

若干与统计物理相关的组合问题

张福基^{1*}, 晏卫根², 金贤安¹

(1. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005; 2. 集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 简单介绍统计物理与纽结理论中的一些组合问题, 包括反射对称图的 dimer 问题与支撑树的计数问题, Dimer 问题的熵与边界的关系, 计数平面图的完美匹配数的图压缩方法, 链环多项式的计算以及 Jones 多项式的零点的分布问题, 主要综述近年来我们在这些问题中得到的部分结果.

关键词: 图; 完美匹配; 支撑树; 计数; 链环; 图多项式; 链环多项式; 零点分布; 统计物理

中图分类号: O 157.5; O 189.24

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2011)02-0165-10

1 导 引

统计物理大系统的研究中, 从 20 世纪 40 年代以来就出现了组合学方法的踪影, 如 1944 年数学家 Onsager 对二维 Ising 模型的求解, 1960—1961 年期间 Kasteleyn, Fisher, Temperley 对二维格子(见图 1(a))上的 Dimer 问题的求解都反映出组合方法的影响, 特别是后者所引入的 Pfaffian 方法^[1,2]成为数学家与统计物理学家的热门研究对象. 2006 年 Fields 奖获得者 Okounkov 的获奖成果之一(见文献[3])就与这方面的工作密切相关.

纽结(更一般地, 链环)本身具有丰富的组合性质. 纽结的早期研究虽然与物理学家 Kelvin 有关, 但他所期望建立的用以表达原子的以太中的纽结状漩涡并不存在. 纽结理论与统计物理的本质联系建立于 20 世纪 80 年代, Jones 在研究 Von Neumann 代数时偶然发现了纽结的新的多项式不变量, 即 Jones 多项式^[4,5], 他因此获得 1990 年的 Fields 奖, 在此基础上建立了纽结理论与统计物理的新联系.

统计物理研究大量粒子的集合, 为了描述其中的相变现象, 物理学家定义了图(以各种二维网格为特例)上的自旋模型, 从而给出系统的配分函数. 纽结理论与统计物理的联系是建立在链环投影图(即把三维空间中的链环投影到一个二维平面上的结果)与平面上的符号图的对应上(见图 2 的例子), 即把链环投影图的各个区域以黑白二色作棋盘式着色, 以黑面为顶

点, 用边表示黑面之间的交叉关系, 用边的符号表示交叉点的上下跨越情况, 得到一个符号平面图; 反之, 从一个符号平面图出发可以通过中间图(medial graph)构造得到一个链环的投影图. 进而, 对某些自旋模型而言, 人们发现了链环的 Reidemeister III 型变换与顶点模型的由 Onsager 引入的星-三角变换相吻合(见图 3), 在此基础上建立了统计物理与纽结理论之间的联系.

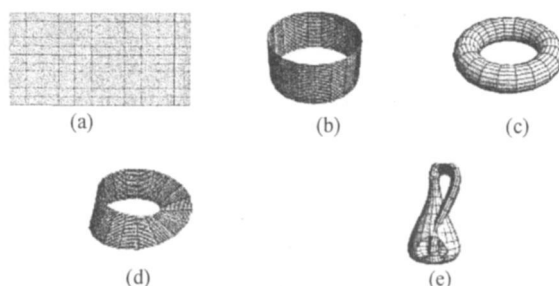


图 1 统计模型中出现的平面, 柱面, 环面, M^L buis 带, Klein 瓶上的格子

Fig. 1 Lattices embedded in the plane, cylinder, torus, M^L buis strip, Klein bottle in statistical models

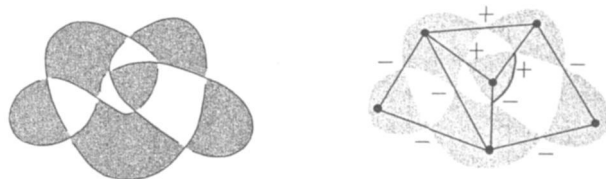


图 2 链环投影图与符号平面图的一一对应的一个例子

Fig. 2 The correspondence between link diagrams and signed plane graphs—an example

收稿日期: 2010-11-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(10831001, 10771086)

* 通信作者: fjzhang@xmu.edu.cn

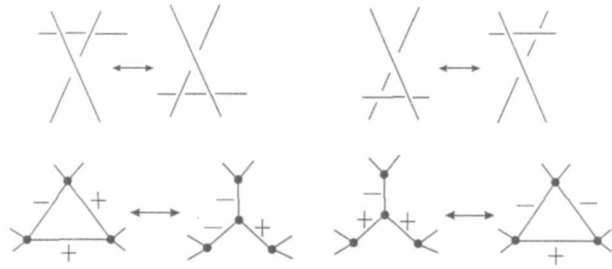


图3 Reidemeister III 变换(上)和星-三角变换(下)

Fig.3 Reidemeister III move and star-triangle transformation

近年来我们的主要工作之一即围绕统计物理与纽结理论中的组合问题而展开. 以下将对我们近期得到的一些结果做简单介绍.

2 Dimer 问题与支撑树的计数问题

Dimer 问题源于双原子分子在固体表面的吸附模型, 支撑树问题则源于 Kirchhoff 关于电网络的工作. 从组合角度来看, 求解 Dimer 问题本质上等价于求一个图的完美匹配的数目, Lovasz 等著名的专著^[1]着重讨论了这个问题. 近 10 多年来这方面取得了许多非常重要的结果, 如 Robertson 等解决著名的 Polya 的 Permanent 问题^[6], Kenyon 等解决环面边界上的 Dimer 问题及其相关问题^[3]等.

假设 G 是一个连通图, 记 $M(G)$ 与 $t(G)$ 分别为图 G 的完美匹配(perfect matchings)的数目与支撑树(spanning trees)的数目. 如果 G 的每条边带权, 定义 G 中的一个完美匹配 M 的权为 M 中所有边的权的乘积, G 的一棵支撑树 T 的权为 T 中所有边的权的乘积, 在不会混淆的情况下, 我们仍然分别用 $M(G)$ 与 $t(G)$ 表示权图 G 的所有完美匹配的权与所有支撑树的权和. 用 $G \times H$ 表示两个图 G 与 H 的卡氏积(Cartesian product).

2.1 反射对称图完美匹配数

设 G 是一个图, 如果 G 在通过某个平面或某条直线 l 的反射变换下是不变的, 则称 G 为反射对称图, 简称为对称图. 如果给一个对称图 G 的每条边分配一个权, 使得此权图在反射变换下每一个轨道上的边的权相等, 则称此权图为一权对称图. 对称图 G 中位于对称轴 l 上的顶点的数目的一半称为该对称图的宽度, 以 $\omega(G)$ 表示. 显然, 当 $\omega(G)$ 不是整数时, 则 $M(G) = 0$. 因此我们下面总假设对称图 G 中位于对称轴 l 上的顶点数目为偶数.

若 $G = (A, B)$ 是一个权对称平面偶图, 其对称轴

为 l . 为方便起见, 我们总假设对称轴是水平方向的, 并设 G 的位于 l 上的顶点从左到右依次为 $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{\omega(G)}, b_{\omega(G)}$. 对 G 的顶点集的 2 部划分分别着以黑白两色, 并且我们可以进一步假设 G 中位于对称轴 l 上最左边的顶点 a_1 的着色为白色. 下面定义图 G 的两个子图 G_+ 与 G_- . 实施如下的切割图运算: 去掉 G 中所有白色的 a_i 与黑色的 b_i 上面的边与所有黑色的 a_i 与白色的 b_i 下面的边, 注意到这个切割运算使对称图 G 的对称轴上的每一条边的两个端点的上面的边或者下面的边同时去掉. 让对称轴上的边的权减少一半, 而 G 的其他边的权保持不变. 因为对称轴分隔 G , 上述切割图运算过程把 G 分拆成上下两部分, 分别记为 G_+ 与 G_- .

Ciucu 在文献[7]中证明了如下匹配因子定理(matching factorization theorem).

定理 1^[7] 设 G 是一个平面权对称偶图, 它可以按上面定义分拆成上下两部分 G_+ 与 G_- , 则

$$M(G) = 2^{\omega(G)} M(G_+) M(G_-).$$

Ciucu 的结果有许多应用, 见文献[7]. Ciucu 考虑的对称图中反射轴通过 G 的一些顶点而与 G 的边不交, 对于不通过 G 的顶点而只与 G 的某些边相交的对称图, 我们得到了以下结果.

定理 2^[8] 如果 G 是一个反射对称的平面图, G 中无顶点位于反射对称轴 l 上, 且 G 中与 l 相交的每条边的两个端点在反射变换下是互换的, 则存在一个含有自环且顶点数只有 G 的顶点数一半的图 $\bar{G}$ 及 $\bar{G}$ 的一个定向 $\bar{G}^e$, 使 G 的完美匹配数等于 $|\det A(\bar{G}^e)|$, 其中 $A(\bar{G}^e)$ 表示 $\bar{G}^e$ 的斜邻接矩阵. 对于赋权图, 相应的结果也成立.

利用以上结果, 我们同时证明了如下结果.

定理 3^[8] 设 G 是一个简单图, 且 G 在至多收缩一个奇长圈后, 不含有 $K_{2,3}$ 的偶剖分, 则 G 存在一个 Pfaffian 定向 G^e , 它的每个偶长圈在 G^e 中是奇数定向的, 使

$$M(P_2 \times G) = \det(A(G^e) + I),$$

其中 $A(G^e)$ 是 G^e 的斜邻接矩阵, I 是单位矩阵, P_k 表示 k 个顶点的路.

定理 4^[8] 设 G 是一个二部图, 它不含长为 $4k$ 的圈, $k \in \{1, 2, \dots\}$, 则

$$M(P_2 \times G) = \prod_{\theta} (1 + \theta^2),$$

其中 θ 跑遍 G 的所有非负特征值. 特别, 如果 T 是任意一棵树, 则 $P_2 \times T$ 的完美匹配数等于 $\prod_{\theta} (1 + \theta^2)$,

其中 θ 跑遍 T 的所有非负特征值.

定理 5^[9] 设 T 是任意 n 个顶点的树, C_4 表示 4 个顶点的圈, T 的特征值为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, 则

$$M(C_4 \times T) = \prod_{j=1}^n (2 + \theta_j^2).$$

特别, $C_4 \times T$ 的完美匹配数是一个完全平方数或一个 2 倍的完全平方数(squarish).

定理 6^[9] 设 T 是一棵 n 个顶点的树, 则

$$M(P_4 \times T) = \prod_{\alpha} (1 + 3\alpha^2 + \alpha^4),$$

其中 α 跑遍 T 的所有非负特征值.

定理 7^[9] 设 T 是有完美匹配的树, 则

$$M(P_3 \times T) = \prod_{\alpha} (2 + \alpha^2),$$

其中 α 跑遍 T 的所有正特征值. 特别此时有: $C_4 \times T$ 的完美匹配数等于 $P_3 \times T$ 的完美匹配数的平方.

Lin 等在文献[10] 中把定理 5~7 中的结果推广到了 T 是单圈非二部图的情形.

2.2 Dimer 问题的熵与边界条件

在统计物理中, $P_n \times P_m, P_n \times C_m$ 与 $C_n \times C_m$ 分别称为具有自由边界, 柱面边界条件与环面边界条件的方平面格子图(分别见图 1 中(a)~(c)). 1961 年, Kasteleyn^[11] 与 Temperley 等^[12] 几乎同时独立地证明了 $P_n \times P_m$ 的完美匹配数除以 $\frac{mn}{2}$ 收敛于 $\frac{2c}{\pi} \approx 0.583\ 1$

(当 $m, n \rightarrow \infty$), 这里 $c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$ 称为 Catalan

常数, 统计物理学家把这个极限称为自由边界条件的方格子图的 Dimer 问题的熵(Entropy), 简称 Dimer 熵. Kasteleyn^[11] 同时还证明了自由边界条件、柱面边界条件与环面边界条件的格子图的熵相等, 即平面方格子图的 Dimer 熵与这 3 个边界条件没有关系. 自从 Kasteleyn^[11] 与 Temperley 等^[12] 发现解二维 Dimer 问题的 Pfaffian 方法以来, 许多数学家与物理学家对其他具有环面边界条件的二维格子, 包括六角形格子(Hexagonal lattice 或 Honeycomb lattice), 三角形格子(Triangular lattice), Kagome 格子, 3. 12. 12 格子, 4. 8. 8 格子, Union Jack 格子等等的 Dimer 问题进行了大量的研究. 特别是 Kenyon 等^[3] 研究了具有环面边界条件的一般二维平面格子的 Dimer 问题, 得到了 Dimer 熵的表达式, 他们的结果发表在著名的期刊—美国数学年刊(Annals of Mathematics)上, 这也是 2006 年菲尔兹奖获得者 Okounkov 的主要获奖工作之一.

上一段说到自由边界条件, 柱面边界条件与环面边界条件的平面方格子图的 Dimer 熵是一样的, 物理

学家曾经证明许多大系统其统计力学渐近行为与其边界状况无关^[13]. 但对于边界条件对 Dimer 熵的影响, Kasteleyn^[11] 曾经写到: The effect of boundary condition is, however, not entirely trivial and will be discussed in more detail in a subsequent paper(边界条件的影响不完全是平凡的, 将在接下来的文章中详细讨论), 但是 Kasteleyn 后面再没有发表这样的结果. 我们对此问题也进行过一些研究, 在文献[14] 中, 我们研究了具有柱面边界条件的六角形格子图, 8. 8. 4 格子图与 8. 8. 6 格子图的 Dimer 问题, 得到了它们的计数公式与 Dimer 熵. 特别我们证明了: 具有环面边界条件的六角形格子图(如图 4(a)) 与具有柱面边界条件的格子图(如图 4(b)) 的 Dimer 熵是不同的, 即六角形格子图的 Dimer 熵与边界条件是有关的.

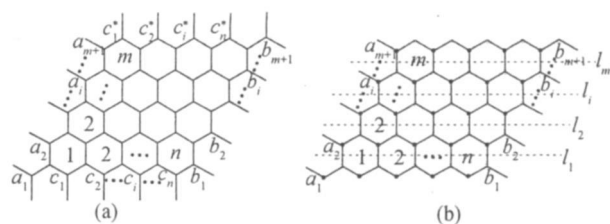


图 4 (a) 具有环面边界条件的六角形格子图;
(b) 具有柱面边界条件的六角形格子图

Fig. 4 (a) The hexagonal lattice with toroidal boundary condition; (b) The hexagonal lattice with cylindrical boundary condition

2.3 计数完美匹配的图压缩法

设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ 与 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$ 分别为图 G 的一个顶点子集与边子集, 从 G 中删去所有 A 中的顶点得到的子图记为 $G - A$ 或 $G - \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$, 从 G 中删去所有 E 中的边得到的子图记为 $G - E$ 或 $G - \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$. 受到 Dodgson's Determinant—Evaluation Rule 的启发, Propp^[15] 首先发现了计数平面二部图的完美匹配的顶点压缩方法如下:

定理 8^[15] 设 $G = (U, V)$ 是一个平面二部图, 且 $|U| = |V|$, 顶点 a, b, c, d 依次形成 G 的一个四圈面, 且 $a, c \in U, b, d \in V$. 则

$$M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) = M(G - \{a, b\})M(G - \{c, d\}) + M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\}).$$

利用组合方法, Kuo^[16] 推广了 Propp 的结果如下:

定理 9^[16] 设 $G = (U, V)$ 是一个平面二部图, 且 $|U| = |V|$, 顶点 a, b, c, d 依次出现在 G 的一个面上. 则

(i) 如果 $a, c \in U, b, d \in V$, 则

$$M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) = M(G - \{a, b\})M(G - \{c, d\}) + M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\}).$$

(ii) 如果 $a, b \in U, c, d \in V$, 则

$$M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\}) = M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) + M(G - \{a, c\})M(G - \{b, d\}).$$

上面两个结果对非二部的平面图是不成立的, 对于非平面二部图的情形, Kenyon 首先发现了如下结果(但他没有正式发表):

定理 10 设 G 是一个平面图, 顶点 a, b, c, d 依次出现在 G 的一个面上. 则

$$M(G)M(G - a - b - c - d) + M(G - a - c)M(G - b - d) = M(G - a - b)M(G - c - d) + M(G - a - d)M(G - b - c).$$

利用 Ciucu 的匹配因子定理(matching factorization theorem)(见定理 1), 我们在文献[17-18]中分别得到了更一般的关于计数平面图的完美匹配数的顶点压缩方法的结果.

定理 11^[17] 设 G 是一个具有 $2n$ 个顶点的权平面图, 顶点 $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ ($2 \leq k \leq n$) 依次出现在 G 的一个面上, 记 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. 对任意的 $j = 1, 2, \dots, k$, 则

$$\sum_{Y \subseteq B, |Y| \text{ 为奇数}} M(G - a_j - Y)M(G - A \setminus \{a_j\} - \bar{Y}) = \sum_{W \subseteq B, |W| \text{ 为偶数}} M(G - W)M(G - A - \bar{W}),$$

其中第 1 个和跑遍 B 的所有奇数个顶点的子集 Y , 第 2 个和跑遍 B 的所有偶数个顶点的子集 $W, \bar{Y} = B \setminus Y, \bar{W} = B \setminus W$.

定理 12^[18] 设 G 是一个具有 $2n$ 个顶点的权平面图, 顶点 $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ ($2 \leq k \leq n$) 依次出现在 G 的一个面上, 记 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. 对任意的 $j = 1, 2, \dots, k$, 则

$$M(G)M(G - A - B) = \sum_{i=1}^k M(G - a_j - b_i)M(G - \overline{\{a_j, b_i\}}) - \sum_{i=1}^k M(G - a_i - a_j)M(G - \overline{\{a_i, a_j\}}),$$

其中 $\overline{\{a_j, b_i\}} = (A \cup B) \setminus \{a_j, b_i\}, \overline{\{a_i, b_j\}} = (A \cup B) \setminus \{a_i, a_j\}$.

由定理 12, 下面的推论是显然的.

推论 1^[19] 设 $G = (U, V)$ 是一个平面二部图, $U = \{u_i | 1 \leq i \leq n\}, V = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$. 顶点 $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ ($2 \leq k \leq n$) 依次出现在 G 的一个面上, 记 $A = \{a_i | 1 \leq i \leq k\} \subseteq U, B = \{b_i | 1 \leq i \leq k\} \subseteq V$. 对任意

的 $j = 1, 2, \dots, k$, 则

$$M(G)M(G - A - B) = \sum_{i=1}^k M(G - a_j - b_i)M(G - (A \cup B) \setminus \{a_j, b_i\}).$$

有关计数完美匹配的图压缩方法方面的进一步结果见文献[20-22].

2.4 反射对称图支撑树的计数

Kirchhoff 在文献[23]研究电网络的过程中, 首先考虑了图的支撑树的计数问题, 它是数学^[24-30]与物理学^[31-34]中的一个有趣的基本问题. 支撑树的计数问题也与统计物理中的 q -state Potts model 的配分函数(partition function)密切相关^[35-36], 近年来文献[32, 37-39]对正则格的支撑树的计数与渐近增长常数进行了研究.

Temperley 在文献[40]中发现了一个 $m \times n$ 方格子图的所有支撑树到一个 $(2m+1) \times (2n+1)$ 方格子图删去四个角中的任意一个顶点得到的图的完美匹配之间的一个一一对应, Propp 与 Burton 等在文献[25]中把这个结果推广到了一般平面图的情况, 后面 Kenyon 等在文献[27]再把这个结果推广到了权有向平面图的情形.

利用代数方法与组方法, 我们在文献[26]中首先对所有轨道只有两个顶点的平面反射对称图 G 的支撑树的计数问题进行了研究, 证明了 G 的支撑树的数目 $t(G)$ 可以表示为: $t(G) = 2^{\omega(G)} t(G_1) t(G_2)$, 其中 $\omega(G)$ 为反射对称轴通过的面数, 而 G_1 与 G_2 是顶点数只有 G 的顶点数的大约一半的两个图.

对于每个轨道具有一个顶点或两个顶点的一般的反射对称权图 G (可以是非平面权图), 我们在文献[30]中证明了 G 的所有支撑树的权和 $t(G)$ 可以表示为: $t(G) = 2^{n-1} t(\overline{G_L}) t(\overline{G_R})$, 其中 n 为只有一个顶点的轨道数, 而 $\overline{G_L}$ 与 $\overline{G_R}$ 是顶点数只有 G 的顶点数的大约一半的两个图. 作为这个结果的应用, 我们给出了几乎完全图(almost-complete graph), 几乎完全二部图(almost-complete bipartite graph), $M^{\perp}$ -bius 梯($M^{\perp}$ -bius ladder), 一个图的两个拷贝的几乎联(almost-join of two copies of a graph)的支撑树的计数公式.

我们在文献[41]还研究了每个轨道都有 n ($n > 2$) 个顶点的所谓旋转对称权图 G (假设它有 N 个顶点)的支撑树的计数问题, 证明了 G 的所有支撑树的权和可以表示为

$$t(G) = \frac{1}{n} t(D_0) \prod_{k=1}^{n-1} t(D_k, u),$$

其中 D_0 为一个 N/n 个顶点的权图, 而 $D_1, D_2, \dots, D_k$

均为 $N/n+1$ 个顶点的权有向图, $t(D_0)$ 为 D_0 的所有支撑树的权和, $t(D_i, u) (i \geq 1)$ 为 D_i 中以 u 为根点的所有有向支撑树的权和. 作为这个结果的应用, 我们得到了统计物理中的 5 个具有柱面边界条件的格子图 (即: 六角形格子图, 8. 8. 4 格子图, 3. 12. 12 格子图, $3^3. 4^2$ 格子图与三角形格子图) 的支撑树的计数公式.

3 链环多项式的计算及其零点分布问题

本节我们主要讨论 Jones 多项式和 Homfly 多项式的计算以及 Jones 多项式的零点分布问题. Homfly 多项式^[42-43]是 Jones 多项式的推广. 从计算复杂性的角度, 计算它们都是困难的^[44-45].

3.1 Jones 多项式

导引中符号平图与链环投影图之间的一一对应在 20 世纪初就曾被用来编纂纽结表^[46], 并在 20 世纪 80 年代, 链环的 Jones 多项式的主体 Kauffman 括号多项式^[47]通过该对应被 Kauffman 转换为符号平图的 Tutte 多项式^[48]. 这样 Jones 多项式的计算问题就转化成为符号图的 Tutte 多项式的计算问题.

Landvov 在文献[49]中给出了 pretzel 链环的 Kauffman 括号多项式的递推公式和相应的 Maple 计算程序. 在文献[50]中, Manch n 给出了 pretzel 链环的 Kauffman 括号多项式的闭公式并分析了其跨度. 注意到在符号平图与链环投影图的一一对应下, pretzel 链环的标准投影图 $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ (图 5) 对应于符号的广义 theta 图 $\theta(n_1, n_2, \dots, n_m)$. 设 S_m 为由两个顶点连接 m 条平行边构成的图, 我们称它为叶图, 则广义的 theta 图是叶图的剖分图.

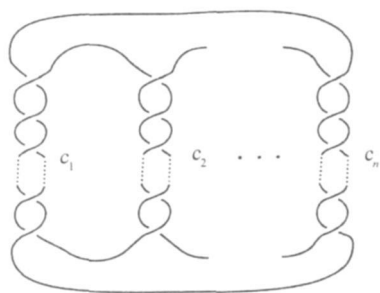


图 5 Pretzel 链环的标准投影图 $P(c_1, c_2, \dots, c_n)$

Fig. 5 The pretzel link $P(c_1, c_2, \dots, c_n)$

在文献[51]中, Read 和 Whitehead 研究了剖分图的颜色多项式, 建立了其与原图的链多项式的关系. 在文献[52]中, 他们进一步研究了剖分图的 Tutte 多项式

与原图的链多项式的关系. 在文献[53], 我们研究了符号图的剖分图的 Tutte 多项式与原图的链多项式的关系, 从而可以用来处理链环的 Kauffman 括号多项式, 得到了下述结果.

定理 13^[53] 设 G 是连通标号图, G_c 为 G 的符号剖分图, n_a 为 G 中标号为 a 的边在 G_c 中对应的链的所有边的符号和. 设 $Ch[G]$ 为 G 的链多项式, $Q[G_c]$ 为 G_c 的 Tutte 多项式. 如果在 $Ch[G]$ 我们将系数中的 w 替换为 $1-d^2$, 将边的标号 a 替换为 $(-A^{-4})^{n_a}$, 则

$$Q[G_c] = \frac{A^s}{d^{n(G)}} Ch[G],$$

这里 s 是 G_c 的所有边的符号之和, $n(G)$ 是 G 的基圈数(cyclomatic number).

特殊地, 我们得到了 pretzel 链环的 Kauffman 括号多项式的另一闭公式. 我们指出文献[54], 作者建立了纽结与多面体的联系, 从而将链环的 Kauffman 括号多项式的计算归结成了 2 个小图与 3-polytope (即 3-连通 3-正则平面图) 的链多项式的计算问题.

有理链环(图 6)由与有理数一一对应而得名, 是纽结理论中的一类基本的交错链环. 该类链环对应的符号平图都可从扇图通过将扇的边缘边剖分和辐边变为若干平行边得到. 这促使我们研究一般图经过将一些边剖分, 而另外一些边变为若干平行边后得到的符号图的 Tutte 多形式的计算问题, 在文献[55], 我们研究了该问题, 定义了图的 W -多项式, 建立了其与原图的 W -多项式的关系.

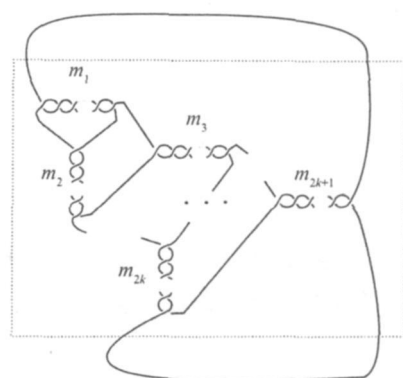


图 6 有理链环 $R(m_1, m_2, \dots, m_{2k+1})$, 虚线方框内为有理 tangle

Fig. 6 The rational link $R(m_1, m_2, \dots, m_{2k+1})$, where in the dashed box is the rational tangle

特殊地, 运用转移矩阵法得到了有理链环的 Kauffman 括号多项式的闭公式^[55]. 在文献[56]中, W -多项式被用来求一类多面体链环的 Homfly 多项式.

以上工作促使我们进一步考虑将图的每条边替换

成任意一个符号图后得到的符号图的 Tutte 多项式的计算问题. 该问题的非符号图情形(称为 tensor product), 或更一般的拟阵的情形已经被研究, 见文献[57-58]. 我们研究了该问题的符号图情形^[59], 得到了下面的结果.

定理 14^[59] 设 G 是连通标号图, $\tilde{G}$ 为由 G 通过将其每条边 a 替换成一符号图 H_a 得到的符号图. 设 H_a' 是由 H_a 通过粘结 H_a 的对应 a 的两个端点得到的图, 令

$$\alpha_a = \alpha[H_a] = \frac{1}{d^2 - 1} (dQ[H_a] - Q[H_a']),$$

$$\beta_a = \beta[H_a] = \frac{1}{d^2 - 1} (dQ[H_a'] - Q[H_a]),$$

$$\gamma_a = \gamma[H_a] = 1 + d \frac{\alpha[H_a]}{\beta[H_a]}.$$

如果在 $Ch[G]$ 我们将系数中 w 替换为 $1 - d^2$, 将边的标号 a 替换为 γ_a , 则

$$Q[\tilde{G}] = \frac{\prod_{a \in E(G)} \beta_a}{d^{n(G)}} Ch[G],$$

这里 $n(G)$ 是 G 的基圈数.

特殊地, 我们在文献[60]中计算了 Montesinos 链环(见图 7)的 Kauffman 括号多项式并设计了计算程序. 注意将一个标号平图的每边都替换成一个符号平图所得到的符号平图对应的链环投影图可以由该标号平图通过将边替换成相应的 2-tangle 得到. 需要指出的是 Diao 等也研究了符号图 tensor product 的 Tutte 多项式的计算问题, 他们建立了其与 colored Tutte^[61] 多项式的联系, 见文献[62-63]. 与我们的工作本质上是一致的.

另外, 一个平图对应的链环的分支数与该图的 Tutte 多项式在 $(-1, -1)$ 处的取值有关. 在文献[64]中, 作者确定了几种方格子图(图 1(a)和(b))对应的链环的分支数, 其他几类常见格子图(如三角形格子和六角形格子, 见图4(b))也已经被研究. 在文献[65]

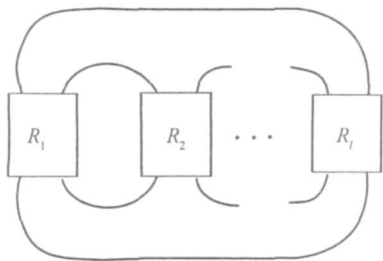


图 7 Montesinos 链环 $M(R_1, R_2, \dots, R_i)$, R_i 为有理 tangle
Fig. 7 Montesinos link $M(R_1, R_2, \dots, R_i)$, where each R_i

represents a rational tangle.

中, 作者刻画了对应的链环的分支数等于图的基圈数加 1 的平图的结构.

3.2 Homfly 多项式

在 3.1, 我们考虑了 Jones 多项式, 本小节我们考虑图替换对应投影图的 Homfly 多项式的计算问题, 我们将主要用纽结理论的语言来叙述. 给定一个平图, 在文献[66]中, Jaeger 通过将每条边上覆盖上一个相同类型的 clasp 为之联系了一个有向链环, 并建立了该无符号平图的 Tutte 多项式和所得有向链环的 Homfly 多项式之间的关系. 在文献[67]中, Traldi 引入了赋权图的双色多项式. 他通过将平图的每条边上覆盖上 4 个不同类型的 clasp 之一, 为平图联系了一个有向链环并建立了赋权平图的双色多项式和所得有向链环的 Homfly 多项式之间的关系. 注意到这 4 种 clasp 都是特殊的交错定向 2-tangle, 我们自然地考虑将一个图的每条边 e 替换成任意一个交错定向 2-tangle T_e (图 8)得到的有向链环的 Homfly 多项式的计算问题.

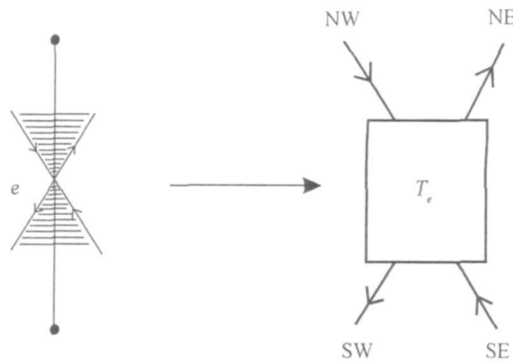


图 8 将边替换成交错定向 2-tangle
Fig. 8 Replacing an edge by an alternatingly oriented 2-tangle

设 L 是一个有向链环, 记 $P_L(v, z)$ 为 L 的 Homfly 多项式. 设 G 是一个边赋权图, 记 $Q_G(t, z)$ 为赋权图 G 的双色多项式. 设 T 是一个 2-tangle, 记 $N(T)$ 和 $D(T)$ 分别为 T 的分子和分母(图 9), 相当于定理 14 中的 H_a 和 H_a' . 我们在文献[68]得到一个与定理 14 类似的如下结果:

定理 15^[68] 设 G 是一个图, $D(G)$ 是由 G 通过将每条边 e 替换为交错定向的 2-tangle T_e 得到的有向链环. 记 $\delta = \frac{v^{-1} - v}{z}$. 若在赋权图 G 中指定边 e 的权为

$$w(e) = \frac{\mathcal{P}_{N(T_e)} - \mathcal{P}_{D(T_e)}}{\mathcal{P}_{D(T_e)} - \mathcal{P}_{N(T_e)}},$$

则

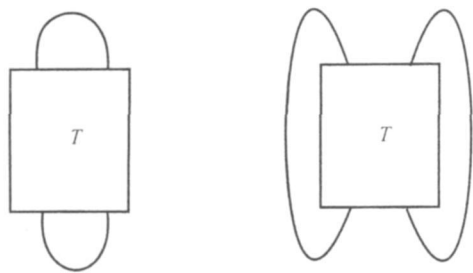


图 9 2-tangle 的分子和分母

Fig. 9 Numerator and denominator of the 2-tangle T

$$P_{D(G)}(v, z) = \delta^{-1} \left(\prod_{e \in E(G)} \mu(e) \right) Q_G(\delta, \delta),$$

$$\text{这里 } \mu(e) = \frac{\mathcal{P}_{N(T_e)} - P_{D(T_e)}}{\delta^2 - 1}.$$

最近化学家用 DNA 链合成了许多多面体链环并在分子设计方面作了一系列工作, 他们合成与设计的许多链环状分子都可以由多面体框架通过将边替换成整 tangle 得到, 文献[69]给出了他们的 Homfly 多项式的计算方法, 是上述定理 15 的特殊情形. 另外我们指出标号图的链多项式与赋权图的双色多项式都是赋权图的 Tutte 多项式的变体. 顺便指出我们还考虑了可能的用苯链构成环状和纽结状构的分子, 研究了它们的计数与最小结构问题, 见文献[70-71].

3.3 零点分布与统计物理

在统计物理中对零点的研究源自于 Yang 和 Lee 的 2 篇关于相变的论文^[72-73], 对铁磁 Ising 模型, 得到了著名的 Yang-Lee 圆定理. Potts 模型 (见著名的综述文献[36]) 是 Ising 模型的推广. Potts 模型的配分函数等价于 Tutte 多项式^[74]. 其零点已经被广泛研究, 尤其是 0 温度的反铁磁 Potts 模型的配分函数即色多项式^[75].

Jones 多项式也是 Potts 模型的配分函数的特殊情形, 见文献[76]. 其零点已经开始被研究^[77-78], 他们研究了一些链环类的 Jones 多项式的零点分布情况. 我们也研究了一些类的 Jones 多项式的零点分布情况^[79-80]. 设 $\{f_n(x) | n = 1, 2, \dots\}$ 是一类多项式, 复数 z 称为 $\{f_n(x) | n = 1, 2, \dots\}$ 的零点的极限点, 若或者 $f_n(z) = 0$ 对充分大的 n 都成立, 或者 z 是集合 $\mathcal{R}\{f_n(x)\}$ 的极限点, 这里 $\mathcal{R}\{f_n(x)\}$ 是所有 $f_n(x)$ 的零点构成的集合. 注意到这些论文中有许多链环类的 Jones 多项式的零点在以原点为圆心的单位圆上都是稠密的, 而这些链环类都是某个图的剖分图对应的链环类, 我们在文献[82]中, 运用 Beraha-Kahane-Weiss 定理^[83] 和类似文献[81]的方法证明了下面的一般结果:

定理 16^[82] 设 D 是一个连通即约交错链环投影图, C 是 D 的交叉点集, C' 是 C 的非空子集. 设 $D^n(C')$, $n = 1, 2, \dots$ 是由 D 通过将 C' 中的每个交叉点都沿 A -通道拧成 n 个交叉点得到的投影图. 则 $\{D^n(C') | n = 1, 2, \dots\}$ 的 Jones 多项式的零点的极限点是单位圆 $|z| = 1$ (这不依赖于 D 和 C' 的选择) 和若干孤立点, 且这些孤立点可由对应 D 的图 G 的子图的流多项式确定. 特殊的, 对任意 $\epsilon > 0$, 只要 n 足够大, $D^n(C)$ 的 Jones 多项式的所有零点都位于圆 $|z| = 1 + \epsilon$ 内.

定理 16 中的链环类 $D^n(C')$ 实际上就是对应任意图的某些边的 uniform 剖分类. 对于图和有向图而言, 人们研究得最多的是特征多项式. 在文献[85], 作者得到了关于特征多项式零点分布的下述结果:

定理 17^[85] 图的特征多项式的零点在实直线上稠密; 有向图的特征多项式的零点在复平面上稠密.

此外我们还发现了一类无穷图类, 它们的零点的极限点具有分形的结构, 见文献[86].

受文献[85]和[86]的促动, 我们进一步研究了零点在复平面上的整体分布情况, 利用 Sokal 的方法[84]和 pretzel 链环在文献[59]中证明了下述结果:

定理 18^[59] Jones 多项式的零点在整个复平面上是稠密的.

参考文献:

- [1] Lovász L, Plummer M. Matching theory[M]. New York: Ann of Discrete Math, North-Holland, 1986.
- [2] Godsil C D. Algebraic combinatorics[M]. New York: Chapman and Hall, 1993.
- [3] Kenyon R, Okounkov A, Sheffield S. Dimers and amoebae[J]. Ann Math, 2006, 163: 1019-1056.
- [4] Jones V F R. A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras[J]. B Am Math Soc, 1985, 12: 103-112.
- [5] Jones V F R. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials[J]. Ann Math, 1987, 126: 335-388.
- [6] Robertson N, Seymour P D, Thomas R. Permanents, Pfaffian orientations, and even directed circuits[J]. Ann Math, 1999, 150: 929-975.
- [7] Ciucu M. Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry[J]. J Combin Theory Ser A, 1997, 77: 67-97.
- [8] Yan W G, Zhang F. Enumeration of perfect matchings of graphs with reflective symmetry by Pfaffians[J]. Adv Appl Math, 2004, 32: 655-668.
- [9] Yan W G, Zhang F. Enumeration of perfect matchings of a

- type of Cartesian products of graphs [J]. *Discrete Appl Math*, 2006, 154: 145-157.
- [10] Lin F G, Zhang L Z. Pfaffian orientation and enumeration of perfect matchings for some Cartesian products of graphs[J]. *Electron J Combin*, 2009, 16: R52.
- [11] Kasteleyn P W. The statistics of dimers on a lattice I: the number of dimer arrangements on a quadratic lattice[J]. *Physica*, 1961, 27: 1209-1225.
- [12] Temperley H N V, Fisher M E. Dimer problem in statistical mechanics—an exact result [J]. *Philosophical Magazine*, 1961, 6: 1061-1063.
- [13] Simon B. The statistical mechanics of lattice gases[M]. Princeton: Princeton University Press, 1993.
- [14] Yan W G, Yeh Y N, Zhang F. Dimer problem on the cylinder and torus[J]. *Physica A*, 2008, 387: 6069-6078.
- [15] Propp J. Generalized Domino-Shuffling[J]. *Theoret Comput Sci*, 2003, 303: 267-301.
- [16] Kuo E H. Applications of graphical condensation for enumerating matchings and tilings[J]. *Theoret Comput Sci*, 2004, 319: 29-57.
- [17] Yan W G, Yeh Y N, Zhang F. Graphical condensation of plane graphs: a combinatorial approach [J]. *Theoret Comput Sci*, 2005, 349: 452-461.
- [18] Yan W G, Zhang F. A quadratic identity for the number of perfect matchings of plane graphs[J]. *Theoret Comput Sci*, 2008, 409: 405-410.
- [19] Yan W G, Zhang F. Graphical condensation for enumerating perfect matchings [J]. *J Combin Theory Ser A*, 2005, 110: 113-125.
- [20] Yan W G, Yeh Y N. Replacing Pfaffians and applications [J]. *Adv Appl Math*, 2007, 39: 121-140.
- [21] Fulmek M. Graphical condensation, overlapping Pfaffians and superpositions of matchings[J]. *Electron J Combin*, 2010, 17: R83.
- [22] Kuo E H. Graphical condensation generalizations involving Pfaffians and determinants[EB/OL]. [2006]. <http://math.gmu.edu/~ekno/pfaff.pdf>.
- [23] Kirchhoff G. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geföhrt wird[J]. *Ann Phys Chem*, 1847, 72: 497-508.
- [24] Biggs N L. Algebraic graph theory[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [25] Burton R, Pemantle R. Local characteristics, entropy and limit theorems for spanning trees and domino tilings via transfer impedances[J]. *Ann Probab*, 1993, 21: 1329-1371.
- [26] Ciucu M, Yan W G, Zhang F. The number of spanning trees of plane graphs with reflective symmetry[J]. *J Combin Theory Ser A*, 2005, 112: 105-116.
- [27] Kenyon R W, Propp J G, Wilson D B. Trees and matchings[J]. *Electron J Combin*, 2000, 7: R25.
- [28] Lyons R. Asymptotic enumeration of spanning trees[J]. *Combin Probab Comput*, 2005, 14: 491-522.
- [29] Welsh D J A. Complexity: knots, colourings, and counting (London Math Soc Lecture Notes series 186) [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [30] Zhang F, Yan W G. Enumerating spanning trees of graphs with an involution[J]. *J Combin Theory Ser A*, 2009, 116: 650-662.
- [31] Chang S C, Chen L C, Yang W S. Spanning trees on the Sierpinski gasket[J]. *J Stat Phys*, 2007, 126: 649-667.
- [32] Chang S C, Shrock R. Some exact results for spanning trees on lattices[J]. *J Phys A: Math Gen*, 2006, 39: 5653-5658.
- [33] Temperley H N V. The enumeration of graphs on large periodic lattices[C]// Welsh D J A, Woodall D R. *Combinatorics: Proc. Combinatorial Mathematics, The Institute of Mathematics and its Applications*. Oxford: Oxford Press, 1972: 356-357.
- [34] Wu F Y. Number of spanning trees on a lattice[J]. *J Phys A: Math Gen*, 1977, 10: L113-L115.
- [35] Fortuin C M, Kasteleyn P W. On the random cluster model I Introduction and relation to other models [J]. *Physica*, 1972, 57: 536-564.
- [36] Wu F Y. The Potts model[J]. *Rev Mod Phys*, 1982, 54: 235-268.
- [37] Chang S C, Wang W. Spanning trees on lattices and integral identities[J]. *J Phys A: Math Gen*, 2006, 39: 10263-10275.
- [38] Shrock R, Wu F Y. Spanning trees on graphs and lattices in d dimensions[J]. *J Phys A: Math Gen*, 2000, 33: 3881-3902.
- [39] Tzeng W J, Wu F Y. Spanning trees on hypercubic lattices and nonorientable surfaces[J]. *Appl Math Lett*, 2000, 13: 19-25.
- [40] Temperley H N V. In *Combinatorics: proceedings of the british combinatorial conference 1973* [M]. London: London Mathematical Society Lecture Notes, 1974: 202-204.
- [41] Yan W G, Zhang F. Enumeration of spanning trees of graphs with rotational symmetry[J]. *J Combin Theory, Ser A*, 2011, 118: 1270-1290.
- [42] Freyd P, Yetter D, Hoste J, et al. A new polynomial invariant of knots and links[J]. *Bull Amer Math Soc*, 1985, 12: 239-246.
- [43] Przytycki J H, Traczyk P. Invariants of links of Conway

- type[J]. Kobe J Math, 1987, 4: 115-139.
- [44] Jaeger F, Vertigan D L, Welsh D J A. On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials[J]. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1990, 108: 35-53.
- [45] Welsh D J A. The computational complexity of knot and matroid polynomials[J]. Discrete Math, 1994, 124: 251-269.
- [46] Adams C C. The knot book[M]. USA: American Mathematical Society, 2004.
- [47] Kauffman L H. State models and the Jones polynomial[J]. Topology, 1987, 26: 395-407.
- [48] Kauffman L H. New invariants in the theory of knots[J]. Amer Math Monthly, 1988, 95(3): 195-242.
- [49] Landvov R A. The Jones polynomial of pretzel knots and links[J]. Topology Appl, 1998, 83: 135-147.
- [50] Manchón P M G. On the Kauffman bracket of pretzel links[J]. Marie Curie Fellowships Annals, 2003, 2: 118-122.
- [51] Read R C, Whitehead Jr E G. Chromatic polynomials of homeomorphism classes of graphs[J]. Discrete Math, 1999, 204: 337-356.
- [52] Read R C, Whitehead Jr E G. The Tutte polynomial for homeomorphism classes of graphs[J]. Discrete Math, 2002, 243: 267-272.
- [53] Jin X, Zhang F. The Kauffman brackets for equivalence classes of links[J]. Adv in Appl Math, 2005, 34: 47-64.
- [54] Yang W, Zhang F. Links and cubic 3-polytopes[J]. Math Comput, 2008, 77(263): 1841-1857.
- [55] Jin X, Zhang F. The replacements of signed graphs and Kauffman brackets of link families[J]. Adv in Appl Math, 2007, 39: 155-172.
- [56] Liu S Y, Cheng X S, Zhang H, et al. The architecture of polyhedral links and their HOMFLY polynomials[J]. J Math Chem, 2010, 48(2): 439-456.
- [57] Woodall D R. Tutte polynomial expansions for 2-separable graphs[J]. Discrete Math, 2002, 247: 201-213.
- [58] Huggett S. On tangles and matroids[J]. J Knot Theory Ramifications, 2005, 14(7): 919-929.
- [59] Jin X, Zhang F, Dong F, et al. Zeros of the Jones polynomial are dense in the complex plane[J]. Electron J Comb, 2010, 17(1): R94.
- [60] Jin X, Zhang F. On computing Kauffman bracket polynomial of Montesinos links[J]. J Knot Theory Ramifications, 2010, 19(8): 1001-1023.
- [61] Bollobás B, Riordan O. A Tutte polynomial for colored graphs[J]. Combin Probab Comput, 1999, 8: 45-93.
- [62] Diao Y, Ernst C, Ziegler U. Jones polynomial of knots formed by repeated tangle replacement operations[J]. Topology Appl, 2009, 156: 2226-2239.
- [63] Diao Y, Hetyei G, Hinson K. Tutte polynomials of tensor products of signed graphs and their applications in knot theory[J]. J Knot Theory Ramification, 2009, 18: 561-590.
- [64] Jin X, Dong F M, Tay E G. Determining the component number of links corresponding to lattices[J]. J Knot Theory Ramifications, 2009, 18(12): 1711-1726.
- [65] Jin X, Dong F M, Tay E G. On graphs determining links with maximal number of components via medial construction[J]. Discrete Appl Math, 2009, 157: 3099-3110.
- [66] Jaeger F. Tutte polynomials and link polynomials[J]. Proc Amer Math Soc, 1988, 103: 647-654.
- [67] Traldi L. A dichromatic polynomial for weighted graphs and link polynomials[J]. Proc Amer Math Soc, 1989, 106: 279-286.
- [68] Jin X, Zhang F. The Homfly and dichromatic polynomials[J]. Proc Amer Math Soc, accepted.
- [69] Jin X, Zhang F. The Homfly polynomial for even polyhedral links[J]. Match Commun Math Comput Chem, 2010, 63: 657-677.
- [70] Qian J, Zhang F. Counting the cycloized polyphenacenes[J]. J Comput Chem, 2010, 31(14): 2577-2584.
- [71] Yang W, Zhang F, Klein D J. Benzenoid links[J]. J Math Chem, 2010, 47(1): 457-476.
- [72] Yang C N, Lee T D. Statistical theory of equations of states and phase transitions. I. Theory of condensation[J]. Phys Rev, 1952, 87: 404-409.
- [73] Lee T D, Yang C N. Statistical theory of equations of states and phase transitions. II. Lattice gas and Ising model[J]. Phys Rev, 1952, 87: 410-419.
- [74] Bollobás B. Modern graph theory[M]. Berlin: Springer, 1998.
- [75] Sokal A D. Chromatic polynomials, Potts models and all that[J]. Physica A, 2000, 279: 324-332.
- [76] Wu F Y. Jones polynomial as a Potts model partition function[J]. J Knot Theory Ramifications, 1992, 1(1): 47-57.
- [77] Wu F Y, Wang J. Zeros of the Jones polynomial[J]. Physica A, 2001, 296: 483-494.
- [78] Chang S C, Shrock R. Zeros of Jones polynomials for families of knots and links[J]. Physica A, 2001, 301: 196-218.
- [79] Jin X, Zhang F. Zeros of the Jones polynomials for families of pretzel links[J]. Physica A, 2003, 328: 391-408.
- [80] Jin X, Zhang F. Jones polynomials and their zeros for a family of links[J]. Physica A, 2004, 333: 183-196.
- [81] Brown J I, Hickman C A. On chromatic roots of large

- subdivisions of graphs[J]. Discrete Math, 2002, 242: 17-30.
- [82] Jin X, Zhang F. Zeros of the Jones polynomial for multiple crossing twisted links[J]. J Stat Phys, 2010, 140(6): 1054-1064.
- [83] Beraha S, Kahane J, Weiss N J. Limits of zeros of recursively defined families of polynomials [J]. Studies in Foundations and Combinatorics, Advances in Mathematics Supplementary Studies, 1978, 1: 212-232.
- [84] Sokal A D. Chromatic roots are dense in the whole complex plane[J]. Comb Probab Comput, 2004, 13: 221-261.
- [85] Zhang F, Chen Z. Limit points of eigenvalues of (di)graphs[J]. Czech Math J, 2006, 56(131): 895-902.
- [86] Zhang F, Chen Y C, Chen Z. Clique-inserted graphs and spectral dynamics of clique-inserting [J]. J Math Anal Appl, 2009, 349: 211-225.

Some Combinatorial Problems in Statistical Physics

ZHANG Fuji^{1*}, YAN Weigen², JIN Xian'an

(1. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China;

2. School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper we first give a simple introduction to some combinatorial problems in statistical physics and knot theory. Then we survey some results of our group in these respects obtained in recent years, including enumerations of dimer and spanning trees of graphs with reflective symmetry, the relation between dimer entropy and lattice boundary, graphical condensation method on enumerating perfect matchings, computations of link polynomials and zeros of the Jones polynomials, etc.

Key words: graph; perfect matching; spanning tree; enumeration; link; graph polynomial; link polynomial; zeros; statistical physics