第49卷 第1期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 49 No. 1
2010年1月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Jan. 2010

一类 Kantorovich 型算子列的渐进展开

陈玲菊*，林地旺
(厦门大学数学科学学院，福建 厦门 361005)

摘要：研究了 Bleimann-Butzer-Hahn 算子的 Kantorovich 型算子列 K_n 的逼近性质，作者运用分析和逼近论的方法以及不等式技巧得到了算子列 K_n 对可微函数类的渐进展开式与点态估计公式. 特别地，作为结果的推论，建立了算子列 K_n 关于可微函数的一个 Vonorovskya 型渐进公式.

关键词：Bleimann-Butzer-Hahn 算子；渐近性；可微函数；渐进公式

中图分类号：O 174.41　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0438-0479(2010)-01-0005-03

1980 年，Bleimann 等[1]提出了如下定义在无穷区间$[0,+\infty)$的 Bernstein 型算子列

$$L_n^*(f,x)=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k f\left(\frac{k}{n+1-k}\right),$$

其中 $x\in I$，$I=[0,+\infty)$，$n\in\mathbf{N}$，f 是定义在 I 上的实函数.

Bleimann-Butzer-Hahn 算子受到许多逼近论专家的注意和重视，关于它有许多后续研究，如 Altomare 等[2]，Abel 等[3-5]以及 Hermann[6]等.

最近，Abel 等[5]提出 Bleimann-Butzer-Hahn 算子的一种 Kantorovich 变形，称之为 BBHK 算子，其定义为

$$K_n^*(f,x)=\frac{n+2}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k\int_{\frac{k}{n+2-k}}^{\frac{k+1}{n+1-k}}\frac{f(t)}{(1+t)^3}\mathrm{d}t\qquad(n\in\mathbf{N}),$$

其中 $K_n^*(e_0,x)=1+\frac{x-1}{2(n+2)}$. 在该篇文章中作者证明了：$|L_n^*(\varphi_x^2,x)|\leqslant C\frac{x(1+x)^2}{n+2}$，其中 $\psi_x=t-x$，$n\in\mathbf{N}$. 在该不等式中，$C=3$ 是最佳常数. 运用这个结论，他们用连续模改善了逼近度的结果.

我们引入了一种新型的 Bleimann-Butzer-Hahn 算子的 Kantorovich 型算子列，定义为

$$K_n(f(t),x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_x^k(1-p_x)^{n-k}\frac{\int_{I_k}f(t)\mathrm{d}t}{\int_{I_k}\mathrm{d}t},$$

其中，$p_x=\frac{x}{1+x}(X\geqslant 0)$和 $I_k=\left[\frac{k}{n+2-k},\frac{k+1}{n+1-k}\right]$.

对比经典 Bernstein 算子列 Bernstein-Kantorovich 算子的演化过程，定义上述的 K_n 是比较自然和合理的，而且此定义克服了文献[7]中积分区间不能完整地覆盖$[0,+\infty)$的缺点. 在此基础上，我们研究算子列 K_n 对可微函数的渐进展开，并采用一阶连续模对余项做出估计，得到了 K_n 对可微函数的点态估计.

为表述方便，记：

$I=[0,+\infty)$，

$\Phi=\{f\mid f$ 是区间 I 上的连续函数$\}$，

$K^{[q]}(x)=\{f\mid f$ 是区间$(0,+\infty)$上的 q 次可微的局部有界函数$\}$.

1 预备结果

引理 1[3]　对 $q\in\mathbf{N}$，固定的 $x>0$，设 $K_n:k^{[q]}(x)\to C_b(I)$(区间上连续有界函数空间)是一列正线性算子列，如果中心距满足

$$K_n(\varphi_x^s,x)=o(n^{-[\frac{s+1}{2}]})\quad(n\to\infty)\quad(s=0,1,2,\cdots,2q+2),$$

那么，对 $\forall f\in k^{[2q]}(x)$，成立

$$K_n(f,x)=\sum_{s=0}^{2q}\frac{f^{(s)}(x)}{s!}K_n(\varphi_x^s,x)+o(n^{-q})\quad(n\to\infty).$$

而且，如果 $f\in k^{[2q+2]}$，那么上式中的项 $o(n^{-q})$ 可改进为 $o(n^{-(q+1)})$.

在讨论 $K_n(f(t),x)$的渐近展开式之前，结合引理

收稿日期：2009-07-23
基金项目：国家自然科学基金(10571145)；厦门市科技计划项目(20083012)
Email：challenge808@sina.com
*现工作单位：闽江学院数学系

1,经过直接的计算,我们得到 $K_n(f(t),x)$ 的中心矩如下:

令 $\varphi_x^s=(t-x)^s$,$s=0,1,2,3,4$.则

$$K_n(\varphi_x^0,x)=1,\tag{1}$$

$$K_n(\varphi_x,x)=\frac{1-x^2}{2(n+1)}+o(n^{-4}),\tag{2}$$

$$K_n(\varphi_x^2,x)=\frac{x(1+x)^2}{n+1}+\frac{(1+x)^4}{3(n+1)(n+2)}+\frac{(1+x)^4(4x+1)}{3(n+1)(n+2)(n+3)}+o(n^{-4}),\tag{3}$$

$$K_n(\varphi_x^3,x)=\frac{x(1+x)^2(14x^2+45x+31)}{(n+1)(n+2)}+\frac{(1+x)^3(59x^3+81x^2-2x+1)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}+o(n^{-4}),\tag{4}$$

$$K_n(\varphi_x^4,x)=\frac{(1+x)(x^4-100x^3+36x^2)}{n+1}+\frac{(1+x)^2(24x^4-84x^3-76x^2)}{5(n+1)(n+2)}+\frac{(1+x)^3(223x^4+337x^3+274x^2+122x-5)}{(n+1)(n+2)(n+3)}+o(n^{-4}).\tag{5}$$

并由式(2),(3)可以知道,当 n 充分大时,对于 $I=[0,+\infty)$ 的任意有限子区间 D,有以下不等式成立:

$$0\leqslant K_n(\varphi_x,x)\leqslant\frac{1+x}{2(n+1)},x\in D\subset I,\tag{6}$$

$$0\leqslant K_n(\varphi_x^2,x)\leqslant 2\left(\frac{x(1+x)^2}{(n+1)}+\frac{(1+x)^4}{3(n+1)(n+2)}\right).\tag{7}$$

引理 2[2]　设 $K_n:k^{[q]}(x)\to C_b(I)$ 是一列正线性算子列,则对 $\forall f\in C_b(I)$,$\delta>0$ 和 $x\in I$,成立以下不等式:

$$|K_n(f(t),x)-f(x)|\leqslant |f(x)||K_n(\varphi_x^0,x)-1|+\left(K_n(\varphi_x^0,x)+\frac{1}{\delta}\sqrt{K_n(\varphi_x^2,x)}\sqrt{K_n(\varphi_x^0,x)}\right)\omega(f,\delta),\tag{8}$$

进一步地,如果 f 在区间 I 上可微且 $f'\in C_b(I)$,我们有

$$|K_n(f(t),x)-f(x)|\leqslant |f(x)||K_n(\varphi_x^0,x)-1|+|f'(x)||K_n(\varphi_x,x)|+\sqrt{K_n(\varphi_x^2,x)}\left(K_n(\varphi_x^0,x)+\frac{1}{\delta}\sqrt{K_n(\varphi_x^2,x)}\right)\omega(f',\delta).\tag{9}$$

2　主要结论及其证明

设 $A=\{f|f\in K^{[q]}(x)\}$,$B=\{f|f(x)=o(x^q)\}$,则 $A\cap B\neq\emptyset$,如取 $g(x)=\ln x^q$,有 $g(x)\in A\cap B$.文中以下部分均做如此假设.

定理 1　设 $f\in\Phi$,且 $f\in k^{[4]}(x)(x>0)$,那么成立以下渐近展开式:

$$K_n(f,x)=f(x)+\frac{(1+x)}{n+1}[(1-x)f'(x)+2x(1+x)f''(x)+2(x^4-100x^3+36x^2)f^{(4)}(x)]+\frac{(1+x)^2}{15(n+1)(n+2)}[5(1+x)^2f''(x)+15x(14x^2+45x+31)f^{(3)}(x)+3(24x^4-84x^3-76x^2)f^{(4)}(x)]+\frac{(1+x)^3}{12(n+1)(n+2)(n+3)}[4(1+x)(4x+1)f''(x)+3(59x^3+81x^2-2x+1)f^{(3)}(x)+12(223x^4+337x^3+274x^2+122x-5)f^{(4)}(x)]+o(n^{-4}).$$

由定理 1 特殊情况,我们可推导出以下的 Vonorovskya 型的渐进公式:

推论 1　如果 $f\in\Phi$,且在点 $x(x>0)$ 的邻域内有二阶导数 $f''(x)$,则成立以下等式:

$$\lim_{n\to\infty}n(K_n(f,x)-f(x))=\frac{1-x^2}{2}f'(x)+2x(1+x)^2f''(x).$$

定理 1 的证明

取 $q=4$,由引理 1 和以上所列 $K_n(f(t),x)$ 的中心矩(1)～(5)可知定理 1 成立,证毕.

接着,我们给出 $K_n(f(t),x)$ 关于 $f(x)$ 的点态估计:

定理 2　设 $f\in C_b(D)$,$D\subset I$,则对每个 $x\in D$ 和任意 $\delta>0$,当 n 充分大时,有

$$|K_n(f(t),x)-f(x)|\leqslant\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{2x(1+x)^2}{n+1}+\frac{2(1+x)^4}{3(n+1)(n+2)}}\right)\omega(f,\delta).$$

证明　由引理 2 中式(8)得

$$|K_n(f(t),x)-f(x)|\leqslant\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{K_n(\varphi_x^2,x)}\right)\omega(f,\delta).$$

并且由式(7)知道定理 2 成立.

最后,我们讨论 K_n 对连续可微函数的逼近性质,可以得到如下估计:

定理 3　设 $f\in C_b(D)$,$D\subset I$,则对每个 $x\in D$ 和任意 $\delta>0$,当 n 充分大时,有

$$|K_n(f(t),x)-f(x)|\leqslant\frac{1+x}{2(n+1)}|f'(x)|+\sqrt{\frac{2x(1+x)^2}{n+1}+\frac{2(1+x)^4}{3(n+1)(n+2)}}\cdot\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{2x(1+x)^2}{n+1}+\frac{2(1+x)^4}{3(n+1)(n+2)}}\right)\cdot\omega(f',\delta).$$

证明　由引理 2 中式(9)得

$$|K_n(f(t),x)-f(x)|\leqslant|f'(x)||K_n(\varphi_x,x)|+\sqrt{K_n(\varphi_x^2,x)}\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{K_n(\varphi_x^2,x)}\right)\omega(f',\delta).$$

结合式(6)和式(7)，我们得到定理 3 成立.

参考文献：

[1] Bleimann G, Butzer P L, Hahn L. A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis, ederl[J]. Akad Wetensch Indag Math, 1980, 42: 255-262.

[2] Altomare F, Campiti M. Korovkin-type approximation theory and its applications[M]. Berlin, New York: de Gruyter, 1994.

[3] Abel U, Ivan M. A Kantorovich variant of the Bleimann Butzer and Hahn operators[J]. Suppl Rend Circ Mat Palermo, 2002, 68: 205-218.

[4] Abel U, Ivan M. Some identities for the operator of Bleimann-Butzer-Hahn involving divided differences[J]. Calcolo, 1999, 36: 143-160.

[5] Abel U, Ivan M. Best constant for a Bleinmann-Butzer-Hahn moment estimation[J]. East J Approx, 2000, 6: 1-7.

[6] Hermann T. On the operator of Bleimann, Butzer and Hahn[J]. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 1990, 58: 355-360.

[7] 王绍钦，陈玲菊. Bernstein-Beziér-Kantorovich 算子列的逼近阶估计[J]. 太原师范学院学报：自然科学版, 2005, 4(2): 1-4.

Asymptotic Expansion of a Kantorovich Variant of BBH Operators

CHEN Ling-ju* , LIN Di-wang

(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The concern of this paper is some basic asymptotic properties of a Kantorovich variant of the Bleimann, Butzer and Hahn operators K_n. The asymptotic expansion and the rate of K_n convergence of for differentiable functions are presented by using some methods of analysis and inequation techniques. Specially, the Vonorovskya type asymptotic formula of K_n for differentiable functions is given in this paper as a deduction of the result.

Key words: Bleimann-Butzer-Hahn operator; asymptotic property; differentiable function; asymptotic formula