa-zhong. Computer Aided Geometric Design & Non-Uniform Rational B-Spline[M]. Beijing: Beijing High Education Press, 2001: 306-454. [施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理B样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001, 306-454.]
- Piegl L, Tiller M. The NURBS Book[M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1997. 141-188.
- Marnar E, Pena J M, Sanchez-Rayes J, et al. Shape preserving alternatives to the rational Bézier model[J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(1): 37-60.
- Schoenberg I J. On trigonometric spline interpolation[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1964, 13(5): 795-825.
- Lyche T, Winther R. A stable recurrence relation for trigonometric B-splines[J]. Journal of Approximation Theory, 1979, 25(2): 266-279.
- Lyche T, Schumaker L L. Quasi-interpolations on trigonometric B-spline[J]. Journal of Approximation Theory, 1998, 95(2): 280-309.
- Lu Yong-gang, Wang Guo-zhao, Yang Xun-nian. Uniform trigonometric polynomial B-spline curves[J]. Science in China (Series E), 2002, 32(2): 281-288. [吕勇刚, 汪国昭, 杨勋年. 均匀三角多项式B样条曲线[J]. 中国科学(E), 2002, 32(2): 281-288.]
- Zhang Ji-wen, Frank-L Krause, Zhang Huai-yu. Unifying C-curves and H-curves by extending the calculation to complex numbers[J]. Computer Aided Geometric Design, 2005, 22(9): 865-883.
- Han Xu-li. Quadratic trigonometric polynomial curves with a shape parameter[J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(7): 503-512.
- Wang Wen-tao, Wang Guo-zhao. Hyperbolic polynomial uniform b-spline with shape parameter[J]. Journal of Software, 2005, 16(4): 625-633. [王文涛, 汪国昭. 带形状参数的双曲多项式均匀B样条[J]. 软件学报, 2005, 16(4): 625-633.]