



论文

经验中子星质量方程在约束核物质状态方程参数中的应用

谢文杰*

运城学院物理与电子工程系, 运城 044000

*联系人, E-mail: wenjiexie@yeah.net

收稿日期: 2023-11-13; 接受日期: 2023-12-26; 网络出版日期: 2024-05-27

山西省基础 Research 计划(编号: 20210302123085)、山西省留学人员科技活动择优项目(编号: 20220037)和运城学院学科建设项目资助

摘要 联合多种数据已成为约束核物质状态方程的有效方法之一. 中子星的经验质量方程提供了天体观测量与地面实验室观测量之间的关联, 为相关研究提供了便利的基础. 本文基于 ^{208}Pb 的中子皮厚度和偶极极化率的实验数据, 在中子星模型和贝叶斯统计方法的理论框架下, 计算了核物质状态方程参数、中子星半径、中子星潮汐形变系数以及中子星引力红移的后验概率分布. 研究结果显示, 中子星的经验质量方程在约束核物质状态方程方面具有显著效果. 中子皮厚度数据能够提供与中子星半径观测数据相媲美的约束效果. 基于PREX-II合作组发布的中子皮厚度数据, 中子星经验质量方程对应更硬的核物质状态方程. 通过计算1.4倍太阳质量中子星引力红移的后验概率分布, 发现源GS1826-24的质量有较大概率率为1.4倍太阳质量. 结合中子星半径观测和 ^{208}Pb 的中子皮厚度与偶极极化率的联合数据, 发现相对于中子皮厚度数据, 中子星半径和偶极极化率数据在约束核物质状态方程参数方面起着更为重要的作用. ^{208}Pb 的偶极极化率数据表现出最佳的约束效果, 突显了在解决核物质状态方程这一复杂问题中实验数据的丰富性和精确性的重要性.

关键词 核物质状态方程参数, 贝叶斯统计方法, 中子星经验质量方程, ^{208}Pb 的中子皮厚度, ^{208}Pb 的偶极极化率

PACS: 02.70.Uu, 26.60.-c, 21.65.-f

1 引言

理解致密丰中子核物质的状态方程是许多天体观测^[1-5]和地面核实验^[6-9]的主要科学目标之一, 但确定核物质的状态方程却是一个极具挑战性的任务^[10,11]. 核物质状态方程的计算以平均核子能量作为关键输入量, 由对称部分和非对称部分组成^[12]:

$$E(\rho, \delta) = E_0(\rho) + E_{\text{sym}}(\rho) \cdot \delta^2 + O(\delta^4). \quad (1)$$

这个公式中第一项代表对称部分, 其余项则是非对称部分. 在忽略高阶项的情况下, 非对称部分主要由核物质对称能 $E_{\text{sym}}(\rho)$ 贡献. 对于对称核物质状态方程部分, 通过分析重离子碰撞实验数据, 已经得到相对较好的约束^[6]. 然而, 至今对非对称部分的了解仍然有限. 在过去的近40年里, 几乎所有的核理论都被用来计算和约束核物质对称能, 但所获取的对称能信息仅限于饱和密度附近, 高密区域核物质对称能的行为尚无法严

引用格式: 谢文杰. 经验中子星质量方程在约束核物质状态方程参数中的应用. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2024, 54: 262011

Xie W-J. Implications of the empirical neutron-star mass formula in constraining the parameters of the nuclear equation of state (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2024, 54: 262011, doi: 10.1360/SSPMA-2023-0405

格确定 [4, 7, 13].

核物质对称能可用来衡量核物质系统的丰中子程度, 它代表将对称核物质系统转变为纯中子物质系统所需的能量. 其数值可近似通过纯中子物质与对称核物质之间的能量差来计算. 2017 年的引力波事件(GW170817)使基于中子星观测研究核物质对称能成为热门课题 [14–17]. 尽管中子星的天然条件使其可视为研究核物质状态方程的理想天然实验室, 但由于中子星遥不可及, 其内部构成复杂, 观测误差较大, 使得这一研究也充满挑战. 最近的研究发现结合陆地实验室和天体观测可以更好地约束核物质对称能 [18–21], 而且越来越多的研究显示基于单一类型数据已无法有效地约束核物质对称能. 这就迫切需要联合各种观测数据, 尤其是需要联合陆地实验室数据和中子星观测数据来共同提取核物质对称能的高密信息, 而描述中子星特征的各参量之间的普适性关系为这一研究提供了较大的便利. 在各种普适性关系中, 最为著名的是 I-Love-Q 关系 [22, 23]. 除此之外, 还有引力结合能-致密度 $E_g\text{-}\beta$ 、引力结合能-潮汐形变 $E_g\text{-}\Lambda$ [24] 以及中子星最大半径/最大质量-中子星中心压力-中子星中心能量密度 $R_{\text{max}}/M_{\text{max}}\text{-}P_c\text{-}\epsilon_c$ [25] 等. 这些关系的重要作用在于, 当某些量已知或可测量时, 可以计算和预测其他量. 特别是在某些量难以观测时, 可利用较易观测的量去推测难以观测的量.

有限核的中子皮厚度可通过多种方法计算, 比如 Hartree-Fock 理论 [26, 27]、核液滴模型 [28] 以及信息熵理论 [29] 等. 最近, Sotani 等人 [26] 基于 Skyrme 相互作用理论, 成功建立了中子星质量与 ^{208}Pb 中子皮厚度 ($M\text{-}\Delta R_{\text{np}}$)、中子星引力红移与 ^{208}Pb 中子皮厚度 ($z\text{-}\Delta R_{\text{np}}$)、中子星质量与 ^{208}Pb 偶极极化率 ($M\text{-}\alpha_D$) 以及中子星引力红移与 ^{208}Pb 偶极极化率 ($z\text{-}\alpha_D$) 之间的普适性关系. 这些关系直接将天体观测与陆地实验室数据相结合, 可同时利用中子皮厚度与中子星观测数据约束核物质状态方程. 在我们目前的研究中, 借助上述普适性关系, 基于 1.4 倍太阳质量中子星半径的观测数据和 ^{208}Pb 中子皮厚度、偶极极化率的实验数据, 结合贝叶斯统计方法和中子星模型, 推断了核物质状态方程理论参数的后验概率分布. 此外, 我们也深入探讨了来自源 GS1826-24 的引力红移观测数据对核物质状态方程的约束情况 [30]. 这一系列研究为我们深入理解核物质状态方程提供了新的视角和机遇.

2 理论方法

2.1 中子星半径和质量的计算

目前所采用的中子星模型已在文献 [31–33] 中详尽描述. 为确保本文的完整性和为便于后续讨论, 此处将简要概括本研究采用的中子星物质状态方程以及中子星半径和质量的计算方法.

本文所研究的中子星由中子、质子、电子和 μ 子组成, 且中子星内部不涉及由强子向夸克的相变过程. 中子星由外壳、内壳和核心三部分组成, 外壳部分的状态方程采用文献 [34] 中的形式, 而内壳部分采用文献 [35] 中的形式, 即 BPS-EOS 和 NV-EOS. 内壳与核心的临界密度由热动力学方法计算得到. 中子星的半径和质量是通过求解 Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV) 方程得到, 即解下述方程 [36, 37]:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G(m(r) + 4\pi r^3 p/c^2)(\epsilon + p/c^2)}{r(r - 2Gm(r)/c^2)}, \quad (2)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi \epsilon r^2, \quad (3)$$

上述方程中的 G 代表引力常数, c 是光速, $m(r)$ 表示中子星的引力质量, r 则是中子星的半径. p 代表中子星内部的压力, ϵ 为能量密度. 通常情况下, 中子星内部压力 p 与能量密度 ϵ 之间的关系即为中子星物质的状态方程. 在本研究中, 中子星内部的压力和能量密度由下式计算:

$$p(\rho, \delta) = \rho^2 \frac{d\epsilon(\rho, \delta)/\rho}{d\rho}, \quad (4)$$

$$\epsilon(\rho, \delta) = \rho E(\rho, \delta) + \rho M + \epsilon_l(\rho, \delta),$$

这里的 M 代表平均核子质量. $E(\rho, \delta)$ 表示单一核子的能量, 其表达式为方程 (1). E_0 和 E_{sym} 的近似表达式如下 [18, 38–40]:

$$E_0(\rho) \approx E_0(\rho_0) + \frac{K_0}{2} \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right)^2 + \frac{J_0}{6} \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right)^3, \quad (5)$$

$$E_{\text{sym}}(\rho) \approx E_{\text{sym}}(\rho_0) + L \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right) + \frac{K_{\text{sym}}}{2} \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right)^2 + \frac{J_{\text{sym}}}{6} \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right)^3, \quad (6)$$

这里 $E_0(\rho) \approx -16 \text{ MeV}$. K_0 是核物质的不可压缩系数, J_0 为对称核物质的偏度参数. $E_{\text{sym}}(\rho_0)$ 表示饱和密度 ρ_0 处对称能的值, L 代表对称能的斜率参数,

而 K_{sym} 和 J_{sym} 则分别表示对称能的曲率和偏度参数. 在本研究中, 这6个参数被视为独立参数, 可在其先验范围内随机取值, 最终的数值由观测和实验数据决定. 值得强调的是, 式(5)和(6)具有双重意义, 在 $\rho \rightarrow \rho_0$ 时, 上述表达式为在饱和密度处的泰勒级数展开, 但在 $\rho > \rho_0$ 区域, 上述表达式则为参数化形式的状态方程. 在本文中, 我们只展开至3次项, 忽略更高阶项, 一方面由于截至目前没有理论和实验能提供更高阶参数的信息, 另一方面, 更高阶参数的加入并不会过多影响目前所研究密度区域的结果 [32].

表达式(4)中的 $\epsilon(\rho, \delta)$ 代表轻子的能量密度, 经由非相互作用的费米气体模型计算得出 [36, 38]. 核物质的同位旋不对称度 δ 是通过电中性条件和 β 平衡条件计算得到的, 即

$$\rho_p = \rho_e + \rho_\mu, \quad (7)$$

$$\mu_n - \mu_p = \mu_e = \mu_\mu \approx 4\delta E_{\text{sym}}(\rho), \quad (8)$$

其中, ρ_p , ρ_e 和 ρ_μ 分别代表质子、电子和 μ 子的密度, 而 $\mu_n = \partial\epsilon(\rho, \delta)/\partial\rho_n$ 表示中子的化学势.

2.2 中子星经验质量方程和贝叶斯统计方法

根据文献[26]的论述, 中子星质量与 ^{208}Pb 中子皮厚度、中子星质量与 ^{208}Pb 偶极极化率以及中子星引力红移与 ^{208}Pb 中子皮厚度、引力红移与 ^{208}Pb 偶极极化率之间存在着如下关系:

$$\frac{M}{M_\odot} = a_0 + a_1 \left(\frac{\Delta R_{\text{np}}^{\text{Pb}}}{0.2 \text{ fm}} \right), \quad (9)$$

$$\frac{M}{M_\odot} = b_0 + b_1 \left(\frac{E_{\text{sym}}(\rho_0)}{30 \text{ MeV}} \frac{\alpha_D^{\text{Pb}}}{20 \text{ fm}^3} \right), \quad (10)$$

$$z = c_0 + c_1 \left(\frac{\Delta R_{\text{np}}^{\text{Pb}}}{0.2 \text{ fm}} \right), \quad (11)$$

$$z = d_0 + d_1 \left(\frac{E_{\text{sym}}(\rho_0)}{30 \text{ MeV}} \frac{\alpha_D^{\text{Pb}}}{20 \text{ fm}^3} \right), \quad (12)$$

其中中子星引力红移 $z = (1 - 2M/R)^{-1/2} - 1$, a_i , b_i , c_i 和 d_i 可写为 [26]

$$a_i = \sum_{j=0}^4 a_{ij} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^j, b_i = \sum_{j=0}^4 b_{ij} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^j, \quad (13)$$

$$c_i = \sum_{j=0}^4 c_{ij} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^j, d_i = \sum_{j=0}^4 d_{ij} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^j, \quad (14)$$

其中 i 取值为0和1, 其具体数值列于表1. 此处的 ρ_c 指中子星的中心密度. 值得注意的是, 本文仅考虑质量为1.4倍太阳质量的中子星, 即 $M/M_\odot=1.4$.

贝叶斯统计方法的核心是贝叶斯公式, 即

$$P(\mathcal{M}|D) = \frac{P(D|\mathcal{M})P(\mathcal{M})}{\int P(D|\mathcal{M})P(\mathcal{M})d\mathcal{M}}, \quad (15)$$

这里 $P(\mathcal{M}|D)$ 代表后验概率分布, 能量化基于观测或实验数据 D 的理论模型 $\mathcal{M}$ 的不确定性. $P(D|\mathcal{M})$ 是似然函数, 用以评估理论模型描述实验数据的准确程度. $P(\mathcal{M})$ 表示先验概率分布, 即理论模型与实验数据比较之前的已知信息. 分母中的 $\int P(D|\mathcal{M})P(\mathcal{M})d\mathcal{M}$ 是归一化常数.

在当前研究中, 理论参数为方程(5)和(6)中的6个状态方程参数, 均采用均匀分布形式的先验分布. 它们的先验范围分别为: $220 \text{ MeV} \leq K_0 \leq 260 \text{ MeV}$ [41, 42], $-800 \text{ MeV} \leq J_0 \leq 400 \text{ MeV}$, $-400 \text{ MeV} \leq K_{\text{sym}} \leq 100 \text{ MeV}$, $-200 \text{ MeV} \leq J_{\text{sym}} \leq 800 \text{ MeV}$ [43, 44], $28.5 \text{ MeV} \leq E_{\text{sym}}(\rho_0) \leq 34.9 \text{ MeV}$, $30 \text{ MeV} \leq L \leq 90 \text{ MeV}$ [2, 45].

似然函数可表示为

$$P[D|\mathcal{M}(p_{1,2,\dots,6})] = P_{\text{filter}} \times P_{\text{mass,max}} \times P_{\text{obs}}, \quad (16)$$

其中, P_{filter} 是中子星物质状态方程需满足的热力学稳定条件、因果条件和中子星壳-核临界压力为正值的的要求. $P_{\text{mass,max}}$ 则确保中子星物质状态方程能支撑目前观测到的最大中子星质量, 本文中采用的最大观测质量为 $1.97M_\odot$. P_{obs} 表示观测或实验数据对似然函数的贡献, 可表示为

$$P_{\text{obs}} = \prod_{i=1}^N P_{\text{obs},i}. \quad (17)$$

在这个公式中, N 代表似然函数中采用的数据类型数

表 1 表达式(13)和(14)中的参数值 [26]

Table 1 The values of coefficients in eqs. (13) and (14) [26]

j	0	1	2	3	4
a_{0j}	0.8777	-2.0127	0.9596	-0.13770	0.0047513
a_{1j}	-0.7924	1.7396	-0.3281	-0.04253	0.0117856
b_{0j}	1.4048	-3.1188	1.0989	-0.08108	-0.006288
b_{1j}	-1.1036	2.3765	-0.3867	-0.08429	0.019227
c_{0j}	0.076109	-0.2565	0.1586	-0.035961	0.0034092
c_{1j}	-0.084495	0.2528	-0.1063	0.025645	-0.0027859
d_{0j}	0.1340	-0.4237	0.2239	-0.051039	0.0050455
d_{1j}	-0.1191	0.3508	-0.1430	0.033876	-0.0036785

量, 比如在本文使用了中子星半径、中子星引力红移、 ^{208}Pb 的中子皮厚度和偶极极化率四种类型数据, 见表 2. 若使用了两种数据类型, $N=2$. $p_{\text{obs},i}$ 可以表示为

$$p_{\text{obs},i} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{obs},j}} \exp\left[-\frac{(A_{\text{th},j} - A_{\text{obs},j})^2}{2\sigma_{\text{obs},j}^2}\right], \quad (18)$$

其中 n 表示第 i 种数据类型的数量, 如对于中子星半径数据类型, $n=7$. $A_{\text{th},j}$ 和 $A_{\text{obs},j}$ 分别代表理论值和实验值. $\sigma_{\text{obs},j}$ 则是第 j 个观测数据的 1σ 误差范围.

在贝叶斯统计方法中, 首先需随机抽取理论模型参数, 并计算此组参数的先验概率, 其次要计算这组参数的似然函数, 采用 Metropolis-Hastings 算法和马尔可夫链-蒙特卡罗方法模拟这组参数的后验概率分布. 最后, 通过对其他参数进行积分, 可得到某一参数及任意两参数之间关联的后验概率分布. 为保证随机抽样源自各参数的均衡分布, 需要舍弃 Burn-in 过程中的抽样. 所舍弃的抽样步数与参数数量相关, 参数越多, 需舍弃的步数越多. 对本文中的情况而言, 我们舍弃了

表 2 目前工作中所采用的中子星半径、质量和引力红移的观测数据以及 ^{208}Pb 的中子皮厚度、偶极极化率的实验数据

Table 2 The radius, mass and redshift data of neutron stars as well as the neutron skin thickness and dipole polarizability data for ^{208}Pb used in this work

Mass ($M_{\odot}$)	Radius R (km)	Source and reference
1.4	$11.9^{+1.4}_{-1.4}$ (90% CFL)	GW170817 [15]
1.4	$10.8^{+2.1}_{-1.6}$ (90% CFL)	GW170817 [17]
1.4	$11.7^{+1.1}_{-1.1}$ (90% CFL)	QLMXBs [46]
$1.34^{+0.15}_{-0.16}$	$12.71^{+1.14}_{-1.19}$ (68% CFL)	PSR J0030+0451 [47]
$1.44^{+0.15}_{-0.14}$	$13.0^{+1.2}_{-1.0}$ (68% CFL)	PSR J0030+0451 [48]
$2.08^{+0.07}_{-0.07}$	$13.7^{+2.6}_{-1.5}$ (68% CFL)	PSR J0740+6620 [48]
$0.77^{+0.20}_{-0.17}$	$10.4^{+0.86}_{-0.78}$ (68% CFL)	HESS J1731-347 [49]
Nucleus	α_D (fm^3)	Reference
^{208}Pb	$20.1^{+0.2}_{-0.2}$ (68% CFL)	[50]
Nucleus	ΔR_{np} (fm)	Reference
^{208}Pb	$0.283^{+0.071}_{-0.071}$ (68% CFL)	[51]
^{208}Pb	$0.211^{+0.054}_{-0.063}$ (68% CFL)	[52]
^{208}Pb	$0.18^{+0.018}_{-0.018}$ (68% CFL)	[26]
Source	z	Reference
GS1826-24	$0.29^{+0.04}_{-0.04}$ (68% CFL)	[30]

50000 步, 在接下来的 800000 步中模拟参数的后验概率分布 [31–33, 53].

3 结果与讨论

3.1 基于 ^{208}Pb 中子皮厚度数据对核物质状态方程参数的约束

中子星经验质量方程 (9) 将 ^{208}Pb 的中子皮厚度与中子星的质量联系在一起, 这使得我们能够利用中子皮厚度数据来约束中子星物质的状态方程. 在本文中, 我们仅考虑 1.4 倍太阳质量的中子星, 因此方程 (9) 可简化为 $\frac{\Delta R_{\text{np}}}{0.2 \text{ fm}} = (1.4 - a_0)/a_1$. 参数 a_0 和 a_1 可通过计算中子星的中心密度获得. 我们能够借助中子星模型和中子星经验质量方程计算出 ΔR_{np} 的理论值, 随后将其与实验数据对比, 获得相应的似然函数. 最后, 运用贝叶斯公式, 可以获得后验概率.

图 1 展示了基于 3 种 ^{208}Pb 中子皮厚度数据推断的

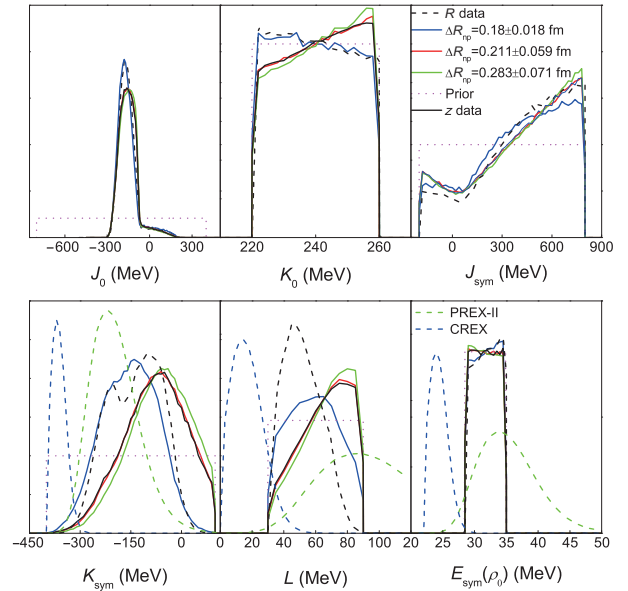


图 1 (网络版彩图) 基于 ^{208}Pb 的三种中子皮厚度数据以及文献 [30] 中预言的中子星引力红移数据得到的核物质状态方程参数的后验分布. 为了比较起见, 图中还呈现了根据中子星半径的观测数据得到的结果以及六个参数的先验分布 [33]

Figure 1 (Color online) Posterior probability density distributions of the parameters of the nuclear equation of state obtained from the three types of the neutron skin thickness data and the redshift data proposed in ref. [30]. For comparison, the results obtained from the neutron star radius data [33] and the prior probability distributions for the six parameters are included.

核物质状态方程参数的后验分布. 相关的中子皮厚度数据列在表2中. 为了与之前的工作进行比较, 我们还在图中加入了基于中子星半径观测数据得到的结果(图例标注为R data, 数据来自文献[54]), 需要指出的是, 这里的中子星半径数据不包含源HESS J1731-347的观测数据. 此外, 图中还展示了基于PREX-II和CREX合作组发布的 ^{208}Pb 和 ^{48}Ca 中子皮厚度数据, 结合核液滴模型和贝叶斯统计方法计算得到的核物质对称能参数 L , K_{sym} 和 $E_{\text{sym}}(\rho_0)$ 的后验分布, 这些结果的来源可以在文献[54]的图4中找到. 进一步, 根据文献[30]中对源GS1826-24引力红移的预测结果(表2), 我们假设该源的质量为太阳质量的1.4倍, 并将运用中子星模型和贝叶斯统计方法的理论框架推断出的核物质状态方程参数的后验概率分布也包含在图中.

如图1所示, 中子星经验质量方程在约束核物质状态方程的过程中发挥着显著的作用. 特别需要注意的是, 在计算中采用 $\Delta R_{\text{np}} = 0.18^{+0.018}_{-0.018}$ fm时所得到的结果与之前基于中子星半径计算的结果基本一致, 也与文献[27]中的结果一致, 其中基于 ^{208}Pb 中子皮厚度数据 $\Delta R_{\text{np}} = 0.20 \pm 0.02$ fm得到的对称能参数 L 的68%置信区间为 75^{+17}_{-25} MeV. 另外, 其他两个较大的中子皮厚度数据对应着较硬的状态方程, 这种现象不仅在核物质对称能部分显现, 也在对称核物质状态方程部分有所体现. 虽然无法进行与PREX-II结果的公平比较, 因为本文中参数 L 的先验范围与之不同, 但从图中的结果可以看出, 由中子星经验质量方程得到的状态方程比PREX-II的更为坚硬. 需要指出的是, 这里为了更直观地进行比较, 图中关于CREX的结果未进行归一化. 源GS1826-24的引力红移数据对应的结果与两个较大的中子皮厚度数据得到的结果高度一致. 相同的现象也出现在中子星半径和潮汐形变系数的结果上, 如图2所示. 其中角标1.4和2.0分别表示1.4倍和2.0倍太阳质量. 图2中关于1.4倍太阳质量潮汐形变系数的后验分布呈现锯齿状, 这是由于统计数据不足造成的.

3.2 基于 ^{208}Pb 偶极极化率数据对核物质状态方程参数的约束

先前研究表明, ^{208}Pb 的偶极极化率与饱和密度处的对称能及对称能斜率参数存在直接关联[55]: $\alpha_D E_{\text{sym}}(\rho_0) = 480 + 330 L_{100}$, $L_{100} = L/100$ MeV. 这表

明 α_D 与核物质对称能以及核物质状态方程紧密相关, 其实验数据可用来约束核物质状态方程的理论参数. 本文利用了中子星经验质量方程(式(10))以及 α_D 的实验数据(表2)来约束核物质状态方程的理论参数, 计算结果详见图3.

在当前理论参数的先验范围内, 特别是对于 $E_{\text{sym}}(\rho_0)$ 的先验范围, ^{208}Pb 的偶极极化率数据可更有效地约束核物质状态方程的参数. 相对于已有的中子星半径数据结果, α_D 数据更倾向于较小的 K_{sym} , 同时对 $E_{\text{sym}}(\rho_0)$ 非常敏感. 为了探索这种敏感性, 我们调整 $E_{\text{sym}}(\rho_0)$ 的先验范围至 $22 \text{ MeV} \leq E_{\text{sym}}(\rho_0) \leq 55 \text{ MeV}$ [56]. 计算结果如图3中红色实线所示, 这一变化呈现了一个偏硬的状态方程, $E_{\text{sym}}(\rho_0)$ 的最概然值约为38 MeV.

在利用中子星经验质量方程和中子皮厚度、偶极极化率数据提取核物质状态方程参数不确定范围的过程中, 可利用方程(11)和(12)同时得到1.4倍太阳质量中子星引力红移的不确定范围, 结果如图4所示. 在用方程(11)和(12)计算引力红移 z 时, 上栏图中的中子皮厚度取 $\Delta R_{\text{np}} = 0.211^{+0.054}_{-0.063}$ fm, 而下栏中取 $\Delta R_{\text{np}} = 0.283^{+0.071}_{-0.071}$ fm. 文献[30]中预言的源GS1826-24的引力红移范围在95%的置信水平下为0.22–0.34, 图中用黑色虚线表示. 尽管本文假设源GS1826-24的

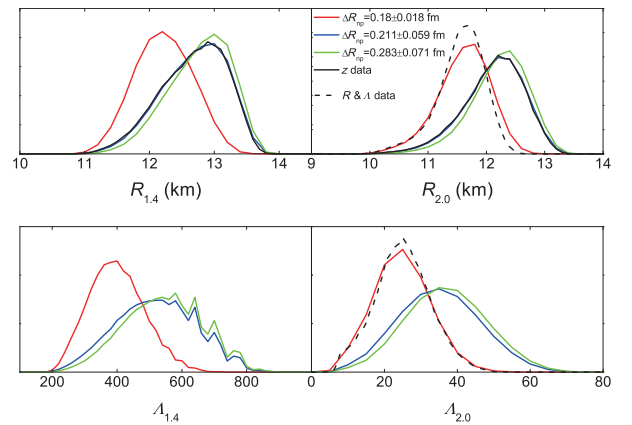


图2 (网络版彩图)与图1一致, 但展示的是1.4倍(左)和2.0倍(右)太阳质量中子星的半径和潮汐相变系数的后验概率分布. 为了比较, 图中还包括了基于中子星半径(上)和潮汐形变(下)的观测数据得到的结果[33]

Figure 2 (Color online) Same as in Figure 1, but showing the results for the radii (upper) and tidal deformability (bottom) of the normal (left) and two times (right) of solar mass neutron stars. For comparison, the results from the data of radii and tidal deformability in ref. [33] are included.

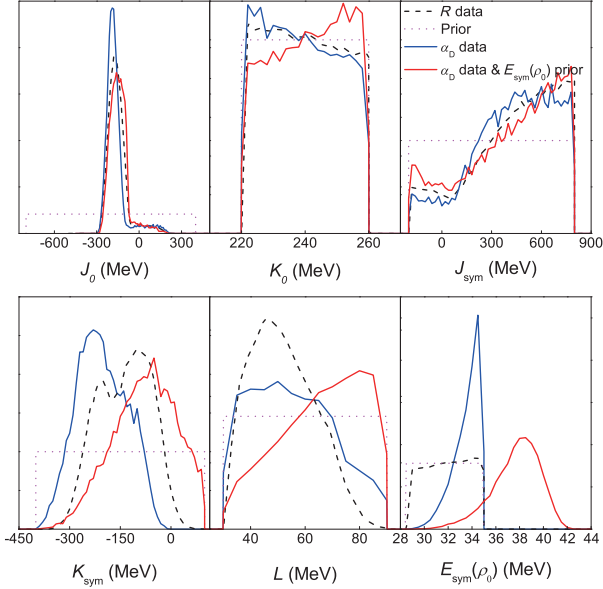


图 3 (网络版彩图) 基于 ^{208}Pb 偶极极化率数据得到的核物质状态方程参数的后验概率分布(蓝色实线). 红色实线代表的是当饱和和密度处核物质对称能的先验范围为 $22 \text{ MeV} \leq E_{\text{sym}}(\rho_0) \leq 55 \text{ MeV}$ 时的计算结果. 为了比较起见, 基于中子星半径的观测数据得到的结果^[33]以及六个参数的先验分布也包含在图中

Figure 3 (Color online) Posterior probability density distributions of the parameters of the nuclear equation of state calculated by using the data of the dipole polarizability for ^{208}Pb (shown by the solid blue lines). The solid red curves display the results by using the same data but with a prior range of $22 \text{ MeV} \leq E_{\text{sym}}(\rho_0) \leq 55 \text{ MeV}$. For comparison, the results obtained from the neutron-star radius data^[33] and the prior probability distributions of the parameters are included.

质量为1.4倍太阳质量, 但大多数结果都在此范围内, 尤其是采用 $\Delta R_{\text{np}} = 0.283^{+0.071}_{-0.071} \text{ fm}$ 时, 这意味着此源的质量有较大的概率为1.4倍太阳质量. 根据 z 的定义式 $z = (1 - 2M/R)^{-1/2} - 1$, 中子星物质的状态方程越硬, 则中子星的半径越大, 引力红移越小. 结合图1和图3中的结果, 便可理解图4中呈现的结果.

3.3 基于 ^{208}Pb 中子皮厚度、偶极极化率和中子星半径的联合数据对核物质状态方程参数的约束

在贝叶斯分析中, 随着似然函数所包含的已知数据增多且变得更精确, 能够推断出更为精确的理论模型信息. 因此, 综合利用天体观测和地面实验室数据来共同提取核物质状态方程的理论参数信息. 相关计算结果呈现于图5. 为了便于比较和讨论, 也将以往仅基于中子星半径、 ^{208}Pb 中子皮厚度以及 ^{208}Pb 偶极极化

率数据得到的结果同样展示在图中.

通过对比单独使用中子皮厚度数据和结合中子皮厚度与偶极极化率联合数据所得到的结果, 即图中黑色实线和蓝色实线的比较, 我们观察到核物质状态方程从硬到软的变化, 显示偶极极化率数据在贝叶斯分析中的重要性高于中子皮厚度数据. 这是因为偶极极化率数据具有较小的测量误差. 单独采用偶极极化率和中子皮厚度联合数据的比较结果也直接证实了这一结论. 从图中观察到, 这两个结果(红色实线和蓝色实线)几乎重合, 暗示偶极极化率数据发挥了主导作用.

通过比较独立采用中子皮厚度数据(黑色实线)和联合采用中子皮厚度和中子星半径数据(绿色实线)得到的结果, 发现核物质状态方程表现出由硬变软的特性. 在贝叶斯分析中, 中子星半径数据的重要性高于中

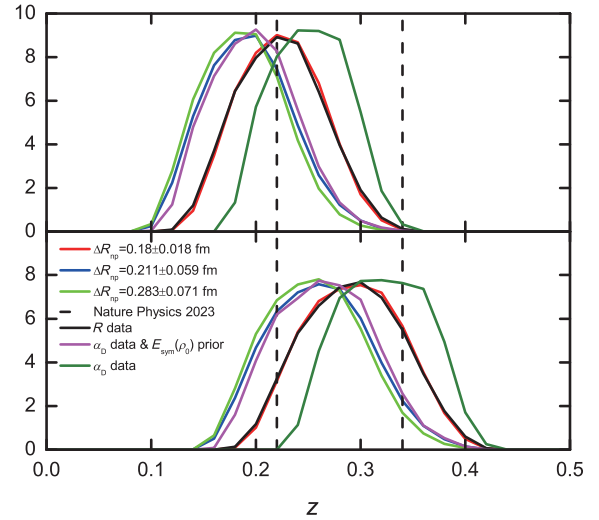


图 4 (网络版彩图) 基于 ^{208}Pb 的三种中子皮厚度和偶极极化率的实验数据得到的中子星引力红移的后验分布. 中子星的引力红移根据方程(11)计算得到. 在上栏图的计算中, 采用了 $\Delta R_{\text{np}} = 0.211^{+0.054}_{-0.063} \text{ fm}$, 而下栏图中的计算采取了 $\Delta R_{\text{np}} = 0.283^{+0.071}_{-0.071} \text{ fm}$. 紫红色实线展示的是当饱和和密度处核物质对称能值的先验范围为 $22 \text{ MeV} \leq E_{\text{sym}}(\rho_0) \leq 55 \text{ MeV}$ 时的计算结果. 为了比较起见, 文献^[30]中的结果(黑色虚线)和基于中子星半径数据得到的结果(黑色实线)也包含在图中

Figure 4 (Color online) Posterior probability density distributions of the redshift of neutron stars calculated by using the data of the neutron-skin thickness and the dipole polarizability for ^{208}Pb . The redshift of neutron stars are calculated according to eq. (11). The results shown in the upper panel are obtained by adopting $\Delta R_{\text{np}} = 0.211^{+0.054}_{-0.063} \text{ fm}$ in eq. (11) while $\Delta R_{\text{np}} = 0.283^{+0.071}_{-0.071} \text{ fm}$ is used for the bottom panel. For comparison, these (shown by the solid black lines) based on the neutron-star radius data and the results (shown by the dashed black lines) in ref. [30] are included.

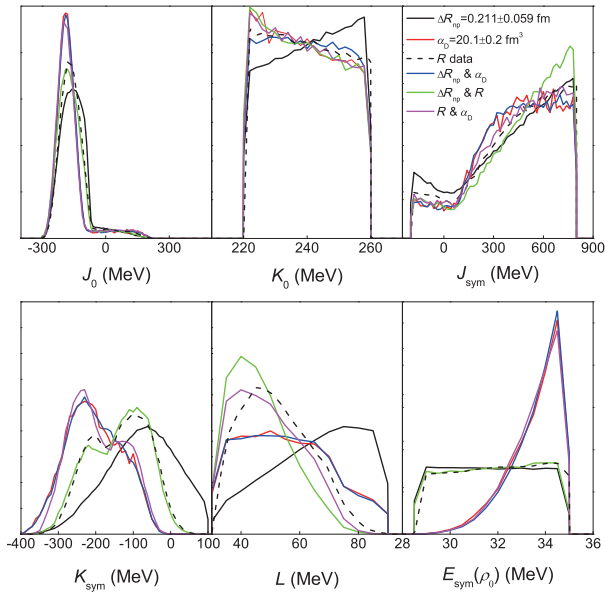


图 5 (网络版彩图)基于联合数据 ^{208}Pb 的中子皮厚度和偶极极化率(蓝色实线)、 ^{208}Pb 的中子皮厚度和中子星半径(绿色实线)、 ^{208}Pb 的偶极极化率和中子星半径(红色实线)得到的核物质状态方程参数的后验分布. 为了比较起见, 单独采用中子皮厚度、偶极极化率和中子星半径数据得到的结果也包含在图中

Figure 5 (Color online) Posterior probability density distributions of the parameters of the nuclear equation of state calculated by using the combined data of the neutron-skin thickness and the dipole polarizability for ^{208}Pb (shown by the solid blue curves), the neutron-skin thickness and neutron-star radius (shown by the solid green curves), the dipole polarizability for ^{208}Pb and the neutron-star radius (shown by the solid red curves). For comparison, these obtained by solely using the data of the neutron-skin thickness, the dipole polarizability and the neutron-star radius are included in the figure.

子皮厚度数据, 这一现象得到了单独采用中子星半径数据与联合采用中子皮厚度和中子星半径数据的比较结果的证实(两者的差异较小). 相反的情况是, 偶极极化率数据比中子星半径数据具有更高的重要性. 在图

中, 黑色虚线与紫红色实线之间存在较大差异, 而红色实线与紫红色实线之间的差异较小.

4 总结

在当前研究中, 结合中子星半径的观测数据以及 ^{208}Pb 中子皮厚度和偶极极化率的实验数据, 我们运用了中子星模型和贝叶斯统计方法构建的理论框架, 探讨了中子星经验质量方程在约束核物质状态方程方面的应用. 研究表明, 中子星经验质量方程在约束核物质状态方程理论参数时发挥着显著的作用. 使用 ^{208}Pb 中子皮厚度的实验数据获得了与基于中子星半径观测数据相近的约束效果. 而当采用了来自PREX-II合作组发布的中子皮厚度数据时, 中子星经验质量方程得到的核物质状态方程比基于中子星半径观测以及核液滴模型计算得到的状态方程更为坚硬.

根据中子星的经验质量方程和 ^{208}Pb 的偶极极化率实验数据, 我们发现这些数据可以显著改善对核物质状态方程的理论参数的约束. 然而, 这种约束仍然取决于理论参数的先验分布. 当扩大了饱和密度处核物质对称能值的先验范围时, 核物质状态方程会呈现出由软至硬的特性. 基于目前已有的中子星半径观测数据以及 ^{208}Pb 中子皮厚度和偶极极化率的实验数据, 我们计算了中子星引力红移的后验概率分布. 结果显示, 源GS1826-24的质量以1.4倍太阳质量的概率较高.

通过单独使用某一类型数据与联合两种不同类型数据的对比, 我们观察到相对于中子皮厚度数据, 偶极极化率和中子星半径数据对核物质状态方程更为敏感. 特别是偶极极化率对核物质状态方程的理论参数施加最佳约束, 突显了实验数据的丰富性和精确性在约束核物质状态方程这一挑战性问题中的重要性.

参考文献

- Watts A L, Andersson N, Chakrabarty D, et al. Colloquium: Measuring the neutron star equation of state using X-ray timing. *Rev Mod Phys*, 2016, 88: 021001
- Oertel M, Hempel M, Klöhn T, et al. Equations of state for supernovae and compact stars. *Rev Mod Phys*, 2017, 89: 015007
- Baiotti L. Gravitational waves from neutron star mergers and their relation to the nuclear equation of state. *Prog Particle Nucl Phys*, 2019, 109: 103714
- Li B A, Krastev P G, Wen D H, et al. Towards understanding astrophysical effects of nuclear symmetry energy. *Eur Phys J A*, 2019, 55: 117
- Capano C D, Tews I, Brown S M, et al. Stringent constraints on neutron-star radii from multimessenger observations and nuclear theory. *Nat Astron*, 2020, 4: 625–632

- 6 Danielewicz P, Lacey R, Lynch W G. Determination of the equation of state of dense matter. *Science*, 2002, 298: 1592–1596
- 7 Li B A, Chen L W, Ko C M. Recent progress and new challenges in isospin physics with heavy-ion reactions. *Phys Rep*, 2008, 464: 113–281
- 8 Baran V, Colonna M, Greco V, et al. Reaction dynamics with exotic nuclei. *Phys Rep*, 2005, 410: 335–466
- 9 Steiner A W, Prakash M, Lattimer J M, et al. Isospin asymmetry in nuclei and neutron stars. *Phys Rep*, 2005, 411: 325–375
- 10 Lovato A, Dore T, Pisarski R D, et al. Long range plan: Dense matter theory for heavy-ion collisions and neutron stars. arXiv: 2211.02224
- 11 Sorensen A, Agarwal K, Brown K W, et al. Dense nuclear matter equation of state from heavy-ion collisions. arXiv: 2301.13253
- 12 Bombaci I, Lombardo U. Asymmetric nuclear matter equation of state. *Phys Rev C*, 1991, 44: 1892–1900
- 13 Li B A, Cai B J, Xie W J, et al. Progress in constraining nuclear symmetry energy using neutron star observables since GW170817. *Universe*, 2021, 7: 182
- 14 Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys Rev Lett*, 2017, 119: 161101
- 15 Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. GW170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. *Phys Rev Lett*, 2018, 121: 161101
- 16 Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. Properties of the binary neutron star merger GW170817. *Phys Rev X*, 2019, 9: 011001
- 17 De S, Finstad D, Lattimer J M, et al. Tidal deformabilities and radii of neutron stars from the observation of GW170817. *Phys Rev Lett*, 2018, 121: 091102
- 18 Zhang Y, Liu M, Xia C J, et al. Constraints on the symmetry energy and its associated parameters from nuclei to neutron stars. *Phys Rev C*, 2020, 101: 034303
- 19 Li A, Yong G C, Zhang Y X. Testing the phase transition parameters inside neutron stars with the production of protons and lambdas in relativistic heavy-ion collisions. *Phys Rev D*, 2023, 107: 043005
- 20 Zhou Y, Chen L W. Ruling out the supersoft high-density symmetry energy from the discovery of PSR J0740+6620 with mass $2.14^{+0.10}_{-0.09} M_{\odot}$. *Astrophys J*, 2019, 886: 52
- 21 Zhou E P, Zhou X, Li A. Constraints on interquark interaction parameters with GW170817 in a binary strange star scenario. *Phys Rev D*, 2018, 97: 083015
- 22 Yagi K, Yunes N. I-Love-Q: Unexpected universal relations for neutron stars and quark stars. *Science*, 2013, 341: 365–368
- 23 Yagi K, Yunes N. I-Love-Q relations in neutron stars and their applications to astrophysics, gravitational waves, and fundamental physics. *Phys Rev D*, 2013, 88: 023009
- 24 Jiang R, Wen D, Chen H. Universal behavior of a compact star based upon the gravitational binding energy. *Phys Rev D*, 2019, 100: 123010
- 25 Cai B J, Li B A, Zhang Z. Core states of neutron stars from anatomizing their scaled structure equations. *Astrophys J*, 2023, 952: 147
- 26 Sotani H, Naito T. Empirical neutron star mass formula based on experimental observables. *Phys Rev C*, 2023, 107: 035802
- 27 Xu J. Constraining isovector nuclear interactions with giant dipole resonance and neutron skin in ^{208}Pb from a Bayesian approach. *Chin Phys Lett*, 2021, 38: 042101
- 28 Centelles M, Roca-Maza X, Viñas X, et al. Nuclear symmetry energy probed by neutron skin thickness of nuclei. *Phys Rev Lett*, 2009, 102: 122502
- 29 Ma C W, Liu Y P, Wei H L, et al. Determination of neutron-skin thickness using configurational information entropy. *Nucl Sci Tech*, 2022, 33: 6
- 30 Zhou X, Wang M, Zhang Y H, et al. Mass measurements show slowdown of rapid proton capture process at waiting-point nucleus ^{64}Ge . *Nat Phys*, 2023, 19: 1091–1097
- 31 Xie W J, Li B A. Bayesian inference of high-density nuclear symmetry energy from radii of canonical neutron stars. *Astrophys J*, 2019, 883: 174
- 32 Xie W J, Li B A. Bayesian inference of the symmetry energy of superdense neutron-rich matter from future radius measurements of massive neutron stars. *Astrophys J*, 2020, 899: 4
- 33 Xie W-J. Probing the nuclear equation of state using the neutron star observables within the Bayesian inference approach (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2022, 52: 252016 [谢文杰. 对核物质状态方程基于中子星观测的贝叶斯统计研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2022, 52: 252016]
- 34 Baym G, Pethick C, Sutherland P. The ground state of matter at high densities: Equation of state and stellar models. *Astrophys J*, 1971, 170: 299
- 35 Negele J W, Vautherin D. Neutron star matter at sub-nuclear densities. *Nucl Phys A*, 1973, 207: 298–320
- 36 Oppenheimer J R, Volkoff G M. On massive neutron cores. *Phys Rev*, 1939, 55: 374–381
- 37 Tolman R C. Effect of inhomogeneity on cosmological models. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1934, 20: 169–176
- 38 Zhang N B, Li B A, Xu J. Combined constraints on the equation of state of dense neutron-rich matter from terrestrial nuclear experiments and observations of neutron stars. *Astrophys J*, 2018, 859: 90
- 39 Zhang N B, Li B A. Delineating effects of nuclear symmetry energy on the radii and tidal polarizabilities of neutron stars. *J Phys G-Nucl Part*

- [Phys](#), 2019, 46: 014002
- 40 Zhang N B, Li B A. Implications of the mass $M = 2.17^{+0.11}_{-0.10} M_{\odot}$ of PSR J0740+6620 on the equation of state of super-dense neutron-rich nuclear matter. [Astrophys J](#), 2019, 879: 99
 - 41 Shlomo S, Kolomietz V M, Coló G. Deducing the nuclear-matter incompressibility coefficient from data on isoscalar compression modes. [Eur Phys J A](#), 2006, 30: 23–30
 - 42 Piekarewicz J. Do we understand the incompressibility of neutron-rich matter? [J Phys G-Nucl Part Phys](#), 2010, 37: 064038
 - 43 Tews I, Lattimer J M, Ohnishi A, et al. Symmetry parameter constraints from a lower bound on neutron-matter energy. [Astrophys J](#), 2017, 848: 105
 - 44 Zhang N B, Cai B J, Li B A, et al. How tightly is the nuclear symmetry energy constrained by a unitary Fermi gas? [Nucl Sci Tech](#), 2017, 28: 181
 - 45 Li B A, Han X. Constraining the neutron-proton effective mass splitting using empirical constraints on the density dependence of nuclear symmetry energy around normal density. [Phys Lett B](#), 2013, 727: 276–281
 - 46 Lattimer J M, Steiner A W. Constraints on the symmetry energy using the mass-radius relation of neutron stars. [Eur Phys J A](#), 2014, 50: 40
 - 47 Riley T E, Watts A L, Bogdanov S, et al. A NICER view of PSR J0030+0451: Millisecond pulsar parameter estimation. [Astronophys J Lett](#), 2019, 887: L21
 - 48 Fonseca E, Cromartie H T, Pennucci T T, et al. Refined mass and geometric measurements of the high-mass PSR J0740+6620. [Astronophys J Lett](#), 2021, 915: L12
 - 49 Doroshenko V, Suleimanov V, Pühlhofer G, et al. A strangely light neutron star within a supernova remnant. [Nat Astron](#), 2022, 6: 1444–1451
 - 50 Tamii A, Poltoratska I, von Neumann-Cosel P, et al. Complete electric dipole response and the neutron skin in ^{208}Pb . [Phys Rev Lett](#), 2011, 107: 062502
 - 51 Adhikari D, Albataineh H, Androic D, et al. Accurate determination of the neutron skin thickness of ^{208}Pb through parity-violation in electron scattering. [Phys Rev Lett](#), 2021, 126: 172502
 - 52 Zenihiro J, Sakaguchi H, Murakami T, et al. Neutron density distributions of $^{204,206,208}\text{Pb}$ deduced via proton elastic scattering at $E_p=295$ MeV. [Phys Rev C](#), 2010, 82: 044611
 - 53 Xie W J, Chen J L, Ma Z W, et al. Dependence of the tidal deformability of neutron stars on the nuclear equation of state. [Chin Phys C](#), 2023, 47: 014103
 - 54 Xie W-J. Bayesian inference of the parameters involved in the nuclear symmetry energy (in Chinese). [Sci Sin-Phys Mech Astron](#), 2024, 54: 222011 [谢文杰. 核物质对称能理论参数的贝叶斯统计推断. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2024, 54: 222011]
 - 55 Roca-Maza X, Centelles M, Viñas X, et al. Neutron skin of ^{208}Pb , nuclear symmetry energy, and the parity radius experiment. [Phys Rev Lett](#), 2011, 106: 252501
 - 56 Zhang Z, Chen L W. Bayesian inference of the symmetry energy and the neutron skin in ^{48}Ca and ^{208}Pb from CREX and PREX-2. [Phys Rev C](#), 2023, 108: 024317

Implications of the empirical neutron-star mass formula in constraining the parameters of the nuclear equation of state

XIE Wen-Jie^{*}

Department of Physics, Yuncheng University, Yuncheng 044000, China

^{}Corresponding author (email: wenjiexie@yeah.net)*

The integration of multiple datasets has emerged as an effective method for constraining the equation of state of nuclear matter. The empirical mass formula of neutron stars establishes a correlation between astrophysical and ground-based laboratory observations, providing a convenient framework for related investigations. In this study, based on experimental data of the neutron skin thickness and dipole polarizability of ^{208}Pb , we estimate the posterior probability distributions of the parameters of the equation of state of nuclear matter, neutron star radius, tidal deformability, and gravitational redshift within the theoretical framework of neutron star models and Bayesian statistical methods. The results show that the empirical mass formula of neutron stars considerably influences the constraint of the equation of state of nuclear matter. The neutron skin thickness data exhibit a comparable constraining effect to neutron star radius observations. Based on the neutron skin thickness data released by the PREX-II Collaboration, the empirical mass formula supports a stiffer equation of state for nuclear matter than these from the neutron star radius observations. By calculating the posterior probability distribution of the gravitational redshift for a normal neutron star, there is a substantial likelihood that the mass of the source GS1826-24 is found to be approximately 1.4 times the solar mass. Combining neutron star radius observations with the joint data of the neutron skin thickness and dipole polarizability of ^{208}Pb , it is evident that, neutron star radius and dipole polarizability data play a more crucial role than neutron skin thickness data, in constraining the parameters of the equation of state of nuclear matter. The dipole polarizability data of ^{208}Pb demonstrate the most optimal constraint effect, highlighting the significance of rich and precise experimental data in addressing the intricate problem of the equation of state of nuclear matter.

equation of state of nuclear matter, Bayesian inference approach, empirical mass formula of neutron stars, neutron skin thickness, dipole polarizability

PACS: 02.70.Uu, 26.60.-c, 21.65.-f

doi: [10.1360/SSPMA-2023-0405](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2023-0405)