中国科学: 数学 2025 年 第 55 卷 第 6 期: 1175～1190

SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

CrossMark
click for updates

论 文

非对称 Toeplitz 矩阵补全问题的最小秩上界估计

闫喜红[1], 徐毅[2*], 李天宇[1]

1. 太原师范学院数学与统计学院, 晋中 030619;
2. 东南大学数学学院, 南京应用数学中心, 南京 211135

E-mail: xihong1@e.ntu.edu.sg, yi.xu1983@hotmail.com, 2239712441@qq.com

收稿日期: 2022-06-05; 接受日期: 2024-01-11; 网络出版日期: 2024-03-29; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11901424) 和山西省科技创新人才团队专项 (批准号: 202204051002018) 资助项目

摘要 具有特殊结构的 Toeplitz 矩阵补全问题在机器学习、信号处理、图像识别等诸多领域都有着广泛的应用. 针对此问题, 目前的求解算法效率都依赖于最优 Toeplitz 矩阵秩的估计. 本文利用三角矩和半无限问题的相关理论, 估计非对称 Toeplitz 矩阵补全问题最优解秩的上界, 其上界小于该问题线性约束个数的 2 倍.

关键词 Toeplitz 矩阵 补全问题 三角矩问题 半无限问题

MSC (2020) 主题分类 15A18, 90C20, 90C25

1 引言

低秩矩阵补全问题旨在通过矩阵的部分观测值来估计该矩阵中未观测到的其他元素, 其在诸如信号处理 [8]、机器学习 [2]、压缩感知 [5,6]、系统识别与控制 [13,18] 和计算机视觉 [24] 等领域有着广泛应用. 目前, 针对低秩矩阵补全问题的主要算法有奇异值阈值法 [4]、加速邻近梯度法 [23]、基于矩阵分解的算法 [22] 和表征降维法 [9,16,20] 等, 其他方法详见文献 [12,15,19].

在很多工程和统计应用中, 所考虑的矩阵通常具有特定的结构. 例如, 在信号处理中, 平稳随机过程的协方差矩阵通常具有 Toeplitz 矩阵结构. 事实上, 由于在信号和图像科学等领域中的很多实际问题都可归结为 Toeplitz 矩阵问题, 所以 Toeplitz 矩阵 [21,27] 被广泛研究. 特别地, Toeplitz 矩阵补全问题已成为研究热点之一, 其数学模型可写为如下规划:

$$\begin{aligned} &\min\ r(T) \\ &\text{s.t. } T_{ij} = M_{ij}, \quad \forall\, (i,j) \in \Omega, \\ &\qquad T \text{ 是 Toeplitz 矩阵}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

英文引用格式: Yan X H, Xu Y, Li T Y. Estimation of the upper bound on the minimum rank of an asymmetric Toeplitz matrix completion problem (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1175–1190, doi: 10.1360/SSM-2022-0105

其中, $r(T)$ 表示矩阵 $T\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的秩, $M\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是给定的采样矩阵, M_{ij} 表示矩阵 M 的采样元素, 且采样元素指标集为 $\Omega=\{(i,j)\mid i\in\{1,2,\dots,m\},j\in\{1,2,\dots,n\}\}$. 用于求解一般矩阵补全的算法不能充分利用 Toeplitz 矩阵结构, 其解也不能保持 Toeplitz 矩阵结构. 目前, 针对具有特殊结构的 Toeplitz 矩阵补全问题的算法并没有得到充分研究. 王川龙等基于 (1.1) 的核范数模型提出了两类算法: 增广 Lagrange 算法 [25] 和奇异值阈值算法 [26]. 这两类算法都能够保持 Toeplitz 矩阵结构. 然而, 它们的有效性都取决于某些参数的选择, 这些参数的选择又高度依赖于目标函数 (最优秩) 的估计. 因此, 估计最优 Toeplitz 矩阵秩的范围对于提高求解问题 (1.1) 的算法效率起着极为重要的作用. 受此启发, 本文着重研究 Toeplitz 矩阵补全问题最小秩的估计.

关于矩阵秩的估计的文献大多集中于半正定规划 [3,11,14] 或带状矩阵 [7,10,28,29] 的最优矩阵的秩. 这些结果可以直接或者仅需要做少量的修改就能用于解决 Toeplitz 矩阵秩的估计. 然而, 这些结果并没有充分利用 Toeplitz 矩阵的结构. 文献 [30] 利用三角矩定理将带有线性约束的对称 Toeplitz 矩阵补全问题转化为半无限规划, 给出了其最小秩的上界估计. 但对称 Toeplitz 矩阵的应用范围较窄, 因此本文针对应用更为广泛的带有线性约束的非对称 Toeplitz 矩阵补全问题的秩的上界估计进行研究, 其模型为

$$\begin{aligned}&\min\ r(T)\\&\text{s.t.}\ \mathscr{B}(T)=d,\\&\qquad T\ \text{是 Toeplitz 矩阵},\end{aligned}\tag{1.2}$$

其中, $T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是决策变量, 线性变换 $\mathscr{B}:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^m$, $d\in\mathbb{R}^m$ 是给定的向量. 显然, (1.1) 是 (1.2) 的特殊情形. 与对称 Toeplitz 矩阵情形不同, 将非对称 Toeplitz 矩阵补全问题转化为半无限规划较困难. 因此, 如何将带有线性约束的非对称 Toeplitz 矩阵补全问题转化为易求解的规划问题成为本文的关键和难点. 本文总假设问题 (1.2) 有解.

本文的研究思路如下. 首先, 通过矩阵分解将问题 (1.2) 的可行域化为一个半正定系统; 其次, 利用三角矩问题的相关理论, 将半正定系统转化为半无限规划; 最后, 基于半无限问题的最优性条件及矩阵分解得出结论, 即问题 (1.2) 目标值的上界是其线性约束数量的 2 倍.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节给出一些符号说明和相关定义. 第 3 节给出关于非对称 Toeplitz 矩阵补全问题的最小秩上界的理论结果. 第 4 节给出全文总结.

2 预备知识

本节给出一些符号说明, 概述一些基本定义. 此外还介绍优化问题的 slater 条件及一个关于三角矩问题的重要结论, 其将在本文的理论分析中发挥核心作用.

符号 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维 Euclid 空间. $\mathbb{R}^{m\times n}$和 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 分别表示 $m\times n$ 维实矩阵和复矩阵的集合. V^* 表示矩阵 V 的对称共轭矩阵. $r(T)$ 表示矩阵 T 的秩. 矩阵 T 正定 (半正定) 记为 $T\succ 0$ $(T\succeq 0)$. $|\omega|$ 为集合 ω 中元素的个数. A_j 表示矩阵 A 的第 j 列, A_{ij} 表示矩阵 A 的 (i,j) 元. 符号 T 表示转置. i 表示单位虚数. $(x)_j$ 表示向量 x 的 j 元. $\mathrm{int}(\Theta)$ 表示集合 Θ 的内点集. $\mathbb{P}([a,b])$ 表示定义在 $[a,b]$ 上的有限正 Borel 测度的集合. 给定离散测度 $\mu\in\mathbb{P}([a,b])$, 则存在 $t_1,t_2,\dots,t_k\in[a,b],\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\geqslant 0$,

对于任意 $f(x)$, 有 $\int_a^b f(t)\mu(dt)=\sum_{i=1}^k \lambda_i f(t_i)$. 为了方便, 采用

$$\mu \backsim \begin{pmatrix} t_1, t_2, \ldots, t_k \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \end{pmatrix}$$

表示离散测度 μ、t 和 λ 之间的关系, 且其支撑集记为 $\mathrm{supp}(\mu)=\{t_i \mid \lambda_i>0\}$.

下面介绍本文用到的相关定义.

定义 2.1 (正 Borel 测度)　设 Φ 是 Hausdorff 空间, $B(\Phi)$ 是 Φ 上的 Borel 集类, F 为 Φ 上包含 $B(\Phi)$ 的 σ 代数, μ 是 F 上的测度. 如果对每个 $A\in F$, 有 $\mu(A)=\inf\{\mu(G)\mid A\subset G\}$, 则称 μ 为外正则的; 如果对于每个开集 G, 有 $\mu(G)=\sup\{\mu(K)\mid K\subset G\}$, 则称 μ 为内正则的; 既外正则又内正则的测度称为正则测度.

定义 2.2 (半无限规划)　半无限规划是指以下形式的统一模型

$$\begin{aligned} &\min_x \ f(x) \\ &\text{s.t. } g_j(x)\leqslant 0, \quad j=1,2,\ldots,J \\ &\qquad h_i(x,y_i)\leqslant 0, \quad \forall\, y_i\in Y_i\subset\mathbb{R}^{n_i}, \quad i=1,2,\ldots,I, \end{aligned}$$

其中, J 和 I 分别是不含参数和含参数的约束的个数, $Y_i\subset\mathbb{R}^{n_i}$ $(i=1,2,\ldots,I)$ 都是紧集, $g_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(j=1,2,\ldots,J)$, $h_i:\mathbb{R}^n\times Y_i\to\mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots,I)$ 都是连续函数.

定义 2.3 (slater 条件)　优化问题

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &\text{s.t. } x\in\Theta \end{aligned}$$

的 slater 条件是存在一个点 $x_0\in\mathrm{int}(\Theta)$.

定义 2.4 (Toeplitz 矩阵 [1,17])　矩阵

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_{-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} & x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{-n+2} & x_{-n+3} & \cdots & x_0 & x_1 \\ x_{-n+1} & x_{-n+2} & \cdots & x_{-1} & x_0 \end{pmatrix} \in\mathbb{R}^{n\times n}$$

称为 n 阶实 Toeplitz 矩阵, 记为 $T(x)$, 其中 $x=(x_{-n+1},\ldots,x_{-1},x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{2n-1}$.

特别地, 当该 Toeplitz 矩阵是对称矩阵时, 记为 $\widetilde{T}(x)$, 其结构如下:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_1 & x_0 & \cdots & x_{n-3} & x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2} & x_{n-3} & \cdots & x_0 & x_1 \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_1 & x_0 \end{pmatrix} \in\mathbb{R}^{n\times n},$$

其中 $x=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$. 此外, 用 $\tilde{\tilde{T}}(x)$ 表示如下特殊结构的复对称共轭 Toeplitz 矩阵:

$$\tilde{\tilde{T}}(x)=\begin{pmatrix} x_0 & \mathrm{i}x_1 & \mathrm{i}x_2 & \cdots & \mathrm{i}x_{n-1} \\ -\mathrm{i}x_1 & x_0 & \mathrm{i}x_1 & \cdots & \mathrm{i}x_{n-2} \\ -\mathrm{i}x_2 & -\mathrm{i}x_1 & x_0 & \cdots & \mathrm{i}x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathrm{i}x_{n-1} & -\mathrm{i}x_{n-2} & -\mathrm{i}x_{n-3} & \cdots & x_0 \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n},$$

其中 $x=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$.

由定义 2.4 可知, 针对 n 阶实 Toeplitz 矩阵, 模型 (1.1) 能够表示为如下形式:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^{2n-1}} \quad & r(T(x)) \\ \text{s.t.} \quad & (x)_j=(m)_j, \quad \forall\, j\in\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中, $\Omega=\{j\mid j\in\{1,2,\ldots,2n-1\}\}$, $(m)_j$ $(j\in\Omega)$ 是 Toeplitz 矩阵 $T(x)$ 中给定的已知元素. 约束条件 $(x)_j=(m)_j$ $(\forall\, j\in\Omega)$ 表示待补全的 Toeplitz 矩阵与样本数据保持一致. 同样, 问题 (1.2) 也可以表示成如下规划:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^{2n-1}} \quad & r(T(x)) \\ \text{s.t.} \quad & Bx=d, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中, $B\in\mathbb{R}^{m\times(2n-1)}$, $x=(x_{-n+1},\ldots,x_{-1},x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{2n-1}$. 由于问题 (2.1) 仅是问题 (2.2) 的特例, 所以下面着重分析问题 (2.2).

问题 (2.2) 是一个特殊结构的矩阵补全优化问题. $T(x)$ 是 Toeplitz 矩阵这一特殊的要求给求解问题 (2.2) 增加了难度. 为了处理此特殊要求, 引入经典三角矩问题, 其表述如下: 对于给定的复数序列 $\{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1}\}$, 它是否能够表示为一个连续矩序列, 即对于给定的复数序列 $\{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1}\}$, 是否存在正 Borel 测度 $\mu\in\mathbb{P}([0,2\pi])$ 使得

$$\alpha_j=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt}\mu(dt), \quad j=-n+1,\ldots,n-1,$$

其中 α_{-j} 与 α_j 互为共轭. 如果存在, 则称 $\{\alpha_j\}_{j=-n+1}^{n-1}$ 为有效序列. 这个问题在文献 [1,17] 中都有所研究, 其结论可表述为如下引理.

引理 2.1 (三角矩定理 [1,17]) 三角矩问题一定有解, 即 $\{\alpha_j\}_{j=-n+1}^{n-1}$ (α_{-j} 和 α_j 互为共轭) 是定义在 $[0,2\pi]$ 上的正 Borel 测度 μ 的 Fourier 系数的有效序列, 当且仅当如下的对称共轭 Toeplitz 矩阵是半正定的:

$$T=\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{-1} & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{-n+1} & \alpha_{-n+2} & \cdots & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

3　非对称 Toeplitz 矩阵补全问题的上界

本节估计非对称 Toeplitz 矩阵补全问题 (2.2) 的上界. 显然, 问题 (2.2) 的任意可行解 x 对应的 Toeplitz 矩阵秩的上界就是问题 (2.2) 的一个上界. 因此, 本节的目标就是找到问题 (2.2) 的一个可行解, 并估计其所对应 Toeplitz 矩阵秩的上界. 本节利用三角矩定理处理目标函数中的 Toeplitz 矩阵 $T(x)$. 为了使问题符合三角矩定理条件, 本节对变量 x 进行分解从而将非对称 Toeplitz 矩阵条件转化为对称正定 Toeplitz 矩阵条件. 具体如下: 引入变量 $y_0 \in \mathbb{R}, y = (y_1, \dots, y_{n-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $z = (z_1, \dots, z_{n-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-1}$, 满足 $x_0 = y_0$, $x_i = y_i + z_i$, $x_{-i} = y_i - z_i$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$. 根据 x 的分解, 我们将问题 (2.2) 中的矩阵 B 的前 $n-1$ 列进行倒序排列构成新的矩阵, 再将此新的矩阵分解为 (B^-, B^0, B^+), 其中 $B^- = (B_{n-1}, B_{n-2}, \dots, B_1) \in \mathbb{R}^{m\times(n-1)}$, $B^0 = B_n \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $B^+ = (B_{n+1}, B_{n+2}, \dots, B_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{m\times(n-1)}$, 从而 $Bx = d$ 可等价地表示为

$$(B^-, B^0, B^+)\begin{pmatrix} y - z \\ y_0 \\ y + z \end{pmatrix} = d,$$

整理可得

$$(B^- + B^+)y + B^0 y_0 + (-B^- + B^+)z = d.$$

进一步引入变量 $w_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$, $w = (w_1, \dots, w_{n-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $v = (v_1, \dots, v_{n-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 且令 $y_0 = w_0 - v_0$, $y = w - v$, 使得

$$\widetilde{T}\begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \widetilde{T}\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} + \alpha I \succeq 0.$$

这样, 问题 (2.2) 的约束集 $\{x \in \mathbb{R}^{2n-1} \mid Bx = d$ 且 $T(x)$ 是 Toeplitz 矩阵$\}$ 可表示为如下形式:

$$\begin{aligned} &(B^- + B^+)(w - v) + B^0(w_0 - v_0) + (-B^- + B^+)z = d, \\ &\widetilde{T}\begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \widetilde{T}\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} + \alpha I \succeq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

再由引理 2.1 可得, 存在 3 个 $[0, 2\pi]$ 上的正 Borel 测度 μ_1、μ_2 和 μ_3 使得

$$\begin{aligned} w_j &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt}\mu_1(dt) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jt}\mu_1(dt), \quad j = 0, \dots, n-1, \\ v_j &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt}\mu_2(dt) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jt}\mu_2(dt), \quad j = 0, \dots, n-1, \\ z_j &= \frac{-i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt}\mu_3(dt) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jt}\mu_3(dt), \quad j = 1, \dots, n-1, \\ \alpha &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu_3(dt). \end{aligned}$$

进一步地, 有

$$w_j = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}jt})\mu_1(dt) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(jt)\mu_1(dt), \quad j = 0, \dots, n-1,$$

$$
\begin{aligned}
v_j &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}jt})\mu_2(dt) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(jt)\mu_2(dt), \quad j=0,\dots,n-1,\\
z_j &= \frac{-\mathrm{i}}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}jt})\mu_3(dt) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(jt)\mu_3(dt), \quad j=1,\dots,n-1.
\end{aligned}
$$

令 $C=(B^-+B^+)$, $D=(-B^-+B^+)$, 则系统 (3.1) 可等价地表示为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1} C_j\int_0^{2\pi}\cos(jt)\mu_1(dt) + B^0\int_0^{2\pi}\mu_1(dt) - \sum_{j=1}^{n-1} C_j\int_0^{2\pi}\cos(jt)\mu_2(dt)\\
&\quad - B^0\int_0^{2\pi}\mu_2(dt) + \sum_{j=1}^{n-1} D_j\int_0^{2\pi}\sin(jt)\mu_3(dt)\\
&\quad = 2\pi d, \quad \mu_j\in\mathbb{P}([0,2\pi]), \quad j=1,2,3.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

对于问题 (3.2), 直接求解是困难的. 下面通过建立如下的优化问题进行求解:

$$
\begin{aligned}
\min_{\substack{\mu_j\in\mathbb{P}([0,2\pi])\\ j=1,2,3}} \ & \sum_{j=2}^{n}(e_1)_j\int_0^{2\pi}\cos(jt)\mu_1(dt) - (e_1)_1\int_0^{2\pi}\mu_1(dt) + \sum_{j=2}^{n}(e_2)_j\int_0^{2\pi}\cos(jt)\mu_2(dt)\\
& + (e_2)_1\int_0^{2\pi}\mu_2(dt) + \sum_{j=2}^{n}(e_3)_j\int_0^{2\pi}\sin(jt)\mu_3(dt) - (e_3)_1\int_0^{2\pi}\mu_3(dt)\\
\text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n-1} C_j\int_0^{2\pi}\cos(jt)\mu_1(dt) + B^0\int_0^{2\pi}\mu_1(dt) - \sum_{j=1}^{n-1} C_j\int_0^{2\pi}\cos(jt)\mu_2(dt)\\
& - B^0\int_0^{2\pi}\mu_2(dt) + \sum_{j=1}^{n-1} D_j\int_0^{2\pi}\sin(jt)\mu_3(dt) = 2\pi d,
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

其中 $e_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2,3$. 问题 (3.3) 的对偶问题为如下半无限规划:

$$
\begin{aligned}
\max_u\ & -d^{\mathrm{T}}u\\
\text{s.t.}\ & a_0^l(t)\leqslant\sum_{j=1}^{m}a_j(t)u_j\leqslant a_0^u(t), \quad \forall\, t\in[0,2\pi],\\
& b_0(t)\leqslant\sum_{j=1}^{m}b_j(t)u_j, \quad \forall\, t\in[0,2\pi],
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

其中 $u=(u_1,u_2,\dots,u_m)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^m$, $a_0^l(t)=(e_1)_1+\sum_{j=2}^n(e_1)_j\cos(jt)$, $a_0^u(t)=(e_2)_1+\sum_{j=2}^n(e_2)_j\cos(jt)$, $b_0(t)=(e_3)_1+\sum_{j=2}^n(e_3)_j\sin(jt)$, $a_k(t)=\sum_{j=1}^{n-1}C_{kj}\cos(jt)+(B^0)_k$, $b_k(t)=\sum_{j=1}^{n-1}D_{kj}\sin(jt)$. 由 $\cos(jt)$ 的性质, 问题 (3.4) 可等价于半无限规划

$$
\begin{aligned}
\min_u\ & d^{\mathrm{T}}u\\
\text{s.t.}\ & a_0^l(t)\leqslant\sum_{j=1}^{m}a_j(t)u_j\leqslant a_0^u(t), \quad \forall\, t\in[0,\pi],\\
& b_0(t)\leqslant\sum_{j=1}^{m}b_j(t)u_j, \quad \forall\, t\in[0,2\pi].
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

下面证明对偶问题 (3.5) 的解是有界的.

引理 3.1 如果问题 (2.2) 中的矩阵 $B \in \mathbb{R}^{m\times(2n-1)}$ 是满秩矩阵, 则问题 (3.5) 的可行集是有界的.

证明 只需要证明集合

$$\left\{u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^m \,\middle|\, a_0^l(t)\leqslant\sum_{j=1}^m a_k(t)u_k\leqslant a_0^u(t),\forall\, t\in[0,\pi]\right\}$$

是有界的. 首先, 证明取 m 个互不相同的点 $t_j\in[0,\pi]$ $(j=1,2,\ldots,m)$, 使得向量组

$$\{(a_1(t_j),a_2(t_j),\ldots,a_m(t_j))^{\mathrm{T}}\}_{j=1}^m$$

线性无关.

基于 $a_k(t)$ 的定义, 可得

$$(a_1(t),a_2(t),\ldots,a_m(t))^{\mathrm{T}}=FPh,$$

其中, $F=(B_0,C)$, $h=(1,\cos(t),\cos^2(t),\ldots,\cos^m(t))^{\mathrm{T}}$, $P\in\mathbb{R}^{m\times(m+1)}$ 满足如下等式:

$$\sum_{j=0}^m P_{kj}\cos^j(t)=\cos(kt),$$

这里, 若 $i>k$, 则 $P_{ij}=0$, 否则 P_{ij} 为 Chebyshev 系数. 从而

$$\begin{pmatrix} a_1(t_1) & a_1(t_2) & \cdots & a_2(t_m)\\ a_2(t_1) & a_2(t_2) & \cdots & a_2(t_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_m(t_1) & a_m(t_2) & \cdots & a_m(t_m)\end{pmatrix}=FPH,$$

其中

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ h_1 & h_2 & \cdots & h_m\\ h_1^2 & h_2^2 & \cdots & h_m^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_1^m & h_2^m & \cdots & h_m^m\end{pmatrix}$$

且 $h_j=\cos(t_j)$, $j=1,2,\ldots,m$.

显然 H 是一个标准的 Vandermonde 矩阵. 由于 $t_i\neq t_j$ $(i\neq j)$, 所以 h_j $(j=1,2,\ldots,m)$ 也各不相同. 基于 Vandermonde 矩阵的性质, 矩阵 H 是非奇异的. 又因为 B 是满秩的, 所以矩阵 F 满秩. 结合 P 非奇异, 可得 FPH 满秩, 这说明 $\{(a_1(t_j),a_2(t_j),\ldots,a_m(t_j))^{\mathrm{T}}\}_{j=1}^m$ 线性无关.

下面证明问题 (3.5) 的可行集是有界的. 如果问题 (3.5) 的可行集 $\mathbb{D}$ 无界, 则存在一个方向 $\ell=(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_m)^{\mathrm{T}}\neq 0$ 使得对于任意 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和 $u\in\mathbb{D}$, 都有 $u+\lambda\ell\in\mathbb{D}$, 即对于任意 λ, 都有

$$a_0^l(t)\leqslant\sum_{j=1}^m a_j(t)(u_j+\lambda\ell_j)\leqslant a_0^u(t),\quad j=1,2,\ldots,m,\quad \forall\, t\in[0,\pi].$$

这说明

$$\sum_{j=1}^{m} a_j(t)\ell_j = 0, \quad j=1,2,\ldots,m, \quad \forall\, t\in[0,\pi]. \tag{3.6}$$

由 $\{(a_1(t_j),a_2(t_j),\ldots,a_m(t_j))^{\mathrm{T}}\}_{j=1}^{m}$ 的线性无关性, 可得方程 (3.6) 只有零解, 这与 $\ell\neq 0$ 矛盾. 由此引理 3.1 得证. □

众所周知, 如果问题 (3.5) 满足 slater 条件, 且目标值是有界的, 则问题 (3.3) 和 (3.5) 的目标值相同. 为此可以适当地选择 e_1、e_2 和 e_3 使得问题 (3.5) 满足 slater 条件. 例如, 令 $(e_1)_1=-1$, $(e_2)_1=1$, $(e_3)_1=-1$, $(e_k)_j=0$ $(k=1,2,3,\ j\neq 1)$, 从而 $a_0^u(t)>0$, $a_0^l(t)<0$, $b_0(t)<0$ $(\forall\, t\in[0,\pi])$, 则 0 就是问题 (3.5) 的一个内点, 这表明规划 (3.5) 满足 slater 条件.

有了以上的讨论, 接下来对 Toeplitz 矩阵补全问题的最小秩上界的估计进行分析. 这里, 为了方便, 使用 v^* 表示 Toeplitz 矩阵补全问题 (问题 (2.2)) 的最优目标值.

定理 3.1 如果问题 (2.2) 中的矩阵 $B\in\mathbb{R}^{m\times(2n-1)}$ 是满秩矩阵, 并且对于给定的 e_1、e_2 和 e_3, 问题 (3.5) 满足 slater 条件, 则存在问题 (3.5) 的 3 个半无限约束条件

$$\begin{aligned}
a_0^l(t) &\leqslant \sum_{j=1}^{m} a_j(t)u_j, \quad \forall\, t\in[0,\pi],\\
\sum_{j=1}^{m} a_j(t)u_j &\leqslant a_0^u(t), \quad \forall\, t\in[0,\pi],\\
b_0(t) &\leqslant \sum_{j=1}^{m} b_j(t)u_j, \quad \forall\, t\in[0,2\pi]
\end{aligned}$$

在最优点处积极集的有限子集 Δ_1、Δ_2 和 Δ_3 且 $|\Delta_1|+|\Delta_2|+|\Delta_3|\leqslant m$ 使得

$$v^*\leqslant 2|\Delta_1|+2|\Delta_2|+2|\Delta_3|\leqslant \min\{2m,n\}.$$

证明 基于 slater 条件和引理 3.1 的结论, 对于给定的 e_1、e_2 和 e_3, 问题 (3.5) 的解集是非空且有界的. 设 $u^*=(u_1^*,u_2^*,\ldots,u_m^*)^{\mathrm{T}}$ 为问题 (3.5) 的最优解, 则存在 Lagrange 乘子即离散测度 μ_1、μ_2 和 μ_3 满足如下互补松弛条件:

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{j=1}^{m} a_j(t)u_j^* - a_0^l(t)\right)\mu_1(dt)=0, \tag{3.7}$$

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{j=1}^{m} a_0^u(t) - a_j(t)u_j^*\right)\mu_2(dt)=0, \tag{3.8}$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{m} b_j(t)u_j^* - b_0(t)\right)\mu_3(dt)=0. \tag{3.9}$$

这表明, 如果 $|\mathrm{supp}(\mu_1)|+|\mathrm{supp}(\mu_2)|+|\mathrm{supp}(\mu_3)|>m$, 则必然可以从 $\mathrm{supp}(\mu_i)$ $(i=1,2,3)$ 中选取含有 l_1 个点的集合 $\Delta_1=\{t_1,t_2,\ldots,t_{l_1}\}$ 满足 (3.7), 含有 l_2 个点的集合 $\Delta_2=\{s_1,s_2,\ldots,s_{l_2}\}$ 满足 (3.8), 含有 l_3 个点的集合 $\Delta_3=\{p_1,p_2,\ldots,p_{l_3}\}$ 满足 (3.9), 且 $l_1+l_2+l_3\leqslant m$, 即

$$\sum_{j=1}^{m} a_j(t_k)u_j^* - a_0^l(t_k)=0, \quad t_k\in\Delta_1,$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_0^u(s_k) - a_j(s_k)u_j^* = 0, \quad s_k \in \Delta_2,$$
$$\sum_{j=1}^{m} b_j(p_k)u_j^* - b_0(p_k) = 0, \quad p_k \in \Delta_3$$

成立, 且 $\{(a_k(t_1),\ldots,a_k(t_{l_1}),a_k(s_1),\ldots,a_k(s_{l_2}))^{\mathrm{T}}\}_{k=1}^m$ 线性无关.

现在定义离散测度如下:

$$\mu_1^* \backsim \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_{l_1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{l_1} \end{pmatrix}, \quad \mu_2^* \backsim \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{l_2} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{l_2} \end{pmatrix}, \quad \mu_3^* \backsim \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{l_3} \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_{l_3} \end{pmatrix}.$$

再通过对称延拓测度 μ_1^* 和 μ_2^* 至 $[0,2\pi]$, 可得问题 (3.3) 的解 $\overline{\mu}_1$、$\overline{\mu}_2$ 和 $\overline{\mu}_3$ 如下.

若 $t_{l_1}=\pi$, 则

$$\overline{\mu}_1 \backsim \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_{l_1-1} & t_{l_1} & 2\pi - t_{l_1-1} & \cdots & 2\pi - t_2 & 2\pi - t_1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{l_1-1} & \lambda_{l_1} & \lambda_{l_1-1} & \cdots & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

否则,

$$\overline{\mu}_1 \backsim \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_{l_1} & 2\pi - t_{l_1} & \cdots & 2\pi - t_2 & 2\pi - t_1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{l_1} & \lambda_{l_1} & \cdots & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

若 $s_{l_2}=\pi$, 则

$$\overline{\mu}_2 \backsim \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{l_2-1} & s_{l_2} & 2\pi - s_{l_2-1} & \cdots & 2\pi - s_2 & 2\pi - s_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{l_2-1} & \sigma_{l_2} & \sigma_{l_2-1} & \cdots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix},$$

否则,

$$\overline{\mu}_2 \backsim \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{l_2} & 2\pi - s_{l_2} & \cdots & 2\pi - s_2 & 2\pi - s_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{l_2} & \sigma_{l_2} & \cdots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix},$$
$$\overline{\mu}_3 = \mu_3^*.$$

若 $t_{l_1}=\pi$, 令

$$w_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(jt)\overline{\mu}_1(dt) = \frac{1}{2\pi}\Bigg(\sum_{\substack{k:t_k\in\Delta_1\\ t_k\neq t_{l_1}}} 2\lambda_k\cos(jt_k) + \lambda_{l_1}\cos(jt_{l_1})\Bigg), \quad j=0,\ldots,n-1;$$

否则, 令

$$w_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(jt)\overline{\mu}_1(dt) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k:t_k\in\Delta_1} 2\lambda_k\cos(jt_k), \quad j=0,\ldots,n-1.$$

若 $s_{l_2}=\pi$, 令

$$v_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(jt)\overline{\mu}_2(dt) = \frac{1}{2\pi}\Bigg(\sum_{\substack{k:s_k\in\Delta_2\\ s_k\neq s_{l_2}}} 2\sigma_k\cos(js_k) + \lambda_{l_2}\cos(js_{l_2})\Bigg), \quad j=0,\ldots,n-1;$$

否则, 令

$$v_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(jt)\overline{\mu}_2(dt) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k:s_k\in\Delta_2} 2\sigma_k\cos(js_k), \quad j=0,\dots,n-1,$$

且令

$$z_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(jt)\overline{\mu}_3(dt) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k:p_k\in\Delta_3} \tau_k\sin(jp_k), \quad j=1,\dots,n-1.$$

再令 $x_0=w_0-v_0, x_j=w_j-v_j+z_j, x_{-j}=w_j-v_j-z_j$ $(j=1,2,\dots,n-1)$, 则 $x=(x_{-n+1},\dots,x_{-1},x_0,x_1,\dots,x_{n-1})^{\mathrm{T}}$ 为问题 (2.2) 的可行解.

接下来, 通过研究 Toeplitz 矩阵 $\widetilde{T}\binom{w_0}{w}$、$\widetilde{T}\binom{v_0}{v}$ 和 $\widetilde{\widetilde{T}}\binom{0}{z}$ 的秩来估计 Toeplitz 矩阵 $T(x)$ 的秩的上界. 首先分析矩阵 $\widetilde{T}\binom{w_0}{w}$ 和 $\widetilde{T}\binom{v_0}{v}$ 的秩.

由 w_j 和 v_j 的计算可得

$$\widetilde{T}\begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi}V_1D_1V_1^*, \quad \widetilde{T}\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi}V_2D_2V_2^*,$$

其中若 $t_{l_1}=\pi$, 则

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_{l_1}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-t_{l_1-1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-t_1)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t_{l_1}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2\pi-t_{l_1-1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2\pi-t_1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)t_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)t_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)t_{l_1}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi-t_{l_1-1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi-t_1)} \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_{l_1} & & & \\ & & & & \lambda_{l_1-1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

否则,

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_{l_1}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-t_{l_1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-t_1)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t_{l_1}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2\pi-t_{l_1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2\pi-t_1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)t_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)t_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)t_{l_1}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi-t_{l_1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi-t_1)} \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_{l_1} & & & \\ & & & & \lambda_{l_1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

若 $s_{l_2} = \pi$, 则

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}s_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}s_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}s_{l_2}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi - s_{l_2-1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi - s_1)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2s_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2s_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2s_{l_2}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2\pi - s_{l_2-1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2\pi - s_1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)s_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)s_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)s_{l_2}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi - s_{l_2-1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi - s_1)} \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_{l_2} & & & \\ & & & & \sigma_{l_2-1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \sigma_1 \end{pmatrix},$$

否则,

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}s_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}s_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}s_{l_2}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi - s_{l_2})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi - s_1)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2s_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2s_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2s_{l_2}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2\pi - s_{l_2})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2\pi - s_1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)s_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}((n-1)s_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)s_{l_2}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi - s_{l_2})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi - s_1)} \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_{l_2} & & & \\ & & & & \sigma_{l_2} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \sigma_1 \end{pmatrix}.$$

由 D_1 和 D_2 的定义可知 $r(D_1) \leqslant 2l_1$, $r(D_2) \leqslant 2l_2$, 从而 $r(\widetilde{T}(\begin{smallmatrix} w_0 \\ w \end{smallmatrix})) \leqslant r(D_1) \leqslant 2l_1$, $r(\widetilde{T}(\begin{smallmatrix} v_0 \\ v \end{smallmatrix})) \leqslant r(D_2) \leqslant 2l_2$.

下面分析 $\widetilde{\widetilde{T}}(\begin{smallmatrix} 0 \\ z \end{smallmatrix})$ 的秩. 令

$$\begin{aligned} &\Delta_3^1 = \{p_k \in \Delta_3, p_k \in [0,\pi]\} = \{p_1, p_2, \ldots, p_{|\Delta_3^1|}\}, \\ &\Delta_3^2 = \{p_k \in \Delta_3, p_k \in (\pi, 2\pi]\} = \{p_{|\Delta_3^1|+1}, p_{|\Delta_3^1|+2}, \ldots, p_{l_3}\}, \\ &\alpha_j = \sum_{k: p_k \in \Delta_3^1} \tau_k \sin(jp_k), \quad \beta_j = \sum_{k: p_k \in \Delta_3^2} \tau_k \sin(jp_k), \end{aligned}$$

则 $\Delta_3 = \Delta_3^1 \cup \Delta_3^2$ 且 $z_j = \alpha_j + \beta_j$. 根据 α_j 和 β_j 的定义可得

$$\widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} = \widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} V_\alpha D_\alpha V_\alpha^*, \quad \widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} V_\beta D_\beta V_\beta^*,$$

其中若 $p_{|\Delta_3^1|} = \pi$, 则

$$V_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{|\Delta_3^1|}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi - p_{|\Delta_3^1|-1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi - p_1)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2p_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2p_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2p_{|\Delta_3^1|}} & \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(2\pi - p_{|\Delta_3^1|-1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2\pi - p_1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)p_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)p_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)p_{|\Delta_3^1|}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi - p_{|\Delta_3^1|-1})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi - p_1)} \end{pmatrix},$$

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \tau_1 & & & & & & \\ & \tau_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \tau_{|\Delta_3^1|} & & & \\ & & & & -\tau_{|\Delta_3^1|-1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\tau_1 \end{pmatrix},$$

否则,

$$V_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{|\Delta_3^1|}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi - p_{|\Delta_3^1|})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-p_1)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2p_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2p_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2p_{|\Delta_3^1|}} & \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(2\pi - p_{|\Delta_3^1|})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2\pi-p_1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)p_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)p_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)p_{|\Delta_3^1|}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi - p_{|\Delta_3^1|})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi-p_1)} \end{pmatrix},$$

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \tau_1 & & & & & & \\ & \tau_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \tau_{|\Delta_3^1|} & & & \\ & & & & -\tau_{|\Delta_3^1|} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\tau_1 \end{pmatrix}.$$

显然,

$$V_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-p_{l_3})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi - p_{|\Delta_3^1|+1})} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{|\Delta_3^1|+1}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{|\Delta_3^1|+2}} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{l_3}} \\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(2\pi-p_{l_3})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2\pi - p_{|\Delta_3^1|+1})} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2p_{|\Delta_3^1|+1}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2p_{|\Delta_3^1|+2}} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2p_{l_3}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi-p_{l_3})} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)(2\pi - p_{|\Delta_3^1|+1})} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)p_{|\Delta_3^1|+1}} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)p_{|\Delta_3^1|+2}} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)p_{l_3}} \end{pmatrix},$$

$$D_\beta = \begin{pmatrix} \tau_{l_3} & & & & & & \\ & \tau_{l_3-1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \tau_{|\Delta_3^1|+1} & & & \\ & & & & -\tau_{|\Delta_3^1|+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\tau_{l_3} \end{pmatrix}.$$

根据上述分解有 $r(\widetilde{\widetilde{T}}(\begin{smallmatrix} 0 \\ \alpha \end{smallmatrix})) \leqslant r(D_\alpha) \leqslant 2|\Delta_3^1|$, $r(\widetilde{\widetilde{T}}(\begin{smallmatrix} 0 \\ \beta \end{smallmatrix})) \leqslant r(D_\beta) \leqslant 2|\Delta_3^2|$, 从而,

$$r\left(\widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}\right) \leqslant r\left(\widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right) + r\left(\widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}\right) \leqslant 2(|\Delta_3^1| + |\Delta_3^2|) \leqslant 2l_3.$$

根据上述的讨论可得

$$
\begin{aligned}
r(T(x)) &= r\left(T\begin{pmatrix} w-v-z \\ w_0-v_0 \\ w-v+z \end{pmatrix}\right) \\
&\leqslant r\left(\widetilde{T}\begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix}\right) + r\left(\widetilde{T}\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right) + r\left(\begin{pmatrix} 0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-1} \\ -z_1 & 0 & z_1 & \cdots & z_{n-2} \\ -z_2 & -z_1 & 0 & \cdots & z_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -z_{n-1} & -z_{n-2} & -z_{n-3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= r\left(\widetilde{T}\begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix}\right) + r\left(\widetilde{T}\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right) + r\left(\widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}\right) \\
&\leqslant 2l_1 + 2l_2 + 2l_3 \\
&\leqslant 2m.
\end{aligned}
$$

又由于 $v^* \leqslant n$, 因此有 $v^* \leqslant \min\{2m, n\}$, 定理 3.1 成立. □

说明 1 数值实验结果也验证了定理结论的正确性. 在实验中, 求解如下的 Toeplitz 矩阵补全问题:

$$
\begin{aligned}
\min_{X\in\mathbb{R}^{5\times 5}} \quad & r(X) \\
\text{s.t.} \quad & X_{13} = -2, \\
& X_{31} = 4, \\
& X \text{ 是 Toeplitz 矩阵},
\end{aligned}
$$

即

$$
B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.
$$

取 $e_1 = (-1, 0, 0, 0, 0)$, $e_2 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $e_3 = (-1, 0, 0, 0, 0)$, 求解如下规划:

$$
\begin{aligned}
& \min\ e_1^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix} + e_2^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix} + e_3^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \\
& \text{s.t.}\ (B_- + B_+)(w-v) + B_0(w_0 - v_0) + (-B_- + B_+)z = d, \\
& \qquad \widetilde{T}\begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \widetilde{T}\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \widetilde{\widetilde{T}}\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} + \alpha I \succeq 0.
\end{aligned}
$$

所得可行解 Toeplitz 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1.0000 & 3.1213 & -2.0000 & 3.1213 & 1.0000 \\ -1.1213 & 1.0000 & 3.1213 & -2.0000 & 3.1213 \\ 4.0000 & -1.1213 & 1.0000 & 3.1213 & -2.0000 \\ -1.1213 & 4.0000 & -1.1213 & 1.0000 & 3.1213 \\ 1.0000 & -1.1213 & 4.0000 & -1.1213 & 1.0000 \end{pmatrix},$$

其秩是 3, 而问题的线性约束个数 $m=2$, 由此可见数值结果与定理 3.1 的理论结果一致.

众所周知, Hankel 矩阵可由 Toeplitz 矩阵旋转而得, 因此根据定理 3.1 可得 Hankel 矩阵补全问题的最小秩的上界.

推论 3.1 Hankel 矩阵补全问题

$$\begin{aligned} &\min\ r(H) \\ &\text{s.t. } \mathscr{B}(H)=d, \\ &\qquad H \text{ 是 Hankel 矩阵} \end{aligned}$$

的上界也为 $\min\{2m,n\}$, 其中, $H\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是决策变量, 线性变换 $\mathscr{B}:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^m$, $d\in\mathbb{R}^m$ 是给定的向量.

4 结论

本文基于三角矩和半无限问题的相关理论, 得出 Toeplitz 矩阵补全问题最小秩的上界的理论结果, 证明了其上界小于该问题线性约束个数的 2 倍. 这个结果解决了现有求解这类问题的方法中需要猜测目标矩阵秩的问题. 本文给出了有关 Toeplitz 矩阵补全问题的秩的上界, 但对其下界仍未获得任何理论结果. 因此, 寻找一种新的方法来提供矩阵补全问题中秩的下界是未来研究的一个方向.

参考文献

1 Akhiezer N I, Krein M G. Some Questions in the Theory of Moments. Providence: Amer Math Soc, 1962
2 Argyriou A, Evgeniou T, Pontil M. Multi-task feature learning. Adv Neural Inf Process Syst, 2007, 19: 41–48
3 Bonnans J F, Shapiro A. Perturbation Analysis of Optimization Problems. New York: Springer, 2013
4 Cai J F, Candès E J, Shen Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion. SIAM J Optim, 2010, 20: 1956–1982
5 Candès E J, Recht B. Exact matrix completion via convex optimization. Found Comput Math, 2009, 9: 717–772
6 Chen Y, Chi Y. Robust spectral compressed sensing via structured matrix completion. IEEE Trans Inform Theory, 2013, 60: 6576–6601
7 Cohen N, Dancis J. Inertias of block band matrix completions. SIAM J Matrix Anal Appl, 1998, 19: 583–612
8 Dou H J, Shi J C, Lei Q, et al. DOA estimation of coherent signals under mutual couple based on Toeplitz matrix. J Beijing Univ Tech, 2012, 38: 1857–1861
9 Drusvyatskiy D, Wolkowicz H. The many faces of degeneracy in conic optimization. Found Trends Optim, 2017, 3: 77–170
10 Ellis R L, Lay D C. Rank-preserving extensions of band matrices. Linear Multilinear Algebra, 1990, 26: 147–179
11 Fawzi H, Gouveia J, Parrilo P A, et al. Positive semidefinite rank. Math Program, 2015, 153: 133–177
12 Fazel M. Matrix rank minimization with applications. PhD Thesis. Palo Alto: Stanford University, 2002

13 Fazel M, Pong T K, Sun D, et al. Hankel matrix rank minimization with applications to system identification and realization. SIAM J Matrix Anal Appl, 2013, 34: 946–977
14 Gouveia J, Robinson R Z, Thomas R R. Worst-case results for positive semidefinite rank. Math Program, 2015, 153: 201–212
15 Hu Y, Zhang D, Liu J, et al. Accelerated singular value thresholding for matrix completion. In: Proceedings of the 18th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York: ACM, 2012, 298–306
16 Huang S, Wolkowicz H. Low-rank matrix completion using nuclear norm minimization and facial reduction. J Global Optim, 2018, 72: 5–26
17 Landau H J. The classical moment problem: Hilbertian proofs. J Funct Anal, 1980, 38: 255–272
18 Liu Z, Vandenberghe L. Interior-point method for nuclear norm approximation with application to system identification. SIAM J Matrix Anal Appl, 2010, 31: 1235–1256
19 Ma S, Goldfarb D, Chen L. Fixed point and Bregman iterative methods for matrix rank minimization. Math Program, 2011, 128: 321–353
20 Ma S, Wang F, Wei L, et al. Robust principal component analysis using facial reduction. Optim Eng, 2020, 21: 1195–1219
21 Shaw A K, Pokala S, Kumaresan R. Toeplitz and Hankel matrix approximation using structured approach. In: Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'98. Seattle: IEEE, 1998, 2349–2352
22 Sun R, Luo Z Q. Guaranteed matrix completion via non-convex factorization. IEEE Trans Inform Theory, 2016, 62: 6535–6579
23 Toh K C, Yun S. An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized linear least squares problems. Pac J Optim, 2010, 6: 615–640
24 Tomasi C, Kanade T. Shape and motion from image streams under orthography: A factorization method. Int J Comput Vision, 1992, 9: 137–154
25 Wang C L, Li C. A mean value algorithm for Toeplitz matrix completion. Appl Math Lett, 2015, 41: 35–40
26 Wang C L, Li C, Wang J. A modified augmented lagrange multiplier algorithm for Toeplitz matrix completion. Adv Comput Math, 2016, 42: 1209–1224
27 Wang C L, Li C, Wang J. Two modified augmented Lagrange multiplier algorithms for Toeplitz matrix compressive recovery. Comput Math Appl, 2017, 74: 1915–1921
28 Woerdeman H J. Minimal rank completions of partial banded matrices. Linear Multilinear Algebra, 1993, 36: 59–68
29 Woerdeman H J. Hermitian and normal completions. Linear Multilinear Algebra, 1997, 42: 239–280
30 Xu Y, Yan X H, Guo J H, et al. An upper bound on the minimum rank of a symmetric Toeplitz matrix completion problem. Optimization, 2023, 72: 2399–2414

Estimation of the upper bound on the minimum rank of an asymmetric Toeplitz matrix completion problem

Xihong Yan, Yi Xu & Tianyu Li

Abstract In this paper, we consider a structured matrix completion problem, the Toeplitz matrix completion problem, which has a wide application in diverse areas such as machine learning, signal processing, and image identification. The efficiency of existing algorithms for solving the problem depends on the estimation of the rank of the optimal Toeplitz matrix. In this paper, we provide an upper bound on the rank of the optimal solution of the asymmetric Toeplitz completion problem based on the theorems from the trigonometric moment problem and semi-infinite problems. We prove that its upper bound is less than twice the number of linear constraints of the completion problem.

Keywords **Toeplitz matrix, completion problem, trigonometric moment problem, semi-infinite problem**

MSC(2020) 15A18, 90C20, 90C25

doi: 10.1360/SSM-2022-0105