

PDE 技术的图像放大模型

宋锦萍 高冉 朱方 台雪成

(河南大学 应用数学所 数学与信息科学学院, 开封 475001)

摘要 偏微分方程(PDE)已成为图像处理与分析中的重要工具。而数字图像处理的一个基本内容是图像放大, 即从低分辨率图像获得高分辨率图像的图像处理技术。通过两种泛函模型, 利用变分的思想, 提出了基于 TV-norm (total variation norm) 插值模型和四阶偏微分方程插值模型的图像放大算法。通过仿真实验结果及均方误差(MSE)和峰值信噪比(PSNR)两种评价准则说明了该算法的有效性和可行性。

关键词 偏微分方程(PDE) 图像放大 变分 插值

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)01-0082-06

Image Zooming Algorithm Based on Partial Differential Equations Technique

SONG Jin-ping, GAO Ran, ZHU Fang, TAI Xue-cheng

(College of Mathematics and Information Science, Institute of Applied Mathematics, Henan University, Kaifeng 475001)

Abstract Partial differential equation (PDE) has become an important tool in image processing and analysis. A basic content of digital image processing is image zooming, namely an image processing technology obtaining a high resolution image from a low resolution image. This article proposes an image zooming algorithm based on the TV-norm (Total Variation norm) interpolation model and fourth order partial differential equation interpolation model, which adopts the idea of total variation model and two kinds of functional models. The validity and feasibility of the algorithm is tested through a simulation experiment and two appraisal criterions—mean square error (MSE) and peak value signal to noise ratio (PSNR).

Keywords partial differential equation (PDE), image zooming, variation, interpolation

1 引言

图像处理与分析是信息科学与工程中的一个重要研究领域。图像增强、图像恢复、图像分割和图像放大又是图像处理与分析研究中的主要问题。源于变分方法的偏微分方程(PDE)技术已经成为图像处理与分析研究领域中的一个重要工具^[1-3]。很多国内外的专家都热衷于图像处理中的偏微分方程模型的理论研究。例如, Crandall 等人利用粘性解理论论证模型方程的适定性^[4]; Rudin 等人提出了冲击

滤波器(shock filters)^[5]; Rudin 等人用 BV (bounded variation) 空间代替 Sobolev 空间来刻画图像函数的性质并提出了全变差(total variation)方法^[6]等。在处理图像的过程中, 有时为了适用于特殊的场合(如医学、公安、航天等)以及一些图像处理软件应用等领域, 常常需要一种有效的方法来改变已有图像的大小(如对图像进行放缩)和几何关系(如对图像进行旋转), 并保证改变后的图像有较好的视觉效果。图像放大和缩小的处理技术就起着较为重要的作用。其中图像放大是从低分辨率图像获得高分辨率图像的一种图像处理技术。对一幅图像进行放

基金项目: 国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金项目(10576013); 河南省自然科学基金项目(0611053200)

收稿日期: 2007-04-28; **改回日期:** 2007-07-02

第一作者简介: 宋锦萍(1963 ~), 女, 副教授, 硕士生导师。1990 年于中国科学技术大学数学系获理学硕士学位。研究方向为图像处理、偏微方程数值解。E-mail: songjp@henu.edu.cn

大,实质上是对图像插值的过程。目前常用的线性插值算法(最近邻插值等),只是针对原始图像的像素点进行处理,当对含有精细内容的图像插值时,会造成图像灰度的不连续性,导致出现锯齿状条纹和方块效应;而今流行的 PDE 技术具有在对图像像素点处理的同时也可以直接处理图像的一些特征(梯度、几何曲率等)。如分别由 Rudin 等人^[4]和 Lysaker 等人^[7](LLT)提的基于 PDE 的去噪泛函分别为

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy$$

和

$$E(u) = \int_{\Omega} (u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + u_{yy}^2)^{\frac{1}{2}} dx dy + \frac{\lambda_2}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy$$

就具有在去除噪声的同时保持边界的特性,得到好的处理效果。

本文在线性插值的基础上,基于 PDE 技术得到了两个插值模型:TV-norm 插值模型和四阶偏微分方程插值模型,修正新增加(放大)的像素值,从而实现图像放大的目的,使放大后的图像既能保持图像原有的特性,又保持了图像灰度级之间的连续性。

2 相关理论

2.1 变分法及泛函极小化问题

2.1.1 变分法

把微分方程边值问题转化为等价的泛函极值问题的求解方法和理论称为变分原理或变分方法。由于泛函在物理上常常表示能量,故变分方法习惯上又称为能量法。变分法是研究泛函求极值问题的方法,它的几个主要步骤为^[8]

- (1) 从物理问题上建立泛函及其约束条件;
- (2) 通过泛函变分,利用变分法基本预备定理求得欧拉-拉格朗日方程;
- (3) 在边界条件下求解,即求解微分方程。

2.1.2 泛函极小化

如果一个函数类中的某个函数能使某个泛函取得极值或可能取得极值,则该函数类称为变分问题的容许函数类,记为 u' 。从所有满足边界条件和一定的连续条件的容许函数 u' 中,寻找使泛函 $E(u)$ 达到极值的函数 u ,则这个极值函数 u 一定满足欧拉

方程,且是所给变分问题的解。求解泛函 $E(u)$ 的极小值的过程即为泛函极小化问题。

2.2 Gâteaux 求导

设 V 是 Banach 空间,令 $F: V \rightarrow \mathbf{R}$ 上的连续泛函,但不一定是线性的。如果下式在 y 方向的极限存在,则 F 在 x 的方向导数为

$$F'(x; y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon y) - F(x)}{\varepsilon} \quad (1)$$

而且存在 $\tilde{x} \in V'$ (V 的对偶空间)使得 $F'(x; y) = \tilde{x}(y)$, $\forall y \in V$, 则 F 在 x 是 Gâteaux 可导的,且 $F'(u) = \tilde{x}_0$ 。 F 是 Gâteaux 可导的且 $\inf_{y \in V} F(y)$ 有解 x , 则 $F'(x) = 0$ 。

2.3 控制收敛定理

假定函数 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 是勒贝格可积的,且有 $f_k \rightarrow f$ a. e., 假定 $|f_k| \leq g$ a. e., 那么对任意的可积函数 g , 有

$$\int_{R^n} f_k dx \rightarrow \int_{R^n} f dx \quad (2)$$

2.4 Green 公式

假定 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的有界开子集,且 $\partial\Omega$ 是 C^1 的。令 $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$ 为包含 Ω 及其边界的区域,则有

$$\int_{\Omega} Dv \cdot Du dx dy = - \int_{\Omega} u \Delta v dx dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} u ds \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx dy = - \int_{\Omega} u v_{x_i} dx dy + \int_{\partial\Omega} u v n^i ds \quad (4)$$

其中, $n = (n^1, \dots, n^n)$ 是 $\partial\Omega$ 的外法向量。

3 图像放大算法

到目前为止,实现已有的图像放大算法普遍通过两个过程:第1个过程是对图像进行空间变换,第2个过程是对图像进行灰度级插值及处理。本文主要针对第2个过程——灰度级插值进行改进,从而实现图像的放大。该算法的具体步骤如下:

第1步 假设初始图像矩阵为 $m \times n$ 的 T_0 , 首先将 T_0 赋给 T , 然后对 T 进行线性插值(本文采用双线性插值),得到放大 k (k 为正整数)倍后的矩阵 u_0 ;

第2步 对 u_0 利用迭代模型(两种新的插值模型)进行修正,找到一个 u , 既近似逼近 u_0 , 又加强线性插值后 u_0 中各元素之间的连续性;

第 3 步 对第 2 步得到的 u 作如下处理:

在 u 中, 令 $u(k * i - 1, k * j - 1) = T_0(i, j)$, $(1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n)$, 其他位置数值不变, 得到 T' , 从而实现对初始图像矩阵 T_0 放大 k 倍;

第 4 步 将 T' 赋给 T , 根据具体要求的放大倍数, 循环进行 1、2、3 步, 即得最终结果。

3.1 TV-norm 插值模型

设

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy \quad (5)$$

式中, λ 为常数。泛函中第 1 项是平滑项, 起到消除图像灰度不连续性的作用; 第 2 项是保真项, 起到保持边界信息的作用。参数 $\lambda > 0$ 是通过反复实验, 人为选定的参数, 用来平衡这两项的作用, 通过求解这个连续能量泛函的极小化问题 $\min E(u)$, 得到 TV-norm 插值模型, 从而对线性插值得到的 u_0 进行修正。

事实上, 首先, 利用 Gâteaux 求导并令导数为零可得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E}{\partial u} \cdot v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E(u + \varepsilon v) - E(u)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (|\nabla(u + \varepsilon v)| - |\nabla u|) dx dy + \\ &\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda}{2\varepsilon} \int_{\Omega} [(u + \varepsilon v - u_0)^2 - (u - u_0)^2] dx dy \quad (6) \end{aligned}$$

利用平方差公式, 式(6)第 1 项化为

$$(|\nabla(u + \varepsilon v)| - |\nabla u|) = \frac{(\nabla(u + \varepsilon v))^2 - (\nabla u)^2}{|\nabla(u + \varepsilon v)| + |\nabla u|}$$

再由控制收敛定理, 式(6)变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u} \cdot v &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{(\nabla(u + \varepsilon v))^2 - (\nabla u)^2}{|\nabla(u + \varepsilon v)| + |\nabla u|} dx dy + \\ &\quad \lambda \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (u + \varepsilon v - u_0) \cdot v dx dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{2 \nabla(u + \varepsilon v) \cdot \nabla v}{|\nabla(u + \varepsilon v)| + |\nabla u|} dx dy + \\ &\quad \lambda \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (u + \varepsilon v - u_0) \cdot v dx dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla v}{|\nabla u|} dx dy + \lambda \int_{\Omega} (u - u_0) \cdot v dx dy \quad (7) \end{aligned}$$

对式(7)的第 1 项使用式(3), 并令 $\frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \nabla v, v = u$, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u} \cdot v &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \cdot v dx dy + \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} (u - u_0) \cdot v dx dy + \int_{\partial \Omega} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \mathbf{n} \cdot v ds \quad (8) \end{aligned}$$

则 E 关于 u 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u} &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) dx dy + \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} (u - u_0) dx dy \quad (9) \end{aligned}$$

且带有 Neumann 边界条件:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0$$

其中, $\mathbf{n} = (n^1, \dots, n^n)$ 为 $\partial \Omega$ 的外法向量。

由此导出能量泛函的 Euler-Lagrange 方程^[9]如下:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda(u - u_0) = 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

引入人为的时间变量 t , 得到 TV-norm 插值模型,

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda(u - u_0) \\ 0 = \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega}, u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (11)$$

其中, t 是时间步长, $\lambda > 0$ 是常数并由实验得到, 则离散化求解式(11)得到的 u , 即为修正 u_0 的结果。

当待放大图像所含细节较少或对放大后的图像精细程度要求不高时, 可采用该方法进行处理。但如果待放大的图像含有丰富的细微结构变化或要求放大后的图像尽可能的保留所有的纹理特性时, 由于 TV-norm 较强的平滑作用, 会使图像在放大后丢失这些细节信息。因此, 给出四阶偏微分方程插值模型。

3.2 四阶偏微分方程迭代模型

在式(5)中用 $\nabla u / |\nabla u|$ 代替 u , 得到下面的连续能量泛函

$$\begin{aligned} E_1(u) &= \int_{\Omega} |D^2 u| dx dy + \\ &\quad \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy \quad (12) \end{aligned}$$

泛函中第 1 项是平滑项, 第 2 项是保真项。记

$|D^2 u| = (u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + u_{yy}^2)^{\frac{1}{2}}$, 参数 $\lambda_1 > 0$ 用来

平衡这两项的作用,也是通过反复实验人为选定的参数。由此泛函求解得到的插值模型,既具有 TV-norm 的平滑作用,又使图像有比较清晰的边缘,保留更多的细节信息。

为了求出式(12)的解,即修正 u_0 后的 u 。计算

$$\frac{\partial E_1}{\partial u} \cdot v = \int_{\Omega} \left(\frac{\nabla u_x \cdot \nabla v_x + \nabla u_y \cdot \nabla v_y}{|D^2 u|} \right) dx dy + \lambda_1 \int_{\Omega} (u - u_0) v dx dy = 0 \quad (13)$$

其中, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ 为 $\partial \Omega$ 的外法向量,利用式(3)得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\nabla u_x \cdot \nabla v_x + \nabla u_y \cdot \nabla v_y}{|D^2 u|} \right) dx dy \\ &= \int_{\partial \Omega} \left[\left(\frac{1}{|D^2 u|} \frac{\partial u_x}{\partial \mathbf{n}} \right) v_x + \left(\frac{1}{|D^2 u|} \frac{\partial u_y}{\partial \mathbf{n}} \right) v_y \right] ds - \\ & \int_{\partial \Omega} \left[\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u_x}{|D^2 u|} \right) n_1 v + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u_y}{|D^2 u|} \right) n_2 v \right] ds + \\ & \int_{\Omega} \left[\left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u_x}{|D^2 u|} \right) \right)_x v + \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u_y}{|D^2 u|} \right) \right)_y v \right] dx dy \end{aligned} \quad (14)$$

当满足

$$\left(\frac{u_{xx}}{|D^2 u|} \right)_{xx} + \left(\frac{u_{xy}}{|D^2 u|} \right)_{yx} + \left(\frac{u_{yx}}{|D^2 u|} \right)_{xy} + \left(\frac{u_{yy}}{|D^2 u|} \right)_{yy} + \lambda_1 (u - u_0) = 0 \quad (15)$$

时,式(12)取得极小值,对上述过程进行整理,进而得到四阶偏微分方程插值模型

$$\begin{cases} u_t = - \left(\frac{u_{xx}}{|D^2 u|} \right)_{xx} - \left(\frac{u_{xy}}{|D^2 u|} \right)_{yx} - \left(\frac{u_{yx}}{|D^2 u|} \right)_{xy} - \\ \left(\frac{u_{yy}}{|D^2 u|} \right)_{yy} - \lambda_1 (u - u_0) \\ u_{xx} + u_{yy} = 0, \left(\frac{u_{xx}}{|D^2 u|} \right)_x + \left(\frac{u_{xy}}{|D^2 u|} \right)_y = 0 \\ u_{xy} + u_{yx} = 0, \left(\frac{u_{yx}}{|D^2 u|} \right)_x + \left(\frac{u_{yy}}{|D^2 u|} \right)_y = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (16)$$

式中, t 是时间步长, λ_1 是常数。离散化求解式(16)得到的 u , 即为插值修正 u_0 的结果。

4 离散化过程

两个插值模型的离散化过程,采用的是有限差

分格式(在这里仅采用简单的显格式来计算)。式(11)、式(16)中出现的偏导数,分别采用表1中相应的离散化形式来表示,并通过 *Matlab* 具体实现,最终得到放大后的图像。其中, $\Delta x, \Delta y$ 为网格大小, Δt 为时间步长,且

$$m[a, b] = \left(\frac{\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)}{2} \right) \min(|a|, |b|)$$

离散化求解过程中所用到的参数,在实验中选择如下:

$\lambda = \lambda_1 = 1, h = 1, 3.1$ 中 $\Delta t = 0.15, 3.2$ 中 $\Delta t = 0.02$ 。 $3.1, 3.2$ 的 Δt 选取不同,是分别对它们进行实验,获得最佳效果时的时间参数。

表1 文中用到的有限差分表示

Tab. 1 Finite differences notation used in the article

$D_x^{\pm}(u_{i,j})$	$\pm \frac{1}{\Delta x} [u_{i \pm 1, j} - u_{i, j}]$
$D_y^{\pm}(u_{i,j})$	$\pm \frac{1}{\Delta y} [u_{i, j \pm 1} - u_{i, j}]$
$D_{xx}(u_{i,j})$	$\frac{1}{\Delta x^2} [D_x^+(u_{i,j}) - D_x^-(u_{i-1,j})]$
$D_{xy}(u_{i,j})$	$\pm \frac{1}{\Delta y} [D_x^{\pm}(u_{i, j \pm 1}) - D_x^{\pm}(u_{i, j})]$
$D_{yx}(u_{i,j})$	$\pm \frac{1}{\Delta x} [D_y^{\pm}(u_{i \pm 1, j}) - D_y^{\pm}(u_{i, j})]$
$D_{yy}(u_{i,j})$	$\frac{1}{\Delta y^2} [D_y^+(u_{i,j}) - D_y^-(u_{i, j-1})]$
$ D_x(u_{i,j}) $	$\sqrt{(D_x^+(u_{i,j}))^2 + (m[D_y^+(u_{i,j}), D_y^-(u_{i,j})])^2} + \varepsilon$
$ D_y(u_{i,j}) $	$\sqrt{(D_y^+(u_{i,j}))^2 + (m[D_x^+(u_{i,j}), D_x^-(u_{i,j})])^2} + \varepsilon$
$ D^2(u_{i,j}) $	$\sqrt{(D_{xx}(u_{i,j}))^2 + (D_{yx}(u_{i,j}))^2 + (D_{yy}(u_{i,j}))^2 + (D_{xy}(u_{i,j}))^2} + \varepsilon$

5 评价准则与实验结果分析

5.1 评价准则

评价准则采用以下定义的均方误差(MSE)和峰值信噪比(PSNR)两个指标。

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{i,j}^{M,N} (I(i,j) - J(i,j))^2}{\sum_{i,j}^{M,N} (I(i,j))^2}$$

$$\text{PSNR} = \frac{10 \times \ln(255^2 \times M \times N)}{\sum_{i,j}^{M,N} (I(i,j) - J(i,j))^2}$$

其中, I, J 分别为原图和放大图像。 M, N 分别为原图像的行列数。均方误差和峰值信噪比反映放大图像与原图的逼近程度。均方误差越小越好, 而峰值信噪比越高则说明放大图像越接近原图。

5.2 结果分析

为了测试本文算法的有效性, 把 256×256 像素的 Lena 图像采样缩小 2 倍, 然后再放大。

首先, 给出本文算法的仿真效果图, 如图 1 所示。



图 1 图像放大效果
Fig. 1 The result of image zooming

其次, 利用均方误差和峰值信噪比这两种评价标准对本文算法和线性插值算法的放大效果进行比较, 相关数据如表 2 所示。

表 2 各种方法的均方误差和峰值信噪比
Tab.2 The MSE and PSNR of each menthods

插值方法	MSE	PSNR
最近邻插值	3. 618 5e-004	10. 828 2
双线性插值	2. 049 0e-004	13. 298 1
三次立方插值	1. 970 2e-004	13. 468 5
TV-norm	1. 396 3e-004	14. 963 8
四阶偏微分方程	1. 372 7e-004	15. 037 8

由效果图 1 可见, 基于 TV-norm 插值和四阶偏微分方程插值的图像放大算法, 对图像进行放大时都有较好的效果, 保持了图像的原有特征; 表 2 中数据显示: 本文算法对图像进行放大时不仅获得较小

的均方误差, 而且得到较高的峰值信噪比。
为了进一步说明, 基于四阶偏微分方程插值和 TV-norm 插值的图像放大算法的各自特点, 选取 37×86 的眼睛放大 4 倍的结果, 如图 2(b)、(c) 所示, 放大图像对应的 2 维频谱图, 如图 2(d)、(e) 所示。

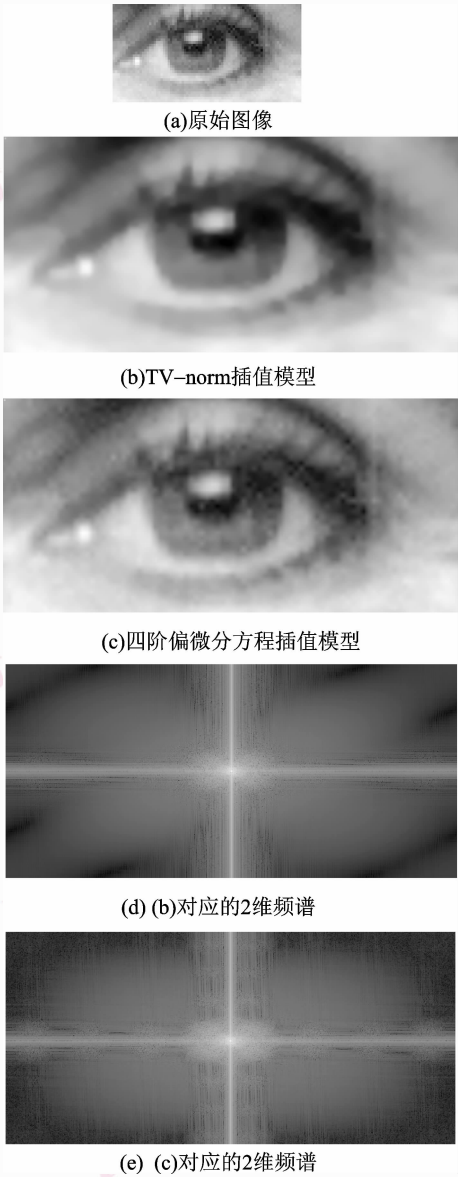


图 2 灰度图像放大的效果及 2 维频谱比较图
Fig. 2 Comparison of Output for Gray-scale image zooming and the two-dimensional frequency spectrum

由图 2(b)、(c) 看出, 分别基于两种插值模型的图像放大算法的差异: 图 2(b) 使用 TV-norm 插值模型放大时, 虽然获得较好的整体效果, 但由于过度平滑, 使得边缘模糊, 细节部分不够清晰 (不仅眼角的鱼尾纹看不到了, 而且眼球还出现了灰度的不连续情况), 而四阶偏微分方程插值模型则很好地改

善了 TV-norm 插值模型的放大效果,对边缘部分的处理,忠实地反映了图像的原始面貌,保持了边缘的锐度和纹理特性;进一步,对比 2 维频谱图 2(d)、(e)可见,四阶偏微分方程插值模型所对应的频谱图,高频分量较多,也就说明保留了更多的图像细节信息。

6 结 论

本文提出的基于 TV-norm 插值的图像放大算法,对含细节较少的图像或对放大后的图像精细程度要求不高时,是有效可行的。对含有丰富的细微结构变化的图像,基于四阶偏微分方程插值的图像放大算法要优于基于 TV-norm 插值的图像放大算法。并且,本文的两种放大算法,对彩色图像也有好的处理效果。

参考文献 (References)

1 Aubert G, Kornprobst P. Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.

2 Alvarez L, Lions P L, Morel J M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. SIAM Journal on Numerical

Analysis, 1992, **29**(3): 845-866.

3 Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Pattern Anaysis Machine Intelligent, 1990, **12**(7): 629-639.

4 Crandall M G, Ishii H, Lions P L. User's guide to viscosity Solutions of second order partial linear differential equations[J]. Bulletin (NS) American Mathematics Society, 1992; **27**(1): 1-67.

5 Lysaker M, Lundervold A, Tai Xue-cheng. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in Space and time[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, **12**(12): 1579-1590.

6 Lysaker M, Tai Xue-cheng. Iterative image restoration combining total variation minimization and a second-order functional [J]. International Journal of Computer Vision, 2006, **66**(1): 5-18.

7 Leonid I Rudin, Stanley Osher. Feature-oriented image enhancement using shock filters[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis 1990, **27**(4): 919-940.

8 Qian Wei-chang. Extended Variational Principle[M]. Shaihai: Knowledge Press, 1985. [钱伟长著. 广义变分原理[M]. 上海: 知识出版社, 1985.]

9 Leonid I Rudin, Stanley Osher, Emad Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, **60**(1-4): 259-268.

10 Lysaker M, Stanley Osher, Tai Xue-cheng. Noise removal using smoo-thened normals and surface fitting [J]. IEEE Transactions on Image Procedding, 2004, **13**(10): 1345-1457.