



凸弹子球系统的 Birkhoff 迭代与谱不变性

张建路^{1,2}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院华罗庚数学重点实验室, 北京 100190;

2. 中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所, 北京 100190

E-mail: jellychung1987@gmail.com

收稿日期: 2020-08-10; 接受日期: 2020-11-12; 网络出版日期: 2021-03-09

国家自然科学基金 (批准号: 11901560) 资助项目

摘要 对于具有光滑边界的凸弹子球映射, 本文构造一系列恰当的典则变换使其在近边界区域内转化为一个任意阶可积的表达式. 这一可积表达式可以用来揭示凸弹子球系统的谱不变量.

关键词 凸弹子球 生成函数 Birkhoff 典则变换 谱不变量 辛扭转映射 Mather 理论

MSC (2020) 主题分类 37E40, 37E45, 37J40, 37J50

1 引言

弹子球系统描述质点在一个 2 维具有光滑边界的封闭区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 内的无摩擦直线运动. 当质点触碰到边界 $\partial\Omega$ 时, 反弹并延续直线运动 (入射角等于反射角), 参见图 1. 当边界 $\partial\Omega$ 严格凸时, 质点的运动可以解释为一个“辛扭转映射”的轨道, 参见文献 [1]. 这一结论可以将弹子球的几何直观转化为一个动力系统, 而后者, 经由 20 世纪 80 年代动力系统专家的努力 (参见文献 [2, 3]), 已经形成一套完善的辛扭转映射理论.

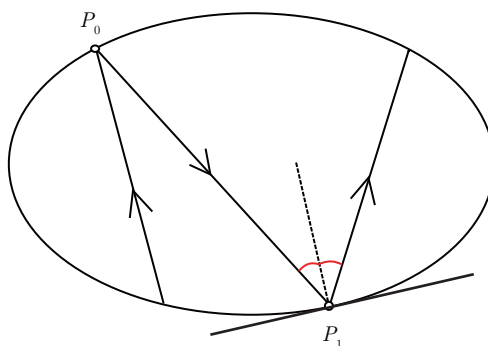


图 1 入射角等于反射角

英文引用格式: Zhang J. Birkhoff iterations and spectral invariants of convex billiard maps (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 649–662, doi: 10.1360/SCM-2020-0694

尽管凸弹子球系统的动力学本质是明显的, 然而关于它的定性理论却相当不平凡. 具体来说, 边界的几何形态对于映射拓扑结构产生了刚性的约束, 即著名的“长度谱猜想”和“Birkhoff 猜想”. 下面将致力于揭示 Birkhoff 的典则表达式与这些刚性猜想之间的关联.

1.1 凸弹子球的动力学

不失一般性, $\partial\Omega = \xi(s)$ 依赖于弧参变量 s 且假设周长固定为 1. 取 v 为 s 参数位置的入射角度, 则相邻两次弹射的位置可以确定对应于一个带状区域 $\mathbb{A} = [0, 1] \times [0, \pi]$ 上的微分同胚 (参见图 1)

$$\phi : (s, v) \rightarrow (\bar{s}, \bar{v}). \quad (1.1)$$

这一同胚由如下的生成函数决定:

$$h(x, \bar{x}) := -\|\xi(s) - \xi(\bar{s})\|, \quad \forall (x, \bar{x}) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.2)$$

这里 $x \equiv s \pmod{1}$ 和 $\bar{x} \equiv \bar{s} \pmod{1}$ 为相应点在 $[0, 1]$ 区间内的代表元. 这表明

$$\partial_1 h(x, \bar{x}) = \cos v, \quad \partial_2 h(x, \bar{x}) = -\cos \bar{v}. \quad (1.3)$$

由于 $-\partial_{12}h > 0$ 处处成立 (严格凸边界), 而且 ϕ 保持一个面积形式 $\omega = \sin v dv \wedge dx$ (这一形式是“恰当”的, 因为 $d\alpha = \omega$ 且 $\alpha = -\cos v dx$), 所以, 凸弹子球系统等价于一个恰当辛扭转映射.

注 1.1 这里 ω 的恰当性是必须的, 只有这样长度谱才成为一个 ϕ 的辛不变量 (参见第 1.2 小节). 同样地, 在操作 Birkhoff 迭代时, 每一次 Birkhoff 变换都需要保持恰当性, 以保持谱不变量.

引理 1.1 (可逆性) 弹子球系统 (1.1) 是可逆的, 具体表示为 $\phi \circ \mathcal{R} \circ \phi = \mathcal{R}$ 对于如下定义的反射变换成立:

$$\mathcal{R} : (s, v) \in \mathbb{A} \rightarrow (s, \pi - v) \in \mathbb{A}. \quad (1.4)$$

注 1.2 稍后看到这一特性将在 Birkhoff 迭代过程中保留, 并且对于最终典则形式的 β -函数产生了某种约束.

1.2 周期轨道与长度谱

找到系统的周期轨道并研究其性质是弹子球系统的首要目标. 最早, Birkhoff 利用“Poincaré 最后几何定理”证明了对于大于等于 2 的整数 n , 皆存在至少两条周期为 n 的轨道 (参见文献 [4]).

定义 1.1 假定 $\partial\Omega$ 的定向为 s 增加的方向, 一条周期轨 γ 的“匝数”定义为 γ 沿着 $\partial\Omega$ 正的方向返回初始位置 s 的总的增长数目. “旋转数”依此可以定义为

$$\rho(\gamma) := \frac{\gamma \text{ 的匝数}}{\gamma \text{ 的周期数}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \quad (1.5)$$

这里限制旋转数位于 $(0, 1/2]$ 的原因是, $\mathcal{R}(\gamma)$ 天然具有 $1 - \rho(\gamma)$ 的旋转数.

对于任意 $p/q \in \mathbb{Q}$ 既约形式, 定义“障碍函数”

$$\mathcal{B}\left(s, \frac{p}{q}\right) := \min_{X \in \mathcal{C}(s, p/q)} \sum_{i=0}^{q-1} h(x_i, x_{i+1}), \quad s \in [0, 1] \quad (1.6)$$

对于 $\mathcal{C}(s, p/q)$ 为所有 p/q -构型 $\{x_i\}_{i=0}^{q-1}$ 满足 $x_0 \equiv s$ 的集合. 可知 $\mathcal{B}(s, p/q)$ 的极小点必然对应一条 p/q -旋转数的轨道 (参见文献 [5, 定理 1.2.4]).

定义 1.2 对于凸弹子球区域 Ω , “标记长度谱” 定义为

$$\mathcal{ML}(\Omega) := \left\{ \min_{s \in [0,1]} \mathcal{B}\left(s, \frac{p}{q}\right) \mid \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap \left(0, \frac{1}{2}\right] \right\}. \quad (1.7)$$

注 1.3 标记长度谱是 “辛不变量”. 这是因为

$$\phi^* \alpha - \alpha = dh(x, \bar{x}),$$

如果对于另一恰当辛同胚 $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, 如下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} (x, v) & \xrightarrow{\phi} & (\bar{x}, \bar{v}) \\ \uparrow \Phi & & \uparrow \Phi \\ (\theta, I) & \xrightarrow{\psi} & (\bar{\theta}, \bar{I}), \end{array}$$

且 Φ 由 $g(x, \theta)$ 生成, 即

$$dg = \beta - \alpha$$

对于一个新的 1- 形式 β 成立且 $d\beta = \omega$, 则 ψ 将被如下的函数生成:

$$h(\theta, \bar{\theta}) = h(x, \bar{x}) + g(x, \theta) - g(\bar{x}, \bar{\theta}). \quad (1.8)$$

因此, 对于任意的周期轨道 $X = \{x_i\}_{i=0}^{q-1}$, Φ 将映射其为一个 $\Theta = \{\theta_i\}_{i=0}^{q-1}$ 新轨道但是其长度

$$\begin{aligned} A(\Theta) &:= \sum_{i=0}^{q-1} h(\theta_i, \theta_{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} h(x_i, x_{i+1}) + \sum_{i=0}^{q-1} g(x_i, \theta_i) - \sum_{i=0}^{q-1} g(x_{i+1}, \theta_{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} h(x_i, x_{i+1}) =: A(X) \end{aligned} \quad (1.9)$$

保持不变.

上述的证明说明, 对于任何两个边界 Ω 和 Ω' , 如果存在恰当的辛同胚使其上的弹球映射共轭, 那么它们具有同样的长度谱; 反之, 如下的问题是自然的:

问题 1.1 (标记长度谱猜想^[6]) 对于两个不同的弹球区域 Ω 和 Ω' , 如果它们是等谱的, 即 $\mathcal{ML}(\Omega) = \mathcal{ML}(\Omega')$, 是否 $\partial\Omega$ 与 $\partial\Omega'$ 等距同构?

注 1.4 Guillemin 和 Melrose^[6] 同样讨论了长度谱与如下 Dirichlet 问题的特征值的关系:

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, & \text{在 } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ 内,} \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

他们证实了上述的特征值集合覆盖长度谱集合, 并以此引发了著名的听鼓辨形猜测: 通过敲击鼓, 而不看到鼓, 来断定鼓面的形状. 这一问题由 Kac^[7] 提出 (事实上, 更早的雏形见于 Hermann Weyl 的工作), 旨在以纯粹的谱观点来揭示 $\partial\Omega$ 的形状 (所谓的 “Laplace 谱”).

1.3 弹子球的可积性

从动力系统的观点, “Liouville 可积” 需要 ϕ 的相空间具有不可缩 (即非拓扑零伦) 不变环面 (“散焦线”) 形成的叠层结构. Bialy [8] 证明了圆周弹子球是唯一的 Liouville 可积弹子球系统. 如果将全局叠层改为局部的或者其他指标集, 则可以定义弱的可积性, 典型的例子为椭圆边界的弹子球.

问题 1.2 (Birkhoff 猜想) 除了椭圆, 没有其他的局部可积的凸弹子球系统.

最近关于这一猜想的突破主要为 Kaloshin 与其合作者的一系列工作 (参见文献 [9–11]). 某些证据显示局部的可积性可以放宽到仅为 $1/2$ 和 $1/3$ 旋转数的散焦线存在 (参见文献 [11]). 然而, 这一问题的彻底解决仍是一个遥远的目标.

1.4 凸弹子球的 Mather 理论

最初 Mather 理论是用来研究 Hamilton 动力系统的关于上同调 (或下同调) 参数化的极小构型问题 (参见文献 [2]). 由于在弹子球问题里, 对于整体刚性变量的兴趣远大于对于单一轨道的探索, 因此, 我们仅在此做一个简要介绍.

双向无穷的构型 $X = \{x_i \in \mathbb{R}\}_{-\infty}^{+\infty}$ 被称为极小的, 如果任何 X 的片段都是定端点极小的. 可以验证极小构型 X 满足 Euler-Lagrange 方程

$$\partial_1 h(x_i, x_{i+1}) + \partial_2 h(x_{i-1}, x_i) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (1.11)$$

这说明 $\{([x_i], -\partial_1 h(x_i, x_{i+1}))\}_{-\infty}^{+\infty}$ 是弹子球映射 ϕ 的轨道. 而且, 每一极小构型都具有唯一确定的旋转数

$$\rho(X) := \lim_{i \rightarrow \pm\infty} \frac{x_i}{i}. \quad (1.12)$$

注意到这一表达式与之前 (1.5) 的定义是吻合的.

定义 1.3 (β -函数) 对于任意既约的 $p/q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2]$, 对应的 β -函数值定义为

$$\beta\left(\frac{p}{q}\right) := \frac{1}{q} \min_{s \in [0, 1]} \mathcal{B}\left(s, \frac{p}{q}\right).$$

对于任意的无理数 $\omega \in (0, 1/2]$, 其 β -函数值可以用极限表示为

$$\beta(\omega) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta\left(\frac{p_n}{q_n}\right),$$

这里 $\{p_n/q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为任意逼近到 ω 的既约有理数.

注 1.5 上述定义不依赖于 $p_n/q_n \rightarrow \omega$ 的选取, 这是因为每一对对应 p_n/q_n - 极小构型的 X_n 均收敛到一个 ω - 极小构型 X_ω (定端点极小).

命题 1.1 [3] 如下陈述 $\beta : (0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ 的若干性质:

- (1) $\beta(h)$ 对于 $h \in (0, 1/2]$ 严格凸.
- (2) $\beta(h)$ 在有理点 $h \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2]$ 可微, 当且仅当弹子球映射具有 h - 散焦线. 因此, 对于通有的弹子球边界, $\beta(h)$ 在有理点处处不可微.

定理 1.1 凸弹子球的 β -函数是一个辛不变量.

证明 对于任意 $h \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2]$, $\beta(h)$ 在恰当辛同胚下不变 (基于注 1.3). 由于在无理点 $0 < h < 1/2$, $\beta(h)$ 有一个极限表达式, 因此同样是辛不变的. $\square$

如下定理 1.2 实际说明 β -函数在原点的 Taylor 展开式的系数同样是辛不变量. 这一结论最早在文献 [6, 12] 中用几何方法说明, 不同于本文的 Birkhoff 迭代方法. 不管怎样, 标记长度谱可以被 β -函数的系数簇来替代作为弹子球系统的不变量使用, 因此, 如下的问题可以直觉地提出:

问题 1.3 ^[13] 对于任何两个不同的凸区域 Ω 和 Ω' , 如果 $\beta_\Omega = \beta_{\Omega'}$, 是否边界 $\partial\Omega$ 与 $\partial\Omega'$ 等距同构?

问题 1.4 ^[13] 对于弹子球区域 Ω , 如果 β_Ω 在原点的邻域 $(0, \epsilon)$ 内可微 ($\epsilon > 0$), 是否 Ω 必为椭圆?

这两个问题是标记长度谱猜想和 Birkhoff 猜想各自的等价问题. 确实, 根据命题 1.1(2), 弹子球的局部可积性等价于 β -函数在相应区间内的 C^1 光滑性. 事实上, 文献 [12] 已经从偏微分方程的观点断定了 β -函数在原点 Taylor 展开式的最初几项系数的几何意义, 但是随后的系数则相当复杂以至于难以辨别其对应的几何意义.

1.5 主要结论

我们在 $\mathbb{A}$ 的边界邻域内给出一个 ϕ 的 Birkhoff 典则表达式. 这一表达式有助于得到 $\beta(h)$ 在原点的显式 Taylor 表达式.

定理 1.2 (结论 1) 对于严格凸的弹子球区域 Ω , 且边界 $\partial\Omega$ 充分光滑, 可以构造 C^∞ 的恰当辛同胚 $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ 使得 ϕ 的表达式 (1.1) 转化为一个 Birkhoff 典则形式

$$\psi =: \Phi^{-1} \circ \phi \circ \Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, \quad \text{满足} \begin{cases} x^+ = x + \zeta_\infty(y), \\ y^+ = y_\infty, \end{cases} \quad (1.13)$$

当 $y \rightarrow 0$ 作为无穷小量时, $\zeta_\infty(y)$ 表述为

$$\zeta_\infty(y) = y + \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i+1} y^{2i+1}. \quad (1.14)$$

注 1.6 (1) 上述表达式的典则变换是通过迭代法得到的, 且每一步都是恰当的.

(2) 上述表达式实际给出了 ψ 在边界处 $\{y = 0\}$ 的任意阶函数 (jet function). 虽然上述的可积形式 (1.13) 无法延拓到任意实体的带状区域 $\{(x, y) \in \mathbb{T} \times [0, \delta)\}$ ($\delta \ll 1$), 即使 $\partial\Omega$ 是 C^ω -光滑的, 但是我们确实能够得到 β -函数的一个显式的 Taylor 表达式.

推论 1.1 (结论 2) β -函数形式上可以表达为

$$\beta(h) = \frac{\sqrt{2}}{3} c^{3/2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2i+1}{2i+3} c_{2i+1} \sqrt{2^{2i+1}} c^{\frac{2i+3}{2}}, \quad (1.15)$$

这里 $\zeta_\infty^{-1}(h)$ 是 $\zeta_\infty(c)$ 的反函数且

$$c = \frac{1}{2} [\zeta_\infty^{-1}(h)]^2$$

同样是辛不变的.

注 1.7 对于 $c \ll 1$, (1.15) 可以用待定系数法形式上表达为

$$\beta(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{2n+1} h^{2n+1}. \quad (1.16)$$

则可以得到如下的结论:

推论 1.2 (结论 3) Ω 是一个具有光滑边界的弹子球区域, 则

$$\beta_3 + \pi^2 \beta_1 \leq 0$$

且等号成立当且仅当 Ω 是一个圆形区域.

在文献 [12, 第 8 章] 中, 这一不等式被证实等价于圆周不等式. 文献 [5, 13] 同样各自给出了类似的不等式. 实际上, 由 (2.3)、(2.4) 和引理 2.4 可以看出, 这一结论可以在 Lazutkin 坐标系下证明, 而这一坐标系恰恰是我们的迭代过程 (2.7) 的第一步.

1.6 相关工作的对比

本文的创新点在于提供了一个构造性的得到辛不变量的显式表达式的方法, 这与以往文献 [12] 的谱理论方法是截然不同的. 相应的归纳公式可以在引理 2.5 的 (2.11) 和 (2.14) 中找到. 理论上, 从 Lazutkin 变换开始, 迭代法可以得到所有 (1.14) 中的系数 c_{2i+1} . 实际上, 在文献 [13] 中, 经由计算机辅助, β -函数的 Taylor 表达式被计算到了 9 阶.

另一方面, 利用 KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 迭代, 文献 [14] 利用 Hamilton 插值法, 验证了近边界区域内所有具有 Diophantine 旋转数的散焦线的存在性. 这一插值的离散算法在文献 [15] 中被嵌入到了时间周期的 Hamilton 相流中, 从而直接利用经典相流的 KAM 理论得到了类似结论. 同样作为 Birkhoff 迭代, 本文的适定旋转数为 0, 并非 Diophantine 的. 然而, 文献 [14] 的 KAM 结论可以期待得到 β -函数在 Diophantine 旋转数 $h \neq 0$ 处的展开式.

问题 1.5 对于两个不同的凸弹子球区域 Ω 和 Ω' , 如果 $\beta_\Omega(h) = \beta_{\Omega'}(h)$ 对于某一 $\epsilon > 0$ 和所有 $h \in (0, \epsilon) \cap \mathcal{D}_\alpha^\tau$ 成立, 这里

$$\mathcal{D}_\alpha^\tau := \left\{ \omega \in \mathbb{R} \mid \forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}, |k\omega + l| \geq \frac{\alpha}{|k|^\tau} \right\},$$

是否 $\partial\Omega$ 与 $\partial\Omega'$ 等距同构?

2 Birkhoff 迭代与典则表达式

首先, 我们陈述 Lazutkin 变换并将其作为迭代的第一步. 对于充分小的角度 $0 < v \ll 1$, 弹子球映射表达为

$$\phi : \begin{cases} s' = s + \alpha_1(s)v + \alpha_2(s)v^2 + \alpha_3(s)v^3 + F(s, v)v^4, \\ v' = v + \beta_2(s)v^2 + \beta_3(s)v^3 + G(s, v)v^4, \end{cases} \quad (2.1)$$

这里

$$\begin{aligned} \alpha_1(s) &= 2\rho(s), & \alpha_2(s) &= \frac{4}{3}\rho(s)\dot{\rho}(s), \\ \alpha_3(s) &= \frac{2}{3}\rho^2\ddot{\rho} + \frac{4}{9}\rho\dot{\rho}^2, \\ \beta_2(s) &= -\frac{2}{3}\dot{\rho}, & \beta_3(s) &= -\frac{2}{3}\rho\ddot{\rho} + \frac{4}{9}\dot{\rho}^2, \end{aligned}$$

其中 $\rho(s)$ 是 $\partial\Omega$ 的曲率半径. 利用 Lazutkin 变换

$$\Phi: x = \frac{\int_0^s \rho(\tau)^{-2/3} d\tau}{\int_0^1 \rho(s)^{-2/3} ds}, \quad y = \frac{4\rho(s)^{1/3} \sin v/2}{\int_0^1 \rho(s)^{-2/3} ds}, \quad (2.2)$$

映射 (2.1) 变成

$$\varphi: \begin{cases} \bar{x} = x + y + y^3 f(x, y), \\ \bar{y} = y + y^4 g(x, y), \end{cases} \quad (2.3)$$

且保持辛形式 $d(y^2/2) \wedge dx$. 我们可以计算这一映射的生成函数

$$\hbar(x, \bar{x}) = 4C_1^2 \int_x^{\bar{x}} \rho^{2/3}(s(\tau)) d\tau + 4C_1^3 h(s, s'), \quad (2.4)$$

这里 $h(s, s')$ 由 (1.2) 表达且

$$C_1 = \left(\int_0^1 \rho^{-2/3}(s) ds \right)^{-1}.$$

因此,

$$d\hbar(x, \bar{x}) = \frac{y'^2}{2} d\bar{x} - \frac{y^2}{2} dx$$

且 $\omega = d\frac{y^2}{2} \wedge dx = d\alpha$ (此处取 $\alpha = \frac{y^2}{2} dx$). 这说明 φ 具有保持 2- 形式 ω 的典则形式, 从而为我们继续运用恰当辛变换提供了契机.

注 2.1 注意到 (2.3) 对于 $0 < y \ll 1$ 是一个近可积映射, 据此, 文献 [16] 在近边界区域内得以运用 KAM 迭代得到大量 Diophantine 散焦线. 另一个关键的性质是, 上述 Lazutkin 坐标是保持可逆性的.

引理 2.1 (镜像对称) Lazutkin 坐标下的弹子球映射 φ 是可逆的, 即镜面反射

$$\mathcal{T}: (x, y) \in \mathcal{A} \rightarrow (x, -y) \in \mathcal{A} \quad (2.5)$$

满足 $\varphi \circ \mathcal{T} \circ \varphi = \mathcal{T}$.

证明 注意到 $\varphi = \Phi \circ \phi \circ \Phi^{-1}$, $\Phi \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \Phi$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \text{Id}$ 和 $\phi \circ \mathcal{R} \circ \phi = \mathcal{R}$ (基于 (1.4)). 这意味着

$$\begin{aligned} \varphi \circ \mathcal{T} &= \Phi \circ \phi \circ \Phi^{-1} \circ \mathcal{T} = \Phi \circ \phi \circ \mathcal{T} \circ \Phi^{-1} \\ &= \Phi \circ \phi \circ \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R} \circ \Phi^{-1} \\ &= \Phi \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{R}^{-1} \circ \phi \circ \mathcal{R} \circ \Phi^{-1} \\ &= \mathcal{T} \circ \Phi \circ \mathcal{R}^{-1} \circ \phi \circ \mathcal{R} \circ \Phi^{-1} \\ &= \mathcal{T} \circ \Phi \circ \phi^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \circ \Phi^{-1} \\ &= \mathcal{T} \circ \Phi \circ \phi^{-1} \circ \Phi^{-1} = \mathcal{T} \circ \varphi^{-1}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

这里 $\mathcal{S}(s, v) = (s, v + \pi)$ 满足 $\mathcal{S} \circ \mathcal{T} = \mathcal{R}$. □

注 2.2 在此后的 Birkhoff 迭代中, 镜像对称性质将同样得以保持.

2.1 坐标转移链

形式上, 我们的迭代方案使得如下交换图链成立:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (x, y) & \xrightarrow{\Phi_0} & (x_1, y_1) & \xrightarrow{\Phi_1} & \cdots & \xrightarrow{\Phi_{n-1}} & (x_n, y_n) & \xrightarrow{\Phi_n} & \\
 \varphi \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & \downarrow & & \varphi_n \downarrow & & \\
 (\bar{x}, \bar{y}) & \xrightarrow{\Phi_0} & (\bar{x}_1, \bar{y}_1) & \xrightarrow{\Phi_1} & \cdots & \xrightarrow{\Phi_{n-1}} & (\bar{x}_n, \bar{y}_n) & \xrightarrow{\Phi_n} & .
 \end{array} \tag{2.7}$$

这将最终转化 (2.3) 到一个极限状态

$$\varphi_\infty : \begin{cases} x_\infty^+ = x_\infty + \zeta_\infty(y_\infty), \\ y_\infty^+ = y_\infty \end{cases}$$

对于 $(x_\infty, y_\infty) \in \mathbb{T} \times [0, r)$ ($r \ll 1$) 成立. 此外, 每一步都有

$$y_{k+1} dy_{k+1} \wedge dx_{k+1} = y_k dy_k \wedge dx_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

因此, 每个 Φ_l 都能找到函数 $h_k(x_k, x_{k+1})$ 满足

$$dh_k = \frac{y_{k+1}^2}{2} dx_{k+1} - \frac{y_k^2}{2} dx_k, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.8}$$

生成, 且与 $\mathcal{T}$ 可交换

$$\Phi_k \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \Phi_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

这样, 镜像对称性质将被传导至 φ_{k+1} .

引理 2.2 假定 (2.9) 以及 φ_k 是镜像对称的, 则 $\varphi_{k+1} = \Phi_k \circ \varphi_k \circ \Phi_k^{-1}$ 同样镜像对称, 即

$$\varphi_{k+1} \circ \mathcal{T} \circ \varphi_{k+1} = \mathcal{T}.$$

证明 直接分析, 可得

$$\begin{aligned}
 \varphi_{k+1} \circ \mathcal{T} &= \Phi_k \circ \varphi_k \circ \Phi_k^{-1} \circ \mathcal{T} \\
 &= \Phi_k \circ \varphi_k \circ \mathcal{T} \circ \Phi_k^{-1} \\
 &= \Phi_k \circ \mathcal{T} \circ \varphi_k^{-1} \circ \Phi_k^{-1} \\
 &= \mathcal{T} \circ \Phi_k \circ \varphi_k^{-1} \circ \Phi_k^{-1} \\
 &= \mathcal{T} \circ \varphi_{k+1}^{-1}.
 \end{aligned}$$

证毕. □

注意到 $k = 0, 1, 2$ 已经被 (2.3) 所证实. 我们只需验证

$$\varphi_k : \begin{cases} \bar{x} = x + \zeta(y) + y^k f(x, y), \\ \bar{y} = y + y^{k+1} g(x, y), \quad k \geq 3. \end{cases} \tag{2.10}$$

实际上, (2.8) 和 (2.9) 将唯一地确定 φ_k .

引理 2.3 (辛约束) 假定 $\varphi_k : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ 是具有 (2.10) 表达的辛同胚, 且保持 $ydy \wedge dx$. 对于 $y \ll 1$, 如果 φ_k 表示为

$$\bar{x} = x + \zeta(y) + \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x)y^n, \quad \bar{y} = y + \sum_{n=k+1}^{\infty} g_n(x)y^n,$$

则必须满足

$$(k+2)g_{k+1}(x) + f'_k(x) = 0.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} d\bar{y}^2 \wedge d\bar{x} &= d[y + g_{k+1}y^{k+1} + g_{k+2}y^{k+2} + O(y^{k+3})]^2 \\ &\quad \wedge d[x + \zeta(y) + f_k y^k + f_{k+1}y^{k+1} + O(y^{k+2})] \\ &= d[y^2 + 2g_{k+1}y^{k+2} + 2g_{k+2}y^{k+3} + O(y^{k+4})] \\ &\quad \wedge (dx + f'_k y^k dx + f'_{k+1} y^{k+1} dx + (\zeta' + O(y^{k-1})dy)) \\ &= d(y^2) \wedge dx + [2g_{k+1}(k+2) + 2f'_k]y^{k+1} dy \wedge dx + O(y^{k+2}), \end{aligned}$$

通过求解 $O(y^{k+1})$ - 阶等式, 目标结论得证. $\square$

引理 2.4 (对称约束) 假定 φ_k 具有形式 (2.10) 且是镜像对称的, 则对于 $\zeta(y) = \sum_{n=1}^{k-1} \zeta_n y^n$, 如下映射:

$$x' = x + \zeta_k(y) + \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x)y^n, \quad y' = y + \sum_{n=k+1}^{\infty} g_n(x)y^n$$

满足

- (1) $\zeta_k(y)$ 是奇函数, 即 $\zeta_n = 0$ 对于所有偶数 n 成立;
- (2) 如果 k 是偶数, 则 $g_{k+1}(x) = 0$, $f_k(x) = 0$.

证明 将镜像对称的定义代入 φ_k , 可得

$$g_{k+1}(x)(-y)^{k+1} = g_{k+1}(x)y^{k+1}.$$

这说明每一个 $g_{k+1} = 0$ 对于偶数 k 成立. 类似地,

$$\zeta(y) + \zeta(-y) + [y^k + (-y)^k]f_k(x) = 0,$$

意味着 $\zeta(y)$ 是一个奇函数, 则 $f_k(x) \equiv 0$ 对于偶数 k 成立. $\square$

注 2.3 这一引理意味着每一步 Φ_k 变换将 φ_k 表达式中 y 的阶数升高 2 阶, 参见 (2.10). 在下文中, 这一特性将决定 β - 函数的独特形式.

至此, 证明定理 1.2 的最后的条件是验证满足 (2.8) 和 (2.9) 的 Φ_k 的存在性, 这将由如下的引理保证:

引理 2.5 (迭代) 对于保持 $ydy \wedge dx$ 且表达为

$$\varphi_k : \begin{cases} \bar{x} = x + \zeta_k(y) + y^k f(x, y) = x + \zeta_k(y) + y^k f_0(x) + y^{k+1} f_1(x) + O(y^{k+2}), \\ \bar{y} = y + y^{k+1} g(x, y) = y + y^{k+1} g_0(x) + y^{k+2} g_1(x) + O(y^{k+3}), \end{cases} \quad k \geq 3 \quad (2.11)$$

的弹子球映射 ϕ_k , 我们可以找到 $\Phi_k^{-1} : (u, v) \rightarrow (x, y)$ 满足 $v dv \wedge du = y dy \wedge dx$,

$$y = v \sqrt{1 + \frac{2}{k+2} v^{k-1} ([f_0] - f_0(x))}, \quad (2.12)$$

$$u = x + (k+1) v^{k-1} \int_0^x \frac{[f_0] - f_0(s)}{k+2} ds, \quad (2.13)$$

使得后续的 $\varphi_{k+1} : (u, v) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$ 满足

$$\varphi_{k+1} : \begin{cases} \bar{u} = u + \zeta_{k+1}(v) + v^{k+1} f_+(u, v), \\ \bar{v} = v + v^{k+2} g_+(u, v). \end{cases} \quad (2.14)$$

此外, 如果 $H(x, \bar{x})$ 和 $G(u, x)$ 是 φ_k 和 Φ_k 各自的生成函数, 则 φ_{k+1} 被如下形式:

$$H_+(u, \bar{u}) = G(u, x) - G(\bar{u}, \bar{x}) + H(x, \bar{x}) \quad (2.15)$$

的生成函数生成.

证明 形式上, 假设 Φ_k^{-1} 满足

$$x = u + v^{k-1} a(u, v), \quad y = v + v^k b(u) + v^{k+1} e(u, v), \quad (2.16)$$

这里 $a(u, v)$ 、 $b(u)$ 和 $e(u, v)$ 将在后面的计算中确定, 则对于 $0 \leq y \ll 1$, (2.11) 转化为

$$\bar{u} = u + \zeta_k(v) + v^{k-1} c(u, v), \quad \bar{v} = v + v^k d(u, v). \quad (2.17)$$

因此, a 、 b 、 e 、 c 和 d 的相互关系将由

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u + v^{k-1} a(u, v) + \zeta_k(v + v^k b + v^{k+1} e) \\ &\quad + (v + v^k b + v^{k+1} e)^k f(u + v^{k-1} a, v + v^k b + v^{k+1} e) \\ &\quad - (v + v^k d)^{k-1} a(u + \zeta_k(v) + v^{k-1} c, v + v^k d) \end{aligned} \quad (2.18)$$

决定, 并归结为

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u + \zeta_k(v) + v^k \left[\zeta'_k(v) b(u) + f_0(u) - a_u(u, 0) \frac{\zeta_k}{v} \right] \\ &\quad + v^{k+1} \left[f_1 - a_{uu} \frac{\zeta_k^2}{2v^2} - a_{uv}(u, 0) \frac{\zeta_k}{v} \right] \\ &\quad - v^{2k-2} [a_u c + d(k-1)a] + \text{高阶项}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

如果选取 $a(u, v)$ 和 $b(u)$ 使得

$$-a_u(u, 0) + f_0(u) - \int_0^1 f_0(u) du + b(u) = 0, \quad (2.20)$$

则 φ_{k+1} 的第一分量将变成

$$\bar{u} = u + \zeta_{k+1}(v) + f_+(u, v) v^{k+1},$$

这里

$$\zeta_{k+1}(v) = \zeta_k(v) + [f_0] v^k, \quad [f_0] = \int_0^1 f_0(u) du.$$

上述估计中用到了 $\zeta'_k(0) = 1, \zeta''_k(0) = 0, k \geq 3$. 另一方面,

$$\bar{v} + \bar{v}^k b(\bar{u}) + \bar{v}^{k+1} e(\bar{u}, \bar{v}) = v + v^k b(u) + v^{k+1} e(u, v) + v^{k+1} g_0(v) + O(v^{k+2}).$$

因为

$$b(\bar{u}) - b(u) = b'(u)v + O(v^2),$$

所以形式上得到

$$\bar{v} = v + v^{k+1}(-b'(u) + g_0(u)) + O(v^{k+2}) =: v + v^{k+2}g_+(u, v),$$

只要满足

$$-b'(u) + g_0(u) = 0. \quad (2.21)$$

由于 $a(u, v)$ 和 $b(u)$ 的选取必须保持 $vdv \wedge du = ydy \wedge dx$, 因此需要找到一个 $S(x, v)$ 使得

$$\begin{aligned} dS(x, v) &= \frac{1}{2}y^2 dx - \frac{1}{2}v^2 du + \frac{1}{2}d((u-x)v^2) \\ &= \frac{1}{2}y^2 dx - \frac{1}{2}v^2 dx + (u-x)vdv. \end{aligned} \quad (2.22)$$

这要求

$$y^2 = v^2 + 2S_x(x, v), \quad u = \frac{1}{v}S_v(x, v) + x, \quad (2.23)$$

从而形式上基于 (2.16) 以及 $e(u, v) = O(v^{k-2})$,

$$S_x(x, v) = v^{k+1}b(x).$$

另一方面, (2.16) 的第一个分量满足

$$S_v(u + v^{k-1}a(u, v), v) = -v^k a(u, v).$$

从这一等式, 利用“隐函数定理”对于 $v \ll 1$ 可以解出 $a(u, v)$. 具体而言, 取

$$S(x, v) := v^{k+1}B(x) = -\frac{v^{k+1}}{k+2} \int_0^x (f_0(s) - [f_0])ds,$$

随即我们得到

$$\begin{cases} b(u) = \frac{[f_0] - f_0(u)}{k+2}, \\ a(u, 0) = \frac{k+1}{k+2} \int_0^u (f_0(s) - [f_0])ds, \end{cases} \quad (2.24)$$

则变换 Φ_k 确定为

$$\Phi_k : \begin{cases} y = v \sqrt{1 + \frac{2}{k+2} v^{k-1}([f_0] - f_0(x))}, \\ u = x + (k+1)v^{k-1}B(x). \end{cases} \quad (2.25)$$

从而新的弹子球映射 φ_{k+1} 变成

$$\varphi_{k+1} : \begin{cases} \bar{u} = u + \zeta_{k+1}(v) + v^{k+1}f_+(u, v), \\ \bar{v} = v + v^{k+2}g_+(u, v). \end{cases} \quad (2.26)$$

此外, 我们得知,

$$d(u, v) = O(v^2), \quad e(u, v) = O(v^{k-2})$$

在上述计算中实际是无关的高阶项. 因此我们成功地得到了形如 (2.14) 的 φ_{k+1} 表达式. 而且相应的迭代变换满足

$$dG(u, x) = \frac{y^2}{2}dx - \frac{v^2}{2}du$$

且表达式为

$$\begin{aligned} G(u, x) &= (x - u)w + S(x, v) \\ &= \frac{1-k}{2}(k+1)^{-\frac{k+1}{k-1}}B(x)^{-\frac{2}{k-1}}(u-x)^{\frac{k+1}{k-1}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

由注 1.3 的分析得知 φ 具有形如 (2.15) 的生成函数 $H_+(u, \bar{u})$. $\square$

定理 1.2 的证明 从 $k=3$ 开始, 利用引理 2.5 得到 $\varphi_4 = \Phi_3 \circ \varphi_3 \circ \Phi_3^{-1}$ 符合表达式 (2.14). 注意到基于 (2.12) 有

$$\Phi_3 \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \Phi_3.$$

利用引理 2.4, φ_4 进一步修正为

$$\varphi_5 : \begin{cases} \bar{u} = u + \zeta_4(v) + O(v^5), \\ \bar{v} = v + O(v^6), \end{cases} \quad (2.28)$$

因此, 最终升高 k 的值 2 阶. 而且镜像对称性质对于 φ_5 保留, 因为 (2.12) 与 $\mathcal{T}$ 对于奇数 k 可交换 (由具体构造的形式保证). 根据引理 2.2 可知 φ_5 必然是镜像对称的. 重复上述过程无穷多次, 则得到最终的典则变换

$$\Phi_\infty := \prod_{\substack{k=3 \\ k \text{ 是奇数}}}^{+\infty} \Phi_k$$

使得 $\varphi_\infty = \Phi_\infty \circ \varphi_3 \circ \Phi_\infty$ 最终具有一个典则表达式 (1.13). 很明显, 当 $\partial\Omega$ 是 C^∞ (甚至 C^ω) 光滑时, 所有过程中的 φ_k 和 Φ_k 都是 C^∞ 光滑的. 因此, 最终的 φ_∞ 也是 C^∞ 光滑的, 且表达式 (1.14) 当 $y \rightarrow 0$ 时成立. $\square$

3 谱不变量与 β -函数

本节利用定理 1.2 求解 β -函数, 并得出相应的若干结论.

推论 1.1 的证明 注意到 (1.14) 保持辛形式 $ydy \wedge dx$, 如果假设 $l := y^2/2$, 则 (1.14) 将变成

$$\chi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, \quad \text{经由} \begin{cases} x^+ = x + \zeta_\infty(\sqrt{2l}), \\ l^+ = l. \end{cases}$$

这是一个保持典则辛形式 $dl \wedge dx$ 的可积扭转映射. 形式上, 可赋予这一映射一个“虚拟 Hamilton 函数”

$$H(l) = \int \zeta_{\infty}(\sqrt{2}l)dl = \frac{2\sqrt{2}}{3}l^{3/2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2c_{2i+1}}{2i+3} \sqrt{2^{2i+1}} l^{\frac{2i+3}{2}}$$

使得 χ 恰好等于这一函数的时间 -1 映射. 由于 $H(l)$ 是可积的, 作为 $\beta(h)$ 的凸共轭, $\alpha(c) = H(c)$ 即为 Mather 的 α -函数^[2]. 通过 Legendre 变换, 可得

$$\begin{aligned} \beta(h) &= \max_{c \in H^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})} \langle c, h \rangle - \alpha(c) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}c^{3/2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2i+1}{2i+3} c_{2i+1} \sqrt{2^{2i+1}} c^{\frac{2i+3}{2}}, \quad h \ll 1, \end{aligned}$$

这里

$$\sqrt{2}c = \zeta_{\infty}^{-1}(h) = h + \sum_{i=1}^{+\infty} d_{2i+1} h^{2i+1}.$$

证毕. □

推论 1.2 的证明 从 (2.4) 可以解出 (1.16) 的前两项系数

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -1 = -\text{周长}(\partial\Omega), \\ \beta_3 &= \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \rho^{-2/3}(s) ds \right)^3. \end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式, 可得

$$\beta_3 + \pi^2 \beta_1 \leq 0,$$

且等号成立当且仅当 $\rho(s) \equiv 1/2\pi$, 此时 $\partial\Omega$ 只能是一个圆. □

致谢 作者感谢 Vadim Kaloshin 和 Ke Zhang 教授在本文撰写过程中的帮助, 并感谢 Jacopo de Simoi 和 Alfonso Sorrentino 教授提供数值计算的佐证.

参考文献

- 1 Mather J N. Glancing billiards. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1982, 2: 397–403
- 2 Mather J N. Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems. *Math Z*, 1991, 207: 169–207
- 3 Mather J N. Variational construction of connecting orbits. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1993, 43: 1349–1386
- 4 Birkhoff G D. Proof of Poincaré’s geometric theorem. *Trans Amer Math Soc*, 1913, 14: 14–22
- 5 Siburg K F. The Principle of Least Action in Geometry and Dynamics. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1844. Bochum: Springer-Verlag, 2004
- 6 Guillemin V, Melrose R. A cohomological invariant of discrete dynamical systems. In: Butzer P L, Fehér F, eds. *E. B. Christoffel*. Basel: Birkhäuser, 1981, 672–679
- 7 Kac M. Can one hear the shape of a drum? *Amer Math Monthly*, 1966, 73: 1–23
- 8 Bialy M. Convex billiards and a theorem by E. Hopf. *Math Z*, 1993, 214: 147–154
- 9 Avila A, de Simoi J, Kaloshin V. An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse. *Ann of Math (2)*, 2016, 184: 527–558
- 10 Kaloshin V, Sorrentino A. On the local Birkhoff conjecture for convex billiards. *Ann of Math (2)*, 2018, 188: 315–380
- 11 Zhang J. Coexistence of period 2 and 3 caustics for deformative nearly circular billiard maps. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2019, 39: 6419–6440
- 12 Marvizi S, Melrose R. Spectral invariants of convex planar regions. *J Differential Geom*, 1982, 17: 475–502

- 13 Sorrentino A. Computing Mather's β -function for Birkhoff billiards. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2015, 35: 5055–5082
- 14 Popov G. Invariants of the length spectrum and spectral invariants of planar convex domains. *Comm Math Phys*, 1994, 161: 335–364
- 15 Zhang J. Suspension of the billiard maps in the Lazutkin's coordinate. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2017, 37: 2227–2242
- 16 Lazutkin V F. The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain. *Math USSR Izv*, 1973, 7: 185–214

Birkhoff iterations and spectral invariants of convex billiard maps

Jianlu Zhang

Abstract For a billiard map with smooth and strictly convex boundary, we construct a list of Birkhoff transformations which transfers the map into a normal form. This normal form can be used to reveal the spectral invariants of the map.

Keywords convex billiard map, generating function, Birkhoff normal form, spectral invariant, symplectic twist map, Mather theory

MSC(2020) 37E40, 37E45, 37J40, 37J50

doi: 10.1360/SCM-2020-0694