

◇ 2018 年度全国检测声学会议优秀论文 ◇

一维 Marchenko 自聚焦算法的数值解与解析解*

胥利文^{1,2,3} 陈浩^{1,2,3†} 张秀梅^{1,3} 王秀明^{1,2,3}

(1 中国科学院声学研究所 北京 100190)

(2 中国科学院大学 北京 100049)

(3 北京市海洋深部钻探测量工程技术中心 北京 100190)

摘要 Marchenko 自聚焦算法可以构造介质表面到介质内任一点的格林波场, 这种算法仅仅需要边界上单边记录的反射响应和介质内任一点到介质表面的直达波数据。为了研究算法构造期望波场的具体过程, 该文分别在数值解和解析解模型中求解耦合 Marchenko 方程组, 利用解析解模型中的序列构造解释数值解中波形产生的具体原因。方程求解过程主要包括一维时域卷积和利用时间窗算子的截断效应求取聚焦函数和格林函数, 其中卷积过程可以解释为利用聚焦函数来调制单边记录的波场相位。

关键词 Marchenko 方程, 卷积, 相位调制, 解析解

中图分类号: O429

文献标识码: A

文章编号: 1000-310X(2019)05-0757-10

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2019.05.001

Numerical and analytical solution of one-dimensional Marchenko auto-focusing algorithm

XU Liwen^{1,2,3} CHEN Hao^{1,2,3} ZHANG Xiumei^{1,3} WANG Xiuming^{1,2,3}

(1 *Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

(2 *University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

(3 *Beijing Engineering Research Center of Sea Deep Drilling and Exploration, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

Abstract The Marchenko auto-focusing algorithm can reconstruct the Green's wave-field from the surface to a subsurface point of the medium, it only requires the single-sided surface reflection and direct wave from a point source in the medium to the surface. In order to study the specific process of constructing the desired wave-field by this algorithm, the coupled Marchenko equations are solved in the numerical and analytical model respectively, and the series in the analytical model is used to explain the causes of the waveform generation in the numerical solution. The process mainly includes one-dimensional time-domain convolution and the use of the truncation effect of the time window operator to obtain the focusing function and the Green's function. The convolution process can be interpreted as the use of the focusing function to modulate the phase of the recorded wave-field.

Key words Marchenko equation, Convolution, Phase modulation, Analytical solution

2018-11-09 收稿; 2019-07-16 定稿

*国家自然科学基金项目 (11574347, 11734017, 91630309, 41274134)

作者简介: 胥利文 (1990-), 男, 甘肃陇南人, 博士研究生, 研究方向: 声波干涉算法。

† 通讯作者 E-mail: chh@mail.ioa.ac.cn

0 引言

波动方程逆散射问题的研究是声波在固体介质中传播和成像理论的重要研究内容。一维波动方程逆散射问题的经典解之一就是 Marchenko 方程^[1], 它将介质边界上单边记录的波场响应和来自于介质内部声源的散射响应通过积分耦合, 可以用来反演介质内部的构造。最近, Brogini 等^[2]展示了在不需要知道介质信息的情况下, 利用单边记录的反射响应重构介质中虚拟点源的格林函数。Wapenaar 等^[3]通过引入波场的因果性条件, 将上述方法推广到多维介质中。van der Neut 等^[4]提出多维互相关理论, 解释了如何通过波场迭代求解多维 Marchenko 方程。Cui 等^[5]将方程求解过程中定义的聚焦函数解释为边界源在负时刻的入射波场, 分析了基于初始聚焦函数求取单程格林函数过程中幅度对结果的影响。除应用在弹性介质中, Marchenko 自聚焦方法还可用于复杂的黏弹性介质成像中^[6-7]。

本文主要研究在一维介质中, 介质表面到介质内任一点之间的格林场是如何通过耦合 Marchenko 方程组求解得到的, 首先解释了如何利用单程波场的互易原理推导耦合 Marchenko 方程组; 接着基于波场的因果性, 设计时间窗算子迭代求解聚焦函数, 并利用聚焦函数求解期望的格林函数; 然后在求解过程中引入卷积理论, 分别在数值解和解析解模型中计算期望的格林函数; 最后基于解析解分析数值解中各个波形序列构造的具体过程。

1 Marchenko 方程

本文将声学介质限制在一维状态, 模型如图 1 所示, 蓝实线表示声速, 红虚线表示密度, 位于介质

表面的黑色五角星和倒三角形分别表示声源和接收器, 在深度 $z=900$ m 处的红色五角星表示介质中的虚拟点源, 也是下文所述的聚焦函数的聚焦点。其中图 1(a) 为状态 B, 代表实际介质; 图 1(b) 为状态 A, 表示参考介质。两种介质的不同之处在于参考介质中用红色五角星表示的声源下方是均匀介质, 声波入射之后无反射, 相当于实际介质的截断版本。在两种状态下, 对于两个在时间轴上正向传播的波场, 可以通过卷积型互易原理联系^[8]:

$$\int_{\partial z_0} (p_A^+ p_B^- - p_A^- p_B^+) d^2 x = \int_{\partial z_i} (p_A^+ p_B^- - p_A^- p_B^+) d^2 x_i, \quad (1)$$

对于时间轴上正向传播的波场和反向传播的波场, 通过相关型互易原理联系^[8]:

$$\int_{\partial z_0} (p_A^+ (p_B^+)^H - p_A^- (p_B^-)^H) d^2 x = \int_{\partial z_i} (p_A^+ (p_B^+)^H - p_A^- (p_B^+)^H) d^2 x_i, \quad (2)$$

式(1)~(2)中, p_A 和 p_B 分别是两种介质中记录的波场, “+”表示声波朝深度增加的方向传播, “-”表示声波朝深度减小的方向传播, 本文分别用它们表示下行和上行的单程波场, $()^H$ 为复共轭。等式(1)和等式(2)的左边积分区域是沿着介质表面 ∂z_0 ($z=0$ m) 积分, 右边是沿着定义的聚焦平面 ∂z_i ($z=900$ m) 积分。

在状态 A 中的介质表面上方, 如果布置一个向深度方向发射声波的脉冲点声源, 则介质表面记录的下行波场为 $p_A^+ = \delta(x - x_0)$, 其中 x_0 是声源的水平坐标位置, 在本文所示的一维介质中 $x_0 = 0$, 因此 $p_A^+ = \delta(x)$ 。同时介质表面也会记录来自于介质内部的反射响应, 即上行波场 $p_A^- = R_A(z_0, z_0, t)$ 。

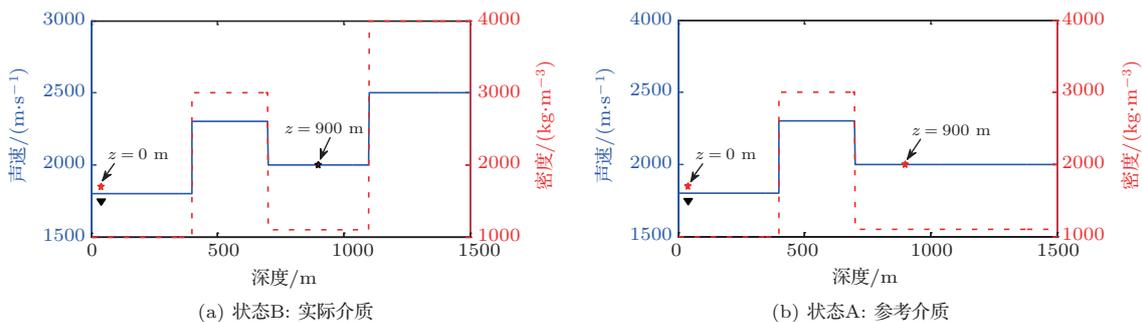


图 1 1D 数值解模型

Fig. 1 1D numerical model

在定义的聚焦点 $z = 900 \text{ m}$ 处记录的下行波场是参考介质的透射响应 $p_A^+ = T_A(z_s, z_0, t)$, 同时因为在聚焦点下方是均匀介质, 无反射波, 因此聚焦点处记录的上行波场为 0, 即 $p_A^- = 0$ 。

同理, 在状态 B 中的介质表面上方, 也布置一个向深度方向发射声波的点声源, 则介质表面记录的下行波场为 $p_B^+ = \delta(x)$, 上行波场是实际介质的反射响应, 即 $p_B^- = R(z_0, z_0, t)$ 。在聚焦点处, 可以将记录的全波场 $G(z_s, z_0, t)$, 分解为上行波场 $p_B^- = G^-(z_s, z_0, t)$ 和下行波场 $p_B^+ = G^+(z_s, z_0, t)$, 即 $G = G^+ + G^-$ 。上述两种状态中的表达式 $R(z_0, z_0, t)$ 、 $T(z_s, z_0, t)$ 和 $G(z_s, z_0, t)$, 括号中的第一项表示接收器, 第二项表示声源, 都表示声源发射、接收器接收的波场响应。

状态 A 中参考介质的透射响应 $T_A(z_s, z_0, t)$ 和反射响应 $R_A(z_0, z_0, t)$ 是未知的, 在状态 A 中定义一种新的函数: 聚焦函数 $f_1(z_0, z_s, t)$, 它的下行分量 $f_1^+(z_0, z_s, t)$ 被定义为透射响应的时反, 表示从介质表面 z_0 发射声波, 聚焦于点 z_s 处, 所以可以将公式中的透射响应 $T_A(z_s, z_0, t)$ 的时反用下行聚焦函数代替。同理定义聚焦函数的上行分量 $f_1^-(z_0, z_s, t)$, 表示聚焦点在 z_s 处的向外扩散的波场, 它是聚焦函数的下行分量通过参考介质表面反射序列得到的响应, 所以将推导过程中的中间变量 $R_A(z_0, z_0, t) f_1^+(z_0, z_s, t)$ 用 $f_1^-(z_0, z_s, t)$ 代替。聚焦函数表达式中的第二项 z_s 表示此函数的聚焦点, 这两种聚焦函数的定义会方便后续的求解过程。

将上述不同状态、不同位置处记录的波场分量代入等式 (1) 和等式 (2), 可以将“状态 B”中深度为 0 m 处记录的反射响应 $R(z_0, z_0, t)$ 和深度为 900 m 处的接收器接收的介质表面声源发射的单程格林函数 $G^\pm(z_s, z_0, t)$, 通过定义在“状态 A”中的聚焦函数 $f_1^\pm(z_0, z_s, t)$ 联系起来。因为本文将方程求解过程限制在一维介质, 所以得到一维时域耦合 Marchenko 方程^[3-5]:

$$G^-(z_s, z_0, t) = R(z_0, z_0, t) * f_1^+(z_0, z_s, t) - f_1^-(z_0, z_s, t), \quad (3)$$

$$G^+(z_s, z_0, t) = -R(z_0, z_0, t) * f_1^-(z_0, z_s, -t) + f_1^+(z_0, z_s, -t), \quad (4)$$

其中, “*”表示卷积, $f_1^\pm(z_0, z_s, t)$ 表示聚焦于深度为 z_s 处的聚焦函数, $G^\pm(z_s, z_0, t)$ 为声源位于

z_0 、在 z_s 处接收的格林函数。为了书写方便, 下文将 $G^+(z_s, z_0, t)$ 、 $G^-(z_s, z_0, t)$ 、 $f_1^+(z_0, z_s, t)$ 、 $f_1^-(z_0, z_s, t)$ 和 $R(z_0, z_0, t)$ 分别简写为 G^+ 、 G^- 、 f_1^+ 、 f_1^- 和 R 。Marchenko 耦合方程组 (3) 和方程组 (4) 是欠定的, 两个方程, 四个未知数: G^+ 、 G^- 、 f_1^+ 、 f_1^- , 接下来将首先展示如何利用实际介质中的反射响应求取两个定义在参考介质中的聚焦函数。

2 聚焦函数重构

位于 $z_s = 900 \text{ m}$ 处的脉冲点源激发的波场直达波将会在 $t = t_d$ (直达波传输时) 到达介质表面 $z_0 = 0 \text{ m}$ 处的接收器, 即格林函数中的所有序列将会在 $t \geq t_d$ 出现在接收记录中。在 $t < t_d$ 时, 位于 z_0 处的接收器不能接收到波场信息。依据波场的因果性, 引进完全去除直达波和尾波的时间窗算子 $\theta\{\cdot\}$, 算子分别作用于等式 (3) 和等式 (4) 两端, 所以等式左边 $\theta\{G^+(t)\} = 0$ 和 $\theta\{G^-(t)\} = 0$ 。

依据上文和 van der Neut 等^[4]关于聚焦函数的分析, 下行聚焦函数 $f_1^-(t)$ 是参考介质透射响应的时反波场, 它由 $-t_d$ 时刻的首波 f_{1d}^+ 和在 $-t_d$ 与 t_d 之间的尾波序列 f_{1m}^+ 构成, 将时间窗算子应用于下行聚焦函数 $f_1^-(t)$ 可以得到

$$\theta\{f_1^-(t)\} = \theta\{f_{1d}^+(t) + f_{1m}^+(t)\} = f_{1m}^+(t). \quad (5)$$

而上行聚焦函数是在 $-t_d$ 与 t_d 之间的波场, 加窗后为

$$\theta\{f_1^+(t)\} = f_1^-(t). \quad (6)$$

因此, 对于耦合 Marchenko 方程组 (3) 和方程组 (4), 将时间窗算子作用于等式两边最终可以得到

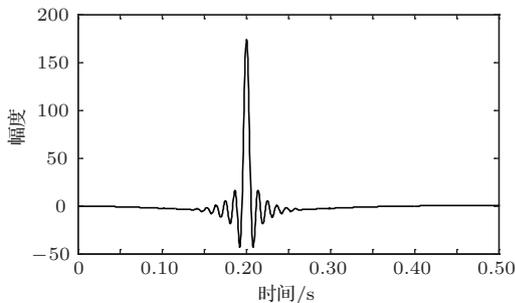
$$\theta\{R(t) * f_1^+(t)\} = \theta\{R(t) * [f_{1d}^+(t) + f_{1m}^+(t)]\} = f_1^-(t), \quad (7)$$

$$\theta\{R(t) * f_1^-(t)\} = f_{1m}^+(t). \quad (8)$$

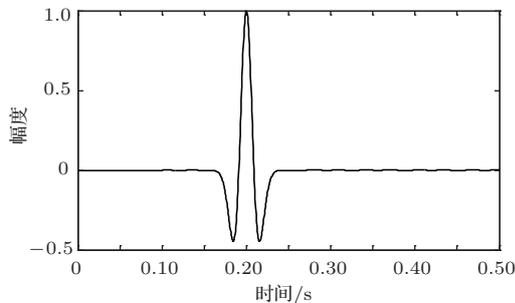
为了求解聚焦函数 $f_1^+(t)$ 和 $f_1^-(t)$, 将介质中虚拟点源到介质表面的直达波的时反波场作为初始的下行聚焦函数 $f_{1d}^+(t)$, 同时假定 $f_{1m}^+(t)$ 的初始值为 0。将接收的反射响应 $R(t)$ 和初始聚焦函数 $f_{1d}^+(t)$ 的估计代入等式 (7), 可以得到 $f_1^-(t)$ 的首次更新, 然后将 $f_1^-(t)$ 代入等式 (8), 得到 $f_{1m}^+(t)$ 的第一次更新值。接着, 将第一次迭代求得的 $f_{1m}^+(t)$ 与 $f_{1d}^+(t)$ 求和, 可以得到 $f_1^+(t)$ 的全波场, 再代入等式 (7) 就可以得到 $f_1^-(t)$ 的第二次估计, 然后再代入

等式(8)得到 $f_{1m}^+(t)$ 的第二次更新, 就这样依次进行迭代求解, 直到聚焦函数收敛且达到稳定状态。

假定图1(a)所展示的数值解模型是无损的, 且不考虑自由表面多次波的影响, 利用时域有限差分算法^[9]正演模拟反射响应 $R(t)$ 和初始聚焦函数 $f_{1d}^+(t)$ 。数值求解 Marchenko 方程时, 反射响应 $R(z_0, z_0, t)$ 需要子波反卷积, 这里采用宽带零相位子波作为声源^[10], 避免子波反卷积对反射响应造成的误差影响, 而且较宽的频带将不会在时域上产生较长的时宽, 子波时域图如图2(a)所示。初始聚焦函数可由宏观速度模型计算^[3], 这里直接运用图1(a)的参考介质正演。模拟初始聚焦函数的源子波设置为中心频率为 25 Hz 的雷克子波, 子波时域图如图2(b)所示。



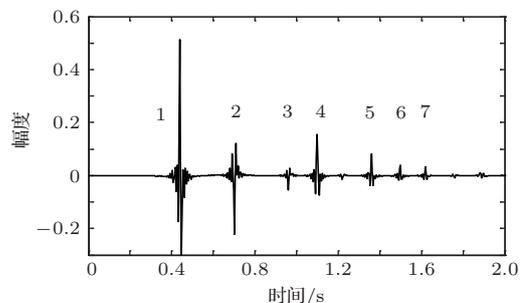
(a) 模拟 R 的子波



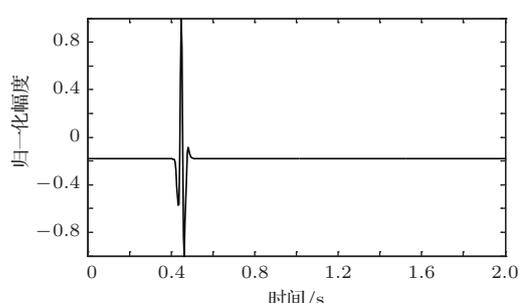
(b) 虚拟源子波

图2 模拟反射响应 R 和初始聚焦函数的源子波
Fig. 2 Source wavelet for simulating the reflection response R and the initial focus function

图3展示了得到的介质表面记录反射响应和直达波, 它们将作为迭代求解 Marchenko 方程的初始输入数据。通过分析图3(a)中反射响应的记录和一维介质的分层信息, 得到图4中的多次波序列解析解模型, 图4中从左到右的彩色箭头分别表示图3(a)中的前七个波序列。对于文中的一维模型, z_i 表示深度, 下标 $i = 0, 1, 2, \dots$ 对应1D模型的深度, 其中 z_0 是接收面, t_1, t_2, t_3, t_4 分别代表声波在各层的单程传输时, $r_{01}, r_{12}, r_{23}, r_{34}, r_{45}$ 和 $\tau_{01}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{34}, \tau_{45}$ 分别是按深度增加方向的各层的反射系数和透射系数, $r_{54}, r_{43}, r_{32}, r_{21}, r_{10}$ 和 $\tau_{54}, \tau_{43}, \tau_{32}, \tau_{21}, \tau_{10}$ 分别是按深度减小方向的各层的反射系数和透射系数。



(a) 记录的反射响应



(b) 记录的初始聚焦函数

图3 迭代求解的初始输入

Fig. 3 Initial input of iterative solution

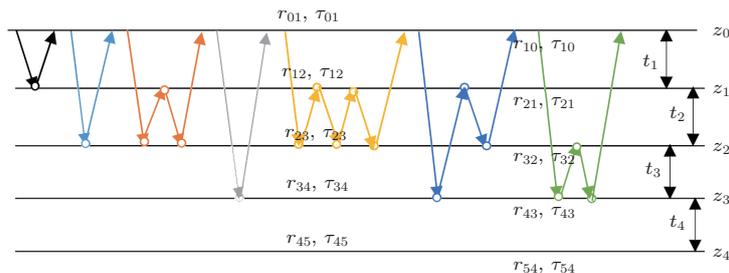


图4 1D解析解模型

Fig. 4 1D analytical model

图1(a)中的数值解模型中表面记录的反射响应可以展开为图4解析解模型中各个序列的和,

$$\begin{aligned}
 R(z_0, z_0, t) &= r_{12}\delta(t-2t_1) + \tau_{12}\tau_{21}r_{23}\delta(t-2t_1-2t_2) \\
 &+ \tau_{12}\tau_{21}r_{21}r_{23}^2\delta(t-2t_1-4t_2) \\
 &+ \tau_{12}\tau_{21}\tau_{23}\tau_{32}\tau_{21}r_{34}\delta(t-2t_1-2t_2-2t_3) \\
 &+ \tau_{12}\tau_{21}r_{23}^3r_{21}^2\delta(t-2t_1-6t_2) \\
 &+ \tau_{12}\tau_{23}\tau_{32}\tau_{21}r_{34}r_{21}r_{23}\delta(t-2t_1-4t_2-2t_3) \\
 &+ \tau_{12}\tau_{23}\tau_{21}\tau_{32}r_{34}^2r_{32}\delta(t-2t_1-2t_2-4t_3) \\
 &+ \dots \quad (9)
 \end{aligned}$$

为了更清晰地展示反射响应中各个序列幅度对合成波场的影响,将等式(9)中用反射系数和透射系数表示的各个序列幅度用 R_{A_i} ($i=1,2,3,\dots$) 表示,即

$$\begin{aligned}
 R(z_0, z_0, t) &= R_{A1}\delta(t-2t_1) + R_{A2}\delta(t-2t_1-2t_2) \\
 &+ R_{A3}\delta(t-2t_1-4t_2) \\
 &+ R_{A4}\delta(t-2t_1-2t_2-2t_3) \\
 &+ R_{A5}\delta(t-2t_1-6t_2) \\
 &+ R_{A6}\delta(t-2t_1-4t_2-2t_3) \\
 &+ R_{A7}\delta(t-2t_1-2t_2-4t_3) + \dots \quad (10)
 \end{aligned}$$

聚焦点位于深度 z_2 和 z_3 的中心处,聚焦点到表面接收点的直达波可以表示为

$$D(z_0, z_s, t) = \tau_{21}\tau_{32}\delta\left(t - \frac{1}{2}t_3 - t_2 - t_1\right),$$

依据上文的解释,将直达波的时反序列作为初始聚焦函数 f_{1d}^+ , 即:

$$\begin{aligned}
 f_{1d}^+(z_0, z_s, t) &= \tau_{21}\tau_{32}\delta\left(t + t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) \\
 &= f_{1dA}^+\delta\left(t + t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3\right),
 \end{aligned}$$

幅度 $\tau_{21}\tau_{32}$ 用 f_{1dA}^+ 表示。

第一次迭代,将反射响应和初始聚焦函数代入等式(7)可以求得 $f_1^-(t)$, 这个步骤相当于将反射响应沿着时间轴逆向移动直达波的到来,即移动 $t = t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3$ 相位,加时间窗算子 $\theta\{\cdot\}$ 后可得到这两个序列构造的 $f_1^-(t)$:

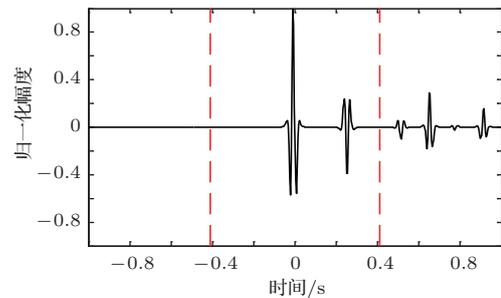
$$\begin{aligned}
 f_1^-(t) &= R_{A1}f_{1dA}^+\delta\left(t - t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) \\
 &+ R_{A2}f_{1dA}^+\delta\left(t - t_1 - t_2 + \frac{1}{2}t_3\right). \quad (11)
 \end{aligned}$$

由等式(11)得到的 $f_1^-(t)$ 有两个序列,幅度分别为 $R_{A1}f_{1dA}^+$ 和 $R_{A2}f_{1dA}^+$, 因为声波透射系数恒为正,依据图1(a)模型中各层的声阻抗的值,可得 $R_{A1}f_{1dA}^+ > 0$ 和 $R_{A2}f_{1dA}^+ < 0$, 可知 $f_1^-(t)$ 中两个序列的幅值一正一负。接着,将 $f_1^-(t)$ 时反后代入等式(8),相当于反射响应分别与 $f_1^-(t)$ 中的两个序列分别卷积(相移)再求和,加窗后可得

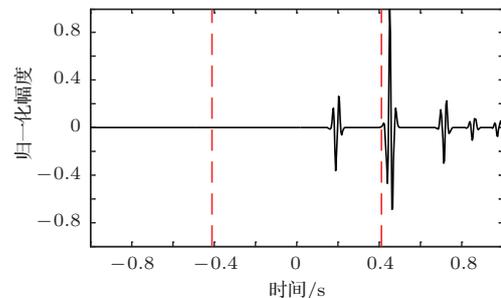
$$f_{1m}^+(-t) = R_{A1}R_{A2}f_{1dA}^+\delta\left(t - t_1 + t_2 - \frac{1}{2}t_3\right). \quad (12)$$

本模型中,通过计算可以发现 $f_{1m}^+(-t)$ 的相位是由反射响应中第一个序列与 $f_1^-(t)$ 中的第二个序列构造的,即将反射响应中的第一个序列的相位移动 $t = -t_1 - t_2 + \frac{1}{2}t_3$, 依据反射系数和透射系数的值可以判断 $f_{1m}^+(-t)$ 的幅值 $R_{A1}R_{A2}f_{1dA}^+ < 0$ 。

图5是基于数值解模型求解的第一次迭代后的结果,图中绘制了两条红虚线表示时间窗算子 θ , 两条线在时间轴上镜像对称,窗算子 θ 去除正负窗口外的所有数据,而仅仅保存窗口之间的数据。利用时间窗算子截取窗内部的序列只得到两个序列(图5(a)), 这就是首次迭代更新的上行聚焦函数 $f_1^-(t)$ 。与图3(b)中的初始聚焦函数相比较,发现第一个序列的幅值是正数相乘的结果,



(a) $R(t)*f_1^-(t)$



(b) $R(t)*f_1^+(-t)$

图5 第一次迭代后的结果

Fig. 5 The result after the first iteration

而第二个序列是负数相乘的结果,与对等式(11)两个序列的幅度分析结果一致。接着将这两个序列时反,得到 $f_1^-(-t)$,将它和反射响应卷积可以得到图5(b)的结果。两个序列和反射响应序列的卷积可以分为单个序列卷积的和,也相当于将反射响应序列在时间轴上移动相位后再求和。窗算子作用后只留一个序列,即 $f_{1m}^+(-t)$,时反后就可得到 $f_{1m}^+(t)$,幅值为负数相乘的结果。数值求解的结果与等式(11)和等式(12)的结果相同。本质上来说,来自反射响

应的序列随着首波到达时间而移动,以构建序列。由于首波是时反非因果的,因此它会将反射系列中的所有序列向负时间轴移动。其中的一些序列变得太多,以致变为非因果序列。接下来又计算了第二、第三次迭代,得到具有相同相位而幅度不同的 $f_1^-(t)$ 和 $f_{1m}^+(t)$ 。

第二次迭代,首先将第一次迭代求得的 $f_{1m}^+(-t)$ 时反后与 $f_{1d}^+(t)$ 求和可得

$$f_{1d}^+(t) + f_{1m}^+(t) = f_{1dA}^+ \delta\left(t + t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) + R_{A1}R_{A2}f_{1dA}^+ \delta\left(t + t_1 - t_2 + \frac{1}{2}t_3\right). \quad (13)$$

由等式(7)可得

$$f_1^-(t) = R_{A1}f_{1dA}^+ \delta\left(t - t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) + (R_{A2}f_{1d}^+ + R_{A1}^2R_{A2}f_{1dA}^+) \delta\left(t - t_1 - t_2 + \frac{1}{2}t_3\right). \quad (14)$$

接着将等式(14)得到的 $f_1^-(t)$ 代入等式(8)可得

$$f_{1m}^+(-t) = R_{A1}(R_{A2}f_{1d}^+ + R_{A1}^2R_{A2}f_{1dA}^+) \delta\left(t - t_1 + t_2 - \frac{1}{2}t_3\right). \quad (15)$$

第三次迭代,首先将等式(15)得到的 $f_{1m}^+(-t)$ 与 $f_{1d}^+(t)$ 求和:

$$f_{1d}^+(t) + f_{1m}^+(t) = f_{1dA}^+ \delta\left(t + t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) + R_{A1}(R_{A2}f_{1d}^+ + R_{A1}^2R_{A2}f_{1dA}^+) \delta\left(t + t_1 - t_2 + \frac{1}{2}t_3\right). \quad (16)$$

由等式(7)可得

$$f_1^-(t) = R_{A1}f_{1dA}^+ \delta\left(t - t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) + (R_{A2}f_{1d}^+ + R_{A1}^2(R_{A2}f_{1d}^+ + R_{A1}^2R_{A2}f_{1dA}^+)) \delta\left(t - t_1 - t_2 + \frac{1}{2}t_3\right). \quad (17)$$

接着将等式(17)得到的 $f_1^-(t)$ 代入等式(8)可得

$$f_{1m}^+(-t) = R_{A1}(R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A1}^2(R_{A2}f_{1d}^+ + R_{A1}^2R_{A2}f_{1dA}^+)) \delta\left(t - t_1 + t_2 - \frac{1}{2}t_3\right). \quad (18)$$

将经历多次迭代后的 $f_1^-(t)$ 与 $f_{1m}^+(-t)$ 作为最终的聚焦函数,求取期望的格林函数。对比三次迭代结果,等式(11)、等式(14)和等式(17)得到的 $f_1^-(t)$,发现每次迭代得到的下行聚焦函数的序列都只有两列,且相位完全相同,而且第一个序列的幅度也是完全相同的,等式(14)中第二个序列的幅度是等式(11)得到的序列幅度基础上再加一个 $R_{A1}^2R_{A2}f_{1dA}^+$,第三次迭代的结果是第一次结果的基础上对上一次迭代的幅度进行微调,而不影响相位。同理,对于等式(12)、等式(15)和等式(18)得到的 $f_{1m}^+(-t)$,只有一个序列,幅度在每次迭代后进行微调。

数值模拟实验中,总计迭代计算了六次,抽取其中第一、第五和第六次结果,在图6中对比,不同的颜色分别代表不同的迭代结果。对于图6(a)中的

$f_1^-(t)$ 只有两个序列,第一个序列幅度和相位完全重合,第二个序列的幅度有轻微的差别,将图中第二个序列放大得到6(a)图中左边插图展示,可以发现幅度差别很小,第六次迭代结果已经收敛于第五次迭代。在图6(b)中,只有一个序列,幅度差异很小,不同的迭代结果在到时和波形上匹配很好,数值解的图形很好匹配了解析解的分析结果。

3 单程格林函数重构

将在时间轴上与窗算子 θ 相逆的算子记为 Θ , Θ 去除了直达波到达前的所有序列,而不包括直达波本身。可用来求解位于算子 θ 外围的格林函数。将 Θ 置于Marchenko方程组(3)和方程组(4)两端,可以得到

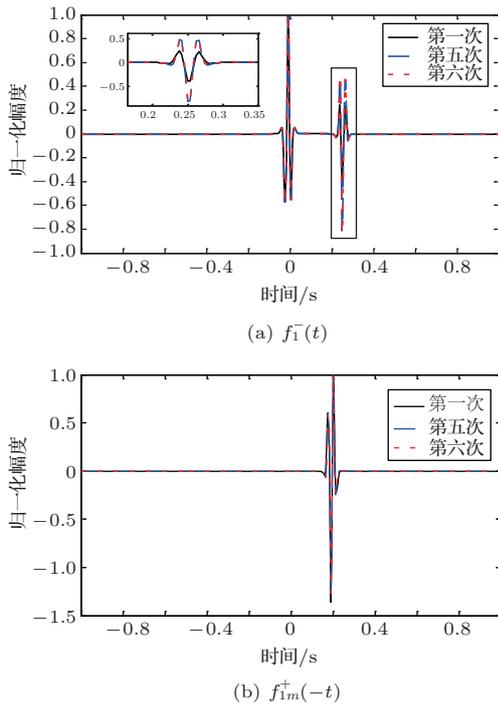


图6 不同迭代结果对比

Fig. 6 Comparison of different iteration results

$$G^-(t) = \Theta \{R(t) * f_{1d}^+(t) + R(t) * f_{1m}^+(t)\} \quad (19)$$

和

$$G^+(t) = f_{1d}^+(-t) - \Theta \{R(t) * f_1^+(-t)\}. \quad (20)$$

通过等式(7)和等式(8)的三次迭代求解得 $f_{1m}^+(t)$ 和 $f_1^+(t)$, 结合已知的 $R(t)$ 和 $f_{1d}^+(t)$, 代入等式(19)和等式(20), 就可以得到单程格林函数。为了更加清晰地描述迭代过程的特点, 只取迭代结果的前三个序列, 具体解析解求解过程如下。

首先 $f_{1m}^+(t)$ 的初始值为0, 第一步可用 $R(t)$ 和 $f_{1d}^+(t)$ 卷积后, 加窗算子 Θ 求取上行格林函数, 得到 $\Theta \{R(t) * f_{1d}^+(t)\}$:

$$\begin{aligned} G^-(t) &= \Theta \{R(t) * f_{1d}^+(t)\} \\ &= R_{A3} f_{1dA}^+ \delta\left(t - t_1 - 3t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + R_{A4} f_{1dA}^+ \delta\left(t - t_1 - t_2 - \frac{3}{2}t_3\right) \\ &\quad + R_{A5} f_{1dA}^+ \delta\left(t - t_1 - 5t_2 + \frac{1}{2}t_3\right). \end{aligned} \quad (21)$$

正如上文所描述的, 这个步骤相当于将反射响应沿着时间轴逆向向移动直达波的到时, 即移动 $t = t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3$ 相位, 加窗算子 Θ 作用后求取算子 θ 外围的的波场序列。依据等式(12)求得的 $f_{1m}^+(t)$, 可以求得 $\Theta \{R(t) * f_{1m}^+(t)\}$ 第一次迭代计算的结果:

$$\begin{aligned} &\Theta \{R(t) * f_{1m}^+(t)\} \\ &= R_{A1} R_{A2}^2 f_{1dA}^+ \delta\left(t - t_1 - 3t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + R_{A1} R_{A2} R_{A3} f_{1dA}^+ \delta\left(t - t_1 - 5t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + R_{A1} R_{A2} R_{A4} f_{1dA}^+ \delta\left(t - t_1 - 3t_2 - \frac{3}{2}t_3\right). \end{aligned} \quad (22)$$

对比等式(21)和等式(22), 可以发现等式(22)中前三个序列中没有等式(21)中的第二个序列, 同时对于等式(21)和等式(22)中的第一个序列, 幅值 $R_{A3} f_{1dA}^+ < 0$, 幅值 $R_{A1} R_{A2}^2 f_{1dA}^+ > 0$, 对于等式(21)中第三个序列和等式(22)中第二个序列的幅值, $R_{A5} f_{1dA}^+ < 0$, $R_{A1} R_{A2} R_{A3} f_{1dA}^+ > 0$ 。接着由等式(15)的结果, 得到第二次迭代后的结果:

$$\begin{aligned} \Theta \{R(t) * f_{1m}^+(t)\} &= R_{A1} R_{A2} (R_{A2} f_{1d}^+ + R_{A1}^2 R_{A2} f_{1dA}^+) \delta\left(t - t_1 - 3t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + R_{A1} R_{A3} (R_{A2} f_{1d}^+ + R_{A1}^2 R_{A2} f_{1dA}^+) \delta\left(t - t_1 - 5t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + R_{A1} R_{A4} (R_{A2} f_{1d}^+ + R_{A1}^2 R_{A2} f_{1dA}^+) \delta\left(t - t_1 - 3t_2 - \frac{3}{2}t_3\right). \end{aligned} \quad (23)$$

利用等式(18), 得到第三次迭代后的结果:

$$\begin{aligned} &\Theta \{R(t) * f_{1m}^+(t)\} \\ &= R_{A1} R_{A2} (R_{A2} f_{1dA}^+ + R_{A1}^2 (R_{A2} f_{1d}^+ + R_{A1}^2 R_{A2} f_{1dA}^+)) \delta\left(t - t_1 - 3t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + R_{A1} R_{A3} (R_{A2} f_{1dA}^+ + R_{A1}^2 (R_{A2} f_{1d}^+ + R_{A1}^2 R_{A2} f_{1dA}^+)) \delta\left(t - t_1 - 5t_2 + \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + R_{A1} R_{A4} (R_{A2} f_{1dA}^+ + R_{A1}^2 (R_{A2} f_{1d}^+ + R_{A1}^2 R_{A2} f_{1dA}^+)) \delta\left(t - t_1 - 3t_2 - \frac{3}{2}t_3\right). \end{aligned} \quad (24)$$

依据等式(22)、等式(23)和等式(24)的 $\Theta\{R(t)*f_{1m}^+(t)\}$ 三次迭代结果,对于前三个序列,可以发现每次迭代后的结果相位完全一样,而幅度微小变化。对于 $R(t)*f_{1m}^+(t)$ 的运算,这个步骤相当于将反射响应沿着时间轴移动 $f_{1m}^+(t)$ 的相位 $t = -t_1 + t_2 - \frac{1}{2}t_3$,将它与 $\Theta\{R(t)*f_{1d}^+(t)\}$ 求和,可以得到下行格林函数。对于 $\Theta\{R(t)*f_{1d}^+(t)\}$ 中

第一次迭代:

$$\begin{aligned}\Theta\{R(t)*f_1^-(t)\} &= (R_{A1}^2 f_{1dA}^+ + R_{A2}^2 f_{1dA}^+) \delta\left(t - t_1 - t_2 - \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + (R_{A1}R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A2}R_{A3}f_{1dA}^+) \delta\left(t - t_1 - 3t_2 - \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + R_{A2}R_{A4}f_{1dA}^+ \delta\left(t - t_1 - t_2 - \frac{5}{2}t_3\right).\end{aligned}\quad (25)$$

第二次迭代:

$$\begin{aligned}\Theta\{R(t)*f_1^-(t)\} &= (R_{A1}^2 f_{1dA}^+ + R_{A2}(R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A1}^2 R_{A2}f_{1dA}^+)) \delta\left(t - t_1 - t_2 - \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + (R_{A1}R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A3}(R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A1}^2 R_{A2}f_{1dA}^+)) \delta\left(t - t_1 - 3t_2 - \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + R_{A4}(R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A1}^2 R_{A2}f_{1dA}^+) \delta\left(t - t_1 - t_2 - \frac{5}{2}t_3\right).\end{aligned}\quad (26)$$

第三次迭代:

$$\begin{aligned}\Theta\{R(t)*f_1^-(t)\} &= (R_{A1}^2 f_{1dA}^+ + R_{A2}(R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A1}^2(R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A1}^2 R_{A2}f_{1dA}^+))) \delta\left(t - t_1 - t_2 - \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + (R_{A1}R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A3}(R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A1}^2(R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A1}^2 R_{A2}f_{1dA}^+))) \delta\left(t - t_1 - 3t_2 - \frac{1}{2}t_3\right) \\ &\quad + R_{A4}(R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A1}^2(R_{A2}f_{1dA}^+ + R_{A1}^2 R_{A2}f_{1dA}^+)) \delta\left(t - t_1 - t_2 - \frac{5}{2}t_3\right).\end{aligned}\quad (27)$$

对比等式(25)、等式(26)和等式(27),三次结果的前三个序列的相位完全一样,而幅度差异很小。接着可以基于等式(20),利用已知的 $f_{1d}^+(-t)$,减去上文求解的 $\Theta\{R(t)*f_1^-(t)\}$,得到下行格林函数。 $f_{1d}^+(-t)$ 的相位为 $t = t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3$,与 $\Theta\{R(t)*f_1^-(t)\}$ 第一个序列的相位完全相同,所以相减操作是为了校正第一个序列的幅度,同时将后续的幅度乘以 -1 ,使子波的幅值归位。

数值模拟实验中,首先绘制了 $\Theta\{R(t)*f_{1d}^+(t)\}$ (如图7(a)所示),结合等式(21)和图(4)解析解模型,可以发现图7(a)中前三个序列是由图(4)中的第三个到第五个序列移动 $f_{1d}^+(t)$ 相位得到。接着绘制了 $\Theta\{R(t)*f_{1m}^+(t)\}$ 的第一次、第五次和第六次

的第一个和第三个序列,将会与 $\Theta\{R(t)*f_{1m}^+(t)\}$ 中的第一个和第二个序列在幅度上相互抵消,迭代次数的增加不会改变序列的相位,而主要是为了让序列的幅度逼近到可以抵消的程度。

接着可以将等式(10)和等式(13)两次求得的 $f_1^-(t)$,结合已知的 $R(t)$ 代入等式(20),首先可以分别得到三次迭代的 $\Theta\{R(t)*f_1^-(t)\}$,具体结果如下。

迭代结果(如图7(b)所示),不同迭代次数所求得的 $\Theta\{R(t)*f_{1m}^+(t)\}$ 相位完全一样,幅度有微小差异。同时参考等式(22),可以发现图7(b)的前两个序列是由图(4)中的第二个和第三个序列移动 $f_{1m}^+(t)$ 的相位得到。因为 $f_{1d}^+(t)$ 和 $f_{1m}^+(t)$ 的相位差为 $2*t_2$,与反射响应中第二个和第三个序列的相位差一样,因此将反射响应移动 $f_{1d}^+(t)$ 相位后可以得到上行格林函数的初始估计,再将反射响应移动 $f_{1m}^+(t)$ 的相位得到上行格林函数的一次估计,并将结果求和是为了去除类似反射响应中第三个和第五个序列这种层间多次波的影响,最终得到准确的上行格林函数。图7(b)中插图显示的矩形区域放大位置显示了迭代求解的序列在第六次收敛到稳定状态。图7(a)中第一个和第三个序列的幅值与图7(b)中第一个

和第二个序列的幅值相反，它们的叠加将会去除这些序列， $\Theta\{R(t) * f_{1m}^+\}$ 的迭代目的就是要让图7(b)的幅度接近图7(a)中的幅度，从而去除这些伪序列的影响，这与理论分析相契合。对于图7(c)的结果， $f_{1m}^-(t)$ 中的两个序列的相位差也是 $2 * t_2$ ，作用与 $f_{1m}^+(t)$ 中的相同，迭代在第六次的时候已经稳定了。

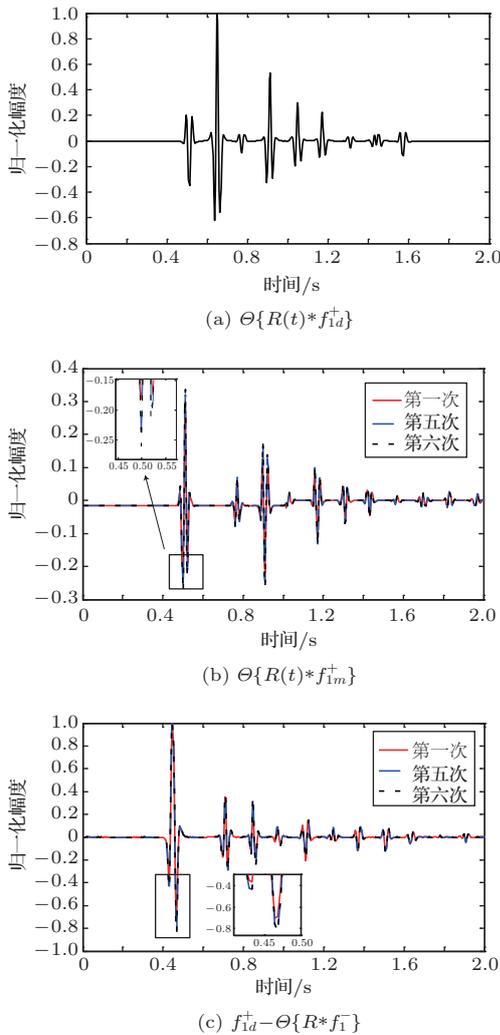


图7 格林函数序列不同迭代结果对比图

Fig. 7 Comparison of different iteration results of Green's function sequence

接下来，将上文基于 Marchenko 方法迭代求解的上下行格林函数和正演模拟波场分离^[8]的结果进行对比，其中红虚线表示正演模拟的结果，蓝实线表示由 Marchenko 方程求解结果，如图8所示。

从图8中，发现蓝实线表示的基于 Marchenko 方程求解的上行和下行格林函数迭代求解的结果，和正演模拟的结果在波形和相位上吻合很好，说明了一维 Marchenko 方程准确地分解了虚拟源位置

接收的波场。如果将上行格林函数和下行格林函数求和，可以得到点源激发的全波场。

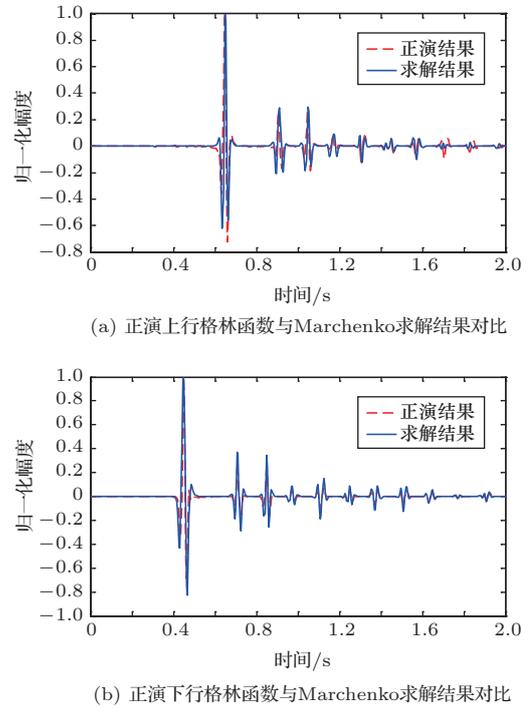


图8 Marchenko 方程求解结果与正演结果对比

Fig. 8 Comparison of the results of the resolved Marchenko equation and the directly model

4 结论

本文通过一维声学介质的数值解和解析解模型对耦合 Marchenko 求解单程格林函数过程进行了详细的讨论和说明。可以得到以下五个结论：

(1) 在欠定方程组不可求解的情况下，可以基于聚焦函数和格林函数的波场因果性质，通过引入时间窗算子迭代求解耦合方程，时间窗算子内部计算聚焦函数，外部计算格林函数；

(2) 通过对不同迭代次数的聚焦函数分析，可以发现在第一次迭代后，期望的序列在相位上已经很准确，而后续的迭代过程是对幅度的微小调整，而且聚焦函数内部波形序列的相位差，在后续的步骤中可以去除由层间多次波产生的伪波序列；

(3) 利用初始聚焦函数计算的上行格林函数估计包含了伪波，这些伪波需要利用 $R(t) * f_{1m}^+(t)$ 的迭代稳定值去除；对于下行格林函数，可以发现在第一次迭代后，期望的序列在相位上已经很准确，而后续的迭代过程是对幅度的微小调整；

(4) 从解析解等式中可以发现,基于 Marchenko 方法迭代求解单程格林波场,反射响应和直达波的幅度构造了聚焦函数和上下行格林函数的幅度,因为 Marchenko 方法中反射响应是子波反卷积的结果,所以准确的子波反卷积操作对结果很重要;

(5) 迭代求解 Marchenko 方程本质上是通过初始聚焦函数对记录的单边反射响应进行相位调制,接着利用聚焦函数的作用,使反射响应中的序列逐步移位到介质中虚拟接收器接收的波场响应序列。

参 考 文 献

- [1] New R G. Scattering theory of wave and particles[M]. New York: Springer-Verlag, 1982: 1-743.
- [2] Brogini F, Snieder R. Connection of scattering principles: a visual and mathematical tour[J]. European Journal of Physics, 2012, 33(3): 593-613.
- [3] Wapenaar K, Thorbecke J, van der Neut J, et al. Marchenko imaging[J]. Geophysics, 2014, 79(3): WA39-WA57.
- [4] van der Neut J, Vasconcelos I, Wapenaar K. On Green's function retrieval by iterative substitution of the coupled Marchenko equations[J]. Geophysical Journal International, 2015, 203(2): 792-813.
- [5] Cui T, Vasconcelos I, van Manen D J, et al. A tour of Marchenko redatuming: focusing the subsurface wavefield[J]. The Leading Edge, 2018, 37(1): 67a1-67a6.
- [6] da Costa Filho C A, Ravasi M, Curtis A, et al. Elastodynamic Green's function retrieval through single-sided Marchenko inverse scattering[J]. Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2014, 90(6): 063201.
- [7] Slob E. Green's function retrieval and Marchenko imaging in a dissipative acoustic medium[J]. Physical Review Letters, 2016, 116(16): 164301.
- [8] Wapenaar C P A, Grimbergen J L T. Reciprocity theorems for one-way wavefields[J]. Geophysical Journal International, 1996, 127(1): 169-177.
- [9] Thorbecke J W, Draganov D. Finite-difference modeling experiments for seismic interferometry[J]. Geophysics, 2011, 76(6): H1-H18.
- [10] Thorbecke J W, Slob E, Brackenhoff J, et al. Implementation of the Marchenko method[J]. Geophysics, 2017, 82(6): WB29-WB45.