

非圆轨道 GPS/LEO 掩星反演地球大气参数的算法及讨论*

郭 鹏¹ 蔡风景² 洪振杰² 严豪健¹ 刘 敏¹

(1 中国科学院上海天文台 上海 200030)

(2 温州师范学院数学与信息科学学院 浙江温州 325027)

摘要 在非圆轨道 GPS 和 LEO 卫星条件下, 给出一种较为直接的 GPS/LEO 掩星反演地球大气参数技术中弯曲角序列的迭代算法, 并在理论上对该迭代法的收敛性进行了严格的数学证明. 利用 GPS 掩星反演模拟程序, 定量估算了卫星圆轨道假设对 GPS/LEO 掩星反演地球大气参数的影响, 并验证了在非圆轨道条件下各种迭代法的一致性. 指出了文献中给出的级数展开迭代算法的不足之处.

关键词 人造卫星, 地球大气, 掩

中图分类号: P 128; 文献标识码: A

1 引言

1988 年, Yunck^[1] 首先提出 GPS/LEO 掩星探测地球大气技术理论, 并在 1995 年通过 GPS/MET 计划的 MicroLab1 实验卫星第一次得到论证^[2]. 自从 GPS/MET 实验成功以后, 丹麦在 1999 年 2 月、阿根廷与美国在 2000 年 6 月和德国在 2000 年 7 月又分别相继成功地发射了 Orsted、SAC-C 和 CHAMP 卫星, 它们成功地完成了用 GPS 掩星技术探测地球大气的研究任务. 新的 GPS/LEO 掩星计划, 如台湾和美国合作的 COSMIC 和欧共体的 ACE+, 都在积极准备之中. 在不久的将来, 全球将可望有 14 颗以上的卫星进行掩星观测, 它们每天可以有 7000 个以上的中性层和电离层的大气剖面.

MicroLab1 的观测数据已经成功地反演成温度、水汽、重力势高和电离层电子密度等剖面. 与欧洲中尺度天气预报中心 ECMWF (European Center for Medium Range Weather Forecasts) 的分析结果和临近的探空气球站的观测资料相比较, 在 5 km 到 30 km 之间, 其温度剖面精度好于 1.5 K, 高度的分辨率好于 1 km^[2-5]. 从 CHAMP 和 SAC-C 数据中也已经得到相似的结果^[6]. 与 ECMWF 比较, 掩星重力势高剖面精度大约在 20 gpm^[7], 湿度剖面平均精度达到 0.1 g/kg^[8]. 在电离层反演上, GPS/MET 数据能分析反演出在 E、F 区域的电子密度^[9], 与电离层探测仪比较, 电子密度峰值的精度在 20%(1- σ). 掩星数据在电离层和中性大气层探测、数值天气预报和气候学研究、大气折射场改进等领域中均具有很大的潜在价值^[9,10].

2003-07-18 收到原稿, 2003-12-14 收到修改稿

*CXJJ-97、国家自然科学基金(10073017)和中国科学院知识创新工程重要方向项目 KJ951-A1-01 资助

息, 我们得到观测方程:

$$\dot{L}_c = [\mu \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{T}]|_{\mathbf{R}_L} - [\mu \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{T}]|_{\mathbf{R}_G} - \dot{R}_{LG}, \quad (1)$$

其中, L_c 是中性大气层相位延迟的双频组合观测, \dot{L}_c 是它的时间导数; 我们也可以首先用相似的方法分别求得 L_1 和 L_2 的弯曲角序列以后, 再进行双频组合^[14]. 如图 1 所示, R_{LG} 是 LEO 和 GPS 卫星空间的几何距离, \dot{R}_{LG} 是它的时间微分, $\mu(R_L)$ 和 $\mu(R_G)$ 分别是 LEO 和 GPS 卫星轨道位置处的大气折射指数 (这儿可近似取成 1), \mathbf{T} 是沿信号传播轨迹上的单位切矢量, \mathbf{R}_L 和 \mathbf{R}_G 分别是 LEO 和 GPS 卫星的地心位置矢量, $\dot{\mathbf{R}}_L$ 和 $\dot{\mathbf{R}}_G$ 分别是 LEO 和 GPS 卫星轨道速度矢量.

2.1 圆轨道假设下弯曲角反演公式

GPS 卫星和 LEO 卫星的轨道偏心率都比较小, 在一级近似下, 可以将 GPS 和 LEO 卫星的轨道看成圆轨道来简化大气弯曲角的反演公式^[10]. 在圆轨道假设下, 卫星的运动速度只有切向分量, 而没有径向分量. 从方程 (1) 可以得到:

$$\dot{L}_c = \dot{\theta}_L \mathbf{R}_L \sin(\psi + \gamma) - \dot{\theta}_G \mathbf{R}_G \sin(\beta + \delta) - b \dot{\Theta}, \quad (2)$$

其中 $\dot{\theta}_L$ 和 $\dot{\theta}_G$ 分别是 LEO 和 GPS 卫星的角速率; $\dot{\Theta}$ 是 LEO 和 GPS 卫星相对地心的位置矢量的夹角的时间变化率

$$\dot{\Theta} = \dot{\theta}_L - \dot{\theta}_G. \quad (3)$$

b 为地心至 LEO 和 GPS 卫星联线的垂直距离

$$b = |\mathbf{R}_L| \sin(\psi) = |\mathbf{R}_G| \sin(\beta). \quad (4)$$

其他各角参量的定义如图 1 所示. 在球对称假设下, 由 Bouguer 公式得:

$$a = |\mathbf{R}_L| \sin(\varphi + \gamma) = |\mathbf{R}_G| \sin(\beta + \delta), \quad (5)$$

其中 a 是瞄准参数 (impact parameter).

从方程 (2)、(4) 和 (5) 可以推出

$$\dot{L}_c = \begin{cases} \mathbf{R}_L \dot{\Theta} [\sin(\psi + \gamma) - \sin \psi] \\ \mathbf{R}_G \dot{\Theta} [\sin(\beta + \delta) - \sin \beta] \end{cases}, \quad (6)$$

从中解得 γ 和 δ . 我们得到大气折射弯曲角 α :

$$\alpha = \gamma + \delta. \quad (7)$$

2.2 非圆轨道假设下弯曲角的迭代算法

在文 [11] 中给出了一种用牛顿迭代法解弯曲角:

$$\dot{L}_c = |\dot{\mathbf{R}}_L| \cos(\zeta - \psi - \gamma) - |\dot{\mathbf{R}}_G| \cos(\pi - \eta - \beta - \delta) - \dot{R}_{LG}. \quad (8)$$

$$a = |\mathbf{R}_L| \sin(\psi + \gamma) = |\mathbf{R}_G| \sin(\beta + \delta), \quad (9)$$

其中 ζ 是 LEO 卫星的位置矢量与速度矢量的夹角, η 是 GPS 卫星的位置矢量与速度矢量的夹角.

在上述牛顿迭代法的过程中, 可以令初始值 $\gamma_0 = 0, \delta_0 = 0$. 从方程 (8) 和 (9) 能迭代解出 γ, δ ; 再用方程 (7) 解得弯曲角 α .

3 非圆轨道假设下的一种较为直接的弯曲角迭代算法和它的收敛性证明

(1) 式也可以写成:

$$\dot{L}_c + \dot{R}_{LG} - (\mu(R_L)|\dot{\mathbf{R}}_L| \cos \varphi(a) - \mu(R_G)|\dot{\mathbf{R}}_G| \cos \chi(a)). \quad (10)$$

而相关的角变量关系为:

$$\varphi(a) = \zeta - \arcsin\left(\frac{a}{|\mathbf{R}_L|}\right), \quad \chi(a) = (\pi - \eta) - \arcsin\left(\frac{a}{|\mathbf{R}_G|}\right), \quad (11)$$

其中 ϕ 是入射光线与 LEO 卫星速度矢量的夹角, χ 是出射光线与 GPS 卫星速度矢量的夹角. $\mu(R_L), \mu(R_G)$ 分别是在 LEO 卫星和 GPS 卫星位置上的大气折射率 (可近似等于 1). 弯曲角 α 可表示为:

$$\alpha = \Theta - \arccos\left(\frac{a}{|\mathbf{R}_L|}\right) - \arccos\left(\frac{a}{|\mathbf{R}_G|}\right). \quad (12)$$

从方程 (11) 的两个等式中, 可以分别得到:

$$\cos \phi(a) = \frac{\sqrt{|\mathbf{R}_L|^2 - a^2}}{|\mathbf{R}_L|} \cos \zeta + \frac{a}{|\mathbf{R}_L|} \sin \zeta, \quad (13)$$

$$\cos \chi(a) = -\frac{\sqrt{|\mathbf{R}_G|^2 - a^2}}{|\mathbf{R}_G|} \cos(\eta) + \frac{a}{|\mathbf{R}_G|} \sin \eta, \quad (14)$$

将 (13) 和 (14) 式代入方程 (10), 化简后可以得到瞄准参数的迭代公式:

$$a = \frac{\dot{L}_c + \dot{R}_{LG} - \frac{|\dot{\mathbf{R}}_L|}{|\mathbf{R}_L|} \sqrt{|\mathbf{R}_L|^2 - a^2} \cos \zeta - \frac{|\dot{\mathbf{R}}_G|}{|\mathbf{R}_G|} \sqrt{|\mathbf{R}_G|^2 - a^2} \cos \eta}{\frac{|\dot{\mathbf{R}}_L|}{|\mathbf{R}_L|} \sin \zeta - \frac{|\dot{\mathbf{R}}_G|}{|\mathbf{R}_G|} \sin \eta}. \quad (15)$$

从上式中解出瞄准参数以后, 代入方程 (12) 即可建立大气弯曲角序列. 函数方程 (15) 求解的数值方法有四次方程的公式解、二分法、以及迭代法; 其中以迭代法最为简洁、快速. 根据函数方程 (15), 直接迭代过程为:

$$\begin{aligned} a_0 &= r_0, \\ a_{k+1} &= f(a_k), \\ f(a) &= \frac{\dot{L}_c + \dot{R}_{LG} - \frac{|\dot{\mathbf{R}}_L|}{|\mathbf{R}_L|} \sqrt{|\mathbf{R}_L|^2 - a^2} \cos \zeta - \frac{|\dot{\mathbf{R}}_G|}{|\mathbf{R}_G|} \sqrt{|\mathbf{R}_G|^2 - a^2} \cos \eta}{\frac{|\dot{\mathbf{R}}_L|}{|\mathbf{R}_L|} \sin \zeta - \frac{|\dot{\mathbf{R}}_G|}{|\mathbf{R}_G|} \sin \eta}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中初始值 r_0 可以取为地球半径 +70 km (在求瞄准参数序列中, 为了加快收敛速度, 初始值可以为上一次计算结果).

在数学上, 迭代法可能存在一个初值的收敛半径问题. 以下我们将证明方程 (16) 迭代过程的收敛性. 对方程 (16) 取瞄准参数 a 的导数, 得到:

$$\frac{df}{da} = \frac{2a \frac{|\dot{\mathbf{R}}_L|}{|\mathbf{R}_L| \sqrt{|\mathbf{R}_L|^2 - a^2}} \cos \zeta + 2a \frac{|\dot{\mathbf{R}}_G|}{|\mathbf{R}_G| \sqrt{|\mathbf{R}_G|^2 - a^2}} \cos \eta}{\frac{|\dot{\mathbf{R}}_L|}{|\mathbf{R}_L|} \sin \zeta - \frac{|\dot{\mathbf{R}}_G|}{|\mathbf{R}_G|} \sin \eta}. \quad (17)$$

对于 LEO 和 GPS 卫星, 我们一般有 $\frac{|\dot{\mathbf{R}}_L|}{|\mathbf{R}_L|} \approx 6 \frac{|\dot{\mathbf{R}}_G|}{|\mathbf{R}_G|}$, $\zeta, \eta \approx \frac{\pi}{2}$ 和 $\sin \zeta, \sin \eta \approx 1$. 所以:

$$\left| \frac{|\dot{\mathbf{R}}_L|}{|\mathbf{R}_L|} \sin \zeta - \frac{|\dot{\mathbf{R}}_G|}{|\mathbf{R}_G|} \sin \eta \right| > \frac{1}{2} \left(\frac{|\dot{\mathbf{R}}_L|}{|\mathbf{R}_L|} \sin \zeta + \frac{|\dot{\mathbf{R}}_G|}{|\mathbf{R}_G|} \sin \eta \right). \quad (18)$$

因此:

$$\left| \frac{df}{da} \right| < 4 \left| \frac{a \cos \zeta \frac{|\dot{\mathbf{R}}_L|}{|\mathbf{R}_L| \sqrt{|\mathbf{R}_L|^2 - a^2}} + a \cos \eta \frac{|\dot{\mathbf{R}}_G|}{|\mathbf{R}_G| \sqrt{|\mathbf{R}_G|^2 - a^2}}}{\frac{|\dot{\mathbf{R}}_L|}{|\mathbf{R}_L|} \sin \zeta + \frac{|\dot{\mathbf{R}}_G|}{|\mathbf{R}_G|} \sin \eta} \right|. \quad (19)$$

引理: 如果 c 、 d 都大于零, 那么:

$$\left| \frac{a+b}{c+d} \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{a}{c} \right|, \left| \frac{b}{d} \right| \right\}. \quad (20)$$

将引理用于 (19) 式, 可得:

$$\left| \frac{df}{da} \right| \leq \max \left\{ 4 \left| \frac{a}{\sqrt{|\mathbf{R}_L|^2 - a^2}} \cot(\zeta) \right|, 4 \left| \frac{a}{\sqrt{|\mathbf{R}_G|^2 - a^2}} \cot(\eta) \right| \right\}. \quad (21)$$

LEO 和 GPS 卫星的径向速度和切向速度比分别约为 1:1000 和 1:100, 即 $\cot(\zeta)$ 和 $\cot(\eta)$ 约为 0.001 和 0.01, LEO 卫星高度在 400 km 以上 (Microlab1 卫星高度约为 730 km, CHAMP 卫星高度约为 450 km), GPS 卫星高度约为 20200 km, 而 a 的值取在距离地面 120 km 高

度到地面零高度之间各高度点的地心距, 地球半径取 6371 km, 即 $6491 \text{ km} > a > 6371 \text{ km}$. 因此:

$$\frac{a}{\sqrt{|R_L|^2 - a^2}} < 3.3, \quad \frac{a}{\sqrt{|R_G|^2 - a^2}} < 0.25,$$

即:

$$\left| \frac{a}{\sqrt{|R_L|^2 - a^2}} \cot(\zeta) \right| < 0.0033, \quad \text{和} \quad \left| \frac{a}{\sqrt{|R_G|^2 - a^2}} \cot(\eta) \right| < 0.0025.$$

把上述结果代入 (21) 式, 得到:

$$\left| \frac{df}{da} \right| < 1.$$

这证明 (17) 式的非圆轨道改正的迭代过程是收敛的.

图 1 只是发生掩星时 LEO 和 GPS 卫星的几何构形之一 (LEO 卫星下降和 GPS 卫星上升). 另外还应该有其他 3 种情况 (LEO 卫星下降和 GPS 卫星下降; LEO 卫星上升和 GPS 卫星上升; LEO 卫星上升和 GPS 卫星上升). 下面给出卫星相对运动几何构造的判定方法.

若 $\dot{R}_L \cdot (R_G - R_L) < 0$, 那么 LEO 卫星下降, $\varphi(a) = \zeta - \arcsin\left(\frac{a}{|R_L|}\right)$;

若 $\dot{R}_L \cdot (R_G - R_L) > 0$, 那么 LEO 卫星上升, $\varphi(a) = (\pi - \zeta) - \arcsin\left(\frac{a}{|R_L|}\right)$;

若 $\dot{R}_G \cdot (R_L - R_G) < 0$, 那么 GPS 卫星下降, $\chi(a) = \eta - \arcsin\left(\frac{a}{|R_G|}\right)$;

若 $\dot{R}_G \cdot (R_L - R_G) > 0$, 那么 GPS 卫星上升, $\chi(a) = (\pi - \eta) - \arcsin\left(\frac{a}{|R_G|}\right)$.

同样我们可以分别给出其他 3 种几何构形的迭代公式和收敛性证明, 这里不再描述.

4 非圆轨道的级数展开解

文 [12] 提出了一种在迭代法基础上的非圆轨道级数展开法改正公式. 展开公式见文 [12] 的方程 (5) 和 (6). 但是, 他的公式仅适用于 LEO 卫星下降和 GPS 卫星上升的几何构形. 必须注意在其他几何构形下, 文 [12] 的方程 (5) 中的 $\Delta\delta$ 和方程 (6) 中的 $\Delta\gamma$ 的定义.

5 模拟资料的处理和分析

我们利用上海天文台 GPS/LEO 掩星反演地球大气模拟软件 (SHAOOS) 模拟观测数据 [15]. 在设定的地球大气折射指数剖面下, 在已知 GPS 和 LEO 卫星的精密星历以后, 一方面可以通过大气折射场用路径积分的方法模拟计算信号时延和弯曲角序列; 另一方面通过模拟得到的时延序列和卫星状态信息反演地球大气弯曲角序列 (同时可以比较不同非圆轨道改正方法对弯曲角序列的影响), 再用 Abel 积分重构大气折射指数剖面. 我们可以把反演得到的大气折射场与原先设定的场进行分析和比较, 分析圆轨道假设引入的

模型误差, 并验证在非圆轨道条件下 3 种迭代方法的一致性. 在模拟数据中我们不加入电离层延迟量, 地球大气模型满足局部球对称假设, 从而减少其他的引入误差.

在我们的模拟计算中, 采用 CHAMP 掩星资料中提供的 GPS 卫星与 LEO 卫星的星历来模拟信号传播路径, 大气折射率 (refractivity) 参数 N_t (视为真值) 来自 CHAMP 掩星资料处理后的数据产品. 从信号路径积分计算的大气延迟, 通过本文讨论的反演方法和 Abel 积分, 反演得到大气折射率剖面 N_c (视为计算值). 再将大气折射率的计算值与其真值进行对比和误差分析. 我们使用的路径积分方法是 Snell 定律和打靶法^[15].

定义大气折射率的相对误差为:

$$N_{\text{bias}} = \frac{N_c - N_t}{N_t}, \quad (22)$$

而: $N = (\mu - 1) \times 10^6$. 在对比计算中, 所有的资料都内插到同一高度序列上.

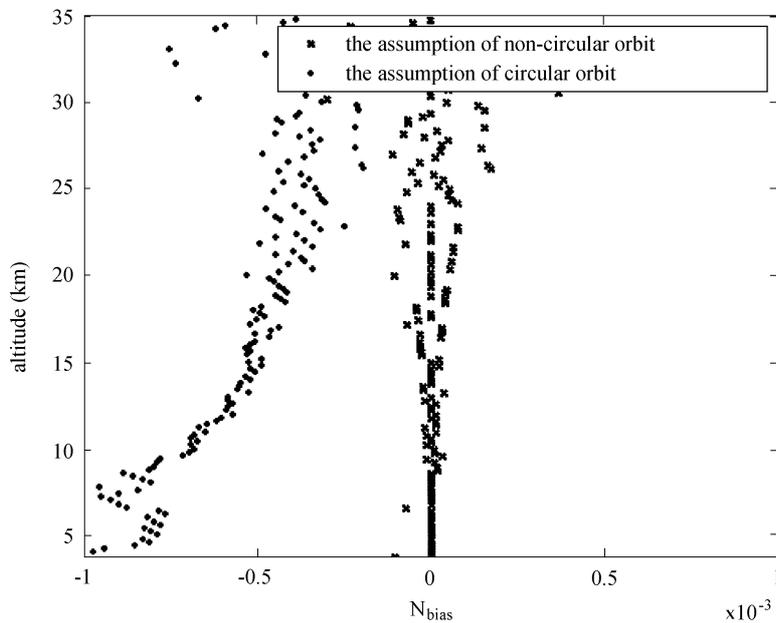


图 2 在两种假设下反演大气折射率相对误差 N_{bias} 的模拟计算结果

Fig. 2 Retrieved N_{bias} from simulated calculation under circular and non-circular assumptions

我们分别用圆轨道假设下的弯曲角计算公式和本文提出的非圆轨道不同假设下弯曲角迭代算法反演大气折射率剖面, 再用 (22) 式计算它们的相对误差, 结果见图 2. 在图 2 中符号 “*” 表示在非圆轨道条件下反演大气折射率相对误差的结果; 符号 “.” 表示在圆轨道假设下反演大气折射率相对误差的结果. 从图 2 我们可以看出: 在模拟掩星事件中, 高度 35 km 到 10 km 之间, 圆轨道假设引入的大气折射率的相对误差只在 ± 0.0002 至 ± 0.001 之间. 在高度 10 km 以下的范围内, 大气折射率的相对误差大致保持在 $\pm 0.0008 \sim \pm 0.001$ (圆轨道假设下的结果都偏小). 在上部大气中, 相对误差的大小大约随高度的下降而上升 (在

30 km 以上, 因为信噪比较小而呈现较大的弥散性); 在 5 到 10 km 的高度及以下高度, 保持在 0.1% 的范围内摆动. 其物理解释还需要进一步研究.

在非圆轨道条件下, 我们还分别用本文讨论的 3 种不同的迭代方法, 来重构大气折射率剖面, 并计算它们的相对误差. 计算结果表明, 在同一高度上, 他们的大气折射率相对误差是符合的, 从而用数值方法证实他们的收敛性也是一致的. 但是, 本文所提出的方法具有最直接的计算过程.

6 结论

(1) 综述了 GPS/LEO 掩星探测地球大气技术中非圆轨道改正对反演结果的影响, 以及讨论和分析了几种迭代模型, 指出了文 [12] 模型中的不足之处;

(2) 推导了一种最为简洁的非圆轨道改正的迭代方法, 它可能达到优化计算模型的目的. 并在理论上严格证明了这种迭代方法的收敛性;

(3) 通过模拟程序, 分别计算在圆轨道和非圆轨道假设下的大气折射率剖面, 并将它们与真值进行比较, 来定量估算卫星圆轨道假设对 GPS/LEO 掩星计算反演地球大气参数的误差. 结果表明, 它在低层大气中能达到 0.1% 左右;

(4) 用模拟程序验证了 3 种迭代方法的一致性;

(5) 从模拟计算的对比中, 如图 2 所示, 我们发现圆轨道假设引入的大气折射指数误差随高度的下降而变大; 尤其在低层大气反演中, 圆轨道假设引入的模型误差可能影响到对其他地球大气参数 (温度、气压、湿度等) 的精度.

参 考 文 献

- 1 Yunck T P, Lindal G F, Liu C H. The role of GPS in precise earth observation. In: Proceedings of IEEE Positioning Location and Navigation Symposium (PLANS 88). Orlando, Florida. Nov.29-Dec.2, 1988. 251
- 2 Ware R M, Exner D, Feng M, et al. Bull of the American Meteorological Society, 1996, 77: 19
- 3 Kursinski E R, Hajj G A, Bertiger W I, et al. Science, 1996, 271: 1107
- 4 Rocken C, Anthes R, Exner M, et al. J of Geophys Res, 1997, 102(D25): 29849
- 5 Kursinski E R, Hajj G A, Schofield T, et al. J of Geophys Res, 1997, 102(D19): 23429
- 6 Wickert J, Reigber C, Beyerle. Geophysical Research Letters, 2001, 28 (17): 3263
- 7 Leroy S S. J of Geophys Res, 1997, 102: 6971
- 8 Kursinski E R, Hajj G A. J of Geophys Res, 2001, 106, D(1): 1113
- 9 Hajj G A, Romans L J. Radio Sciences, 1998, 33: 175
- 10 Melbourne W G, Davis E S, Duncan C B, et al. The Application of Spaceborne GPS to Atmospheric Limb Sounding and Global Change Monitoring, JPL publication 94-8, Pasadena: JPL California institute of Technology, 1994
- 11 Hajj G A, Kursinski E R, Romans L J, et al. Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, 2002, 64: 451
- 12 JIANG Hu. AcASn, 2001, 42(3): 243 (蒋虎. 天文学报, 2001, 42(3): 243) (=JIANG Hu. ChA&A, 2002, 26(1): 64)
- 13 Høeg P, Larsen G B, Benzon H H, et al. DMI Science Report 1998-7, Copenhagen: DMI, 1998
- 14 Vorob'ev V V, Krasil'nikova T G. Physics of Atmosphere and Ocean, 1994, 29: 602

15 郭鹏, 洪振杰, 严豪健, 等. 上海天文台年刊, 2003, 24: 148

Discussion on Algorithms of the Earth's Atmospheric Retrieval from Occultation of Non-circular Orbit GPS/LEO Satellites

GUO Peng¹ CAI Feng-jing² HONG Zhen-jie² YAN Hao-jian¹ LIU Min¹

(1 *Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030*)

(2 *School of Mathematics & Information Science, Wenzhou Normal College, Wenzhou, Zhejiang 325027*)

ABSTRACT On the assumption of non-circular orbit for satellites GPS and LEO, a more direct iteration algorithm of atmospheric bending angles was given in GPS/LEO occultation technique probing Earth's atmosphere. A mathematical proof of the convergence of this iteration method was listed. By means of the GPS occultation simulation software package SHAOOS, the influences of assumption of circular orbit GPS/LEO satellites on retrieved atmospheric profiles were estimated quantitatively, and to verify the coincidence between different iteration processes was also presented numerically. Some corrections to the series expansion method of non-circular orbit GPS/LEO occultation retrieval introduced in a reference were briefly attached.

Key words artificial satellites, earth atmosphere, occultation