

评《微分动力系统的定性理论》

胡森 周作领^④

(普林斯顿大学数学系, 普林斯顿 18540; ④中山大学岭南学院, 广州 510275)

(廖山涛著, 科学出版社, 中文版 1992 年出版, 书价 23.50 元; 英文版 1996 年出版)

由 H. Poincare 和 G. D. Birkhoff 关于微分方程定性理论的工作形成了动力系统这一数学领域. 但在他们之后几十年, 这个领域进展缓慢. 这段时间里只有很少几位数学家注重从几何观点看微分方程.

“Poincare 强调寻求一种‘变换’, 它在微分方程中的作用就象双有理变换在代数曲线中起的作用一样. 如此人们可以考虑某个方程在此类变换下的等价类. 1908 年左右人们自然的考虑用‘解析变换’作等价分类, 我们知道这样使情况变得太复杂, 因为等价类太多了”¹⁾. A. Andronov 和 L. Pontryagin 的一个关键贡献是引进拓扑变换作等价分类. 一个常微分方程叫做“粗糙”的, 如果在小扰动下其轨道结构均拓扑等价. 他们对单位圆盘上的“粗糙”常微分方程给出了刻划. 这一想法受到 S. Lefschetz 的重视. 在他的指导下 H. de Baggis 给了 A. Andronov 和 L. Pontryagin 所宣布定理的完整证明. 在 S. Lefschetz 的鼓励下 M. Peixoto 在 1957 年开始这方面的工作. Peixoto 将可微流的全体看成一 Banach 空间, 其上定义由 C^1 范数诱导的拓扑(即 Whitney 拓扑). 他对可微流给出结构稳定的定义, 在解析情形与“粗糙”一致. Peixoto 证明了一些漂亮的结果, 如刻划曲面上的结构稳定流和证明曲面上的结构稳定流在 C^1 拓扑下是稠密的. 这些结果立即引发一个问题, 即高维的流是什么样子. Smale 关于梯度型流的研究导致他证明高维 Poincare 猜测. 他的综述文章^[1]也把动力系统这一领域变成众所周知. Peixoto 的工作也吸引了廖山涛先生转到动力系统这一诱人的领域.

廖先生生性淡泊, 为人谦和, 毕生致力于数学研究. 他 50 年代初在芝加哥大学师从陈省身先生, 得到博士学位后到普林斯顿等地教了几年书, 于 1956 年回国. 在此期间及以后的几年, 他在代数拓扑方面发表了一些重要的工作(如文献[2]). 廖先生从 Peixoto 的工作看到动力系统这一领域方兴未艾, 很有前途, 便迅速开展了这方面的研究. 他在动力系统方面的创造不同于国际上流行的几何的和泛函的方法, 独树一帜、自成体系, 做了许多奠基性的工作. 他最初把遍历理论用于动力系统以建立其统计基础. 他定义的特征指数, 后来发现与 Lyapunov 指数相同而领先 Oseledec 著名的工作 5 年. 他把活动标架用于常微分方程, 构造了典范方程组, 将拓扑上的横截条件定量表达, 定义了阻碍集等. 他以此为基础发展了一套有力的工具, 解决了动力系统中许多重大问题, 如他证明具非零特征指数系统(即 Pesin 系统)的稳定流形定理, 独立给出 C^1 封闭引理的完整证明, 刻划重要的三维和四维结构稳定系统等等. 廖先生在相对封闭的环境及其他困难条件下做出世界一流的工作殊为可贵. 从 50 年代起, 中国多年被孤立. 廖先生的工作在文革中被迫中断. 不少他在 60 年代做的工作到 70 年代中才得以发表. 廖先生的工作曾获国家自然科学基金一等奖和首届第三世界科学院数学奖. 时间将证明他的

1) Peixoto M. Acceptance speech at the Beijing meeting for 1986 award in mathematics of the Third World Academy of Sciences.

工作会长留于世,其风范将长存并永远地激励后人.

廖先生这方面的文章全部在国内发表,且大部分用中文.现在由廖先生的同事与学生翻成英文结集出版,相信会对国外同行研究廖先生的工作,促进动力系统的研究大有裨益.本书包含廖先生在动力系统方面的10篇文章.他的研究论文严谨细致.书中还包括两篇综述,即第七章与附录B,系统地总结了的工作,是廖先生工作的极好的概括.

廖先生的早期工作将遍历理论用于动力系统研究流的线性性质.引进特征指数的概念(见本书第一章).设 S 为紧致流形 M^n 上的 C^1 向量场. S 诱导一流 $\Phi_t: M^n \rightarrow M^n$,由求导得切丛上的流 $\Phi_t: TM^n \rightarrow TM^n$,设 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为一Riemannian度量.记 $S_1(TM^n)$ 为这个度量下的单位切丛.在单位切丛上定义一流 $x_t(u) = \Phi_t(u) / \|\Phi_t(u)\|$,这里 $u \in S_1(TM^n)$.廖定义一函数 $\omega(u) = \frac{d}{dt} \|\Phi_t(u)\| \big|_{t=0}$.他给出此函数的重要性质,它是一cocycle,即

$$\int_0^T \omega(x_t(u)) dt = \log \|\Phi_T(u)\|.$$

对任一 $S_1(TM^n)$ 上不变测度 μ ,廖称积分 $\int \omega(u) d\mu$ 为特征指数.若 μ 是遍历的,则由Birkhoff遍历定理,

$$\int \omega(u) d\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \omega(x_t(u_0)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|\Phi_T(u_0)\|,$$

所以它是沿方向 u_0 的Lyapunov指数.为得到通常的定义,将 M^n 上的不变测度提升为 $S_1(TM^n)$ 上的不变测度.如果 μ' 是遍历的,通过对几乎回归映射的特征向量取极限定义特征向量.选取一特征向量就将 μ' 提升到 μ ,对于这些提升测度作廖的积分就得到通常的所有Lyapunov指数.所以说廖领先Oseledec关于Lyapunov的著名工作^[3].廖还强调不变测度在动力系统的研究作用.这些想法富有成效.本文作者之一利用不变测度研究一般动力系统,发现有丰富的结构^[4].

廖在几次尝试后,构造出典范方程组.廖把流形上的流化成欧氏空间里的常微分方程组.这样常微分方程组上的结果由此可推到一般的流上.廖给出许多应用.这个方法应能解决许多别的问题.特别是廖的构造适用于高阶可微系统.对于Hamilton系统,高阶项的效应是非常重要的(如KAM需高阶导数).

设 $\mathcal{F}_n$ 为单位正交标架丛,可通过Gram-Schmidt过程在上定义一流 x_t .对 $\beta \in \mathcal{F}_p$,定义

$$\mathcal{R}_\beta: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow M^n,$$

$$\mathcal{R}_\beta(t, y) = \exp\left(\sum_{k=1}^n y^k \text{proj}_k x_t(\beta)\right), t \in (-\infty, \infty), y \in \mathbb{R}^n.$$

这里 $\text{proj}_k(\beta)$ 是 β 到它的第 k 个向量上的投影. $\mathcal{R}_{\beta,t}(y) = \mathcal{R}_\beta(t, y)$ 给出 M^n 的局部坐标.设

$$d\mathcal{R}_{\beta,t}(\mathcal{S}_\beta(t, y)) = \mathcal{S}(\mathcal{R}_\beta(t, y)), d\mathcal{R}_{\beta,t}(\mathcal{S}_\beta(t, y)) = d\mathcal{R}_\beta \left| \frac{\partial}{\partial t} \right|_{(t,y)},$$

$$\mathcal{S}_\beta(t, y) = \mathcal{S}_\beta(t, y) \mathcal{S}_\beta(t, y),$$

那么称

$$\frac{dy}{dt} = \mathcal{S}_\beta(t, y) \quad (*)$$

为典范方程组.

很容易看出式(*)的解在映射 $\mathcal{R}_t$ 下映为 Φ_t 的轨道. 应用上再做一次简化更好用. 这些方程组具如下形式:

$$dz/dt = zA(t) + f(t, z), \quad (**)$$

$A(t)$ 为上三角矩阵, 一致有界. $f(t, z)$ 有界, 对 z 变量是Lipschitz的.

可以看出关于式(**)的定理通过上述步骤推到一般的流上去. 关于式(**)有许多有趣的定理, 最为人所知的可能是Hartman-Grobman定理, 即线性双曲方程是 C^1 结构稳定的. 廖给了Hartman-Grobman定理两页证明. 这样的证明宜编到常微方程的教科书中. 类似地廖还证明了Anosov系统的结构稳定性(第二章, 第四节). 作者给出跟踪轨道(shadow an orbit)的明显构造且证明线性系统的幂零部分可以忽略. 作者还指出同样的构造适用于任何双曲集, 如此得出双曲集的持续性(persistence)(参见本书p. 135).

利用廖的典范方程组和Birkhoff遍历定理还可得出具非零Lyapunov指数流(Pesin系统)的稳定流形定理的初等证明. 可以验证Pesin系统满足廖的假设(参见本书p. 101和文献[5]).

另一重要应用是 C^1 封闭引理的证明. 由R. Thom首先建议的这一引理(文献[6], p. 120)对于理解 C^1 流的结构稳定性至为关键. 一个非游荡轨道(即相近轨道会任意近的返回)很容易用 C^0 小扰动封闭, 也即有一连续小扰动 X 使得 X 有一周期轨道通过原来的非游荡点. 用 C^1 小扰动封闭则困难得多. Pugh关于 C^1 封闭引理的证明未被普遍接受^[6,7]. 廖先生独立给出完整的证明^[8]. 廖应用典范方程组把非游荡点附近的轨道线性化, 用一种线性方程组的轨道有效迁移性质成功地把非游荡点 C^1 封闭为一周期轨道. 对于线性系统, 他使用一致有界矩阵做坐标变换, 把原来的矩阵对角化, 而得出轨道的有效迁移性质. 1986年麦结华发表了一个非常简单而直观的证明^[9]. 对 $C^r(r>1)$ 封闭引理人们所知甚少. Gutierrez及Herman的反例建议人们考虑整体的扰动, 即不局限于有限轨弧的邻域.

典范方程组的另一有趣应用未包含在廖的书中^[10]. 廖用其在 C^1 扰动下构造同宿解. 问题是若不变双曲集的不稳定流形在其稳定流形上积聚(accumulation)的情形下用 C^1 扰动构造同宿轨道. 他的结果与Mane的结果很不一样. Mane的条件是测度的而廖的条件是拓扑的. 最近Hayashi发表的证明在仅有积聚的情形下构造同宿轨道而不需别的条件^[11], 文兰和夏志宏对此给出了一个简单证明^[12], 这些结果导致流上 C^1 结构稳定猜测的一个证明.

微分动力系统中的一个重要问题是刻划结构稳定性. 廖引进一重要概念“阻碍集”来研究这一问题. 廖用他独特的方法证明了许多领先同行的工作. 与结构稳定相关的有若干重要概念. 廖强调线性匀断条件, 即对 $x \in \Omega$, $T_x(M) = F_-(x) + \{S(x)\} + F_+(x)$, 这里

$$F_-(x) = \{u \in T_x(M) \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_t(u)\| = 0\}, \quad F_+(x) = \{u \in T_x(M) \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\Phi_t(u)\| = 0\}.$$

这一条件还可用阻碍集为空集来表达. 阻碍集定义如下:

S 诱导一流 $\Phi_t: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ 这里 $\mathcal{D} = \bigcup_{x \in M^n - \text{Sing}(S)} \mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_x = \{u \in T_x M \mid \langle u, S(x) \rangle = 0\}$. 对任一 $u \in \mathcal{D}_x$ 则有唯一的 $\Psi_t(u) \in D_{\Phi_t(x)}$, 使得 $\Phi_t(u) - \Psi_t(u) \in \Phi_t(\perp u)$, 这里 $\perp u$ 是 u 在 $\mathcal{D}_x$ 中的正交补. 如此定义一流 $\Psi_t: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$

S 的阻碍集定义为

$$Ob(S) = \{x \in M^n \mid \text{存在 } u \in \mathcal{D}^* \cap T_x(M), \text{ 使得 } \|u\| = 1 = \inf_{t \in (-\infty, \infty)} \|\Psi_t(u)\|\}.$$

一个不变闭集 Λ 若与 $I(S) \cup Ob(S)$ 不相交就称为正常集. 这里 $I(S)$ 为 S 的奇点的内点集. 廖证明了(参见本书第4章): 1) S 是一正常集当且仅当 S 满足线性匀断条件. 2) S 满足公理 A 和强匀断条件当且仅当 $I(S) \cup Ob(S)$ 为空集. 3) S 满足公理 A 和无环条件当且仅当 $R(S) \cap (I(S) \cup Ob(S))$ 为空集. 这里 $R(S)$ 为 S 的链回归集. 4) 若 Λ 为正常集, 则 S 在 Λ 上结构稳定. 以上结果导出强匀断条件推出公理 A, 这是 Mane 首先注意到的. 上述定理还推出满足公理 A 和强匀断条件的系统是结构稳定的. 这些结果首先由 Robbin 和 Robinson 证得. 廖还分析了正常集的结构并给出其分解. 上述定理的逆命题, 结构稳定系统满足公理 A, 即通常的结构稳定性猜测^[13]. 公理 A 指周期点在非游荡点集中稠密且非游荡点集上有双曲结构, 即存在 Ω 上的连续不变分解, $T_x M = E + S + F$, Ψ_t 在 E 上压缩, 在 F 上膨胀.

一个不变闭子集 Λ 称为歧变集(Rambling set), 如果它与阻碍集相交非空. 一个歧变集称为极小的如果它不再包含真的歧变集. 一个 S 的极小歧变集称作简单的, 如果 1) Λ 不包含 S 的非零点, 或 2) $Ob(S)$ 包含 S 的至少一个正常点, 使得 S 过该点轨道的 α 极限点集与 ω 极限点集为 Λ 的真子集. 廖证明了(本书第六章)设 S 有一简单极小歧变集含有 S 的正常点, 则 S 可被 C^1 小扰动为 X 使得 X 具有双曲周期轨道 Q_1, Q_2 (包含于 Λ 的给定邻域中), 而 Q_1 的稳定流形与 Q_2 的不稳定流形非匀断相交.

非简单歧变集情况较复杂. 廖研究 $x^*(M^n)$, 即 M^n 上 C^1 向量场, 它的 C^1 小扰动诱导的流只有双曲奇点和双曲周期轨道. 这类系统首先由 Franks 引进. 结构稳定系统必属此类. Franks 还证明了这类系统及小扰动的周期解的特征值一致有界. 廖在本书第六章对于 $x^*(M^n)$ 研究其极小阻碍集, 证明对某些非游荡点的小邻域经不同的 C^1 小扰动得出不同指数的周期轨道. 由此得出 S 满足公理 A 和无环条件当且仅当 S 及邻近系统的具不同指数的周期轨可以一致分离. 后来 Mane 对于离散系统证得类似定理. 廖使用典范方程组证明这些定理. 证明中用到拟双曲轨弧附近周期轨道存在性定理. 遗憾的是书中仅包含定理的叙述而无证明.

廖对于稳定性猜测做出许多重大贡献. 在第五章, 对奇点与 Ω 相分离的三维流验证了稳定性猜测. 其证明包含了许多线索使得廖证得上述定理. 在第八章, 给出奇点与 Ω 相分离的四维流的稳定性猜测的证明概要. 在附录 B 中, 给出三维流稳定猜测的证明概要(见文献[14]). 稳定性猜测在离散情形由 Mane 解决^[15], Ω 猜测由 Palis 解决^[16]. 人们也许感觉到廖的计划并未完成. 利用廖的同宿轨存在定理和他在阻碍集上的工作我们或能得到流的稳定猜测的不同证明, 在阻碍集非空的情形应总能构造非双曲的或非匀断的东西.

廖的工作还有许多其他的线索, 例如可用于研究非双曲系统. 我们在上面指出廖的方法给出 Pesin 稳定流形定理的证明, 用此法或可构造 Pesin 的理论. 我们还指出在阻碍集非空情形常出现非匀断相交, 这可应用于同宿轨分叉问题.

我们从一开始就选用了拓扑变换构造流的等价类, 也可采用可微变换代替拓扑变换. 在前几年出现许多与此有关的结果, 例如 Sullivan^[17] 关于 Cantor 集上的 Scaling 函数和 de la Llave^[18] 及 Katok^[19] 关于 Anosov 系统的工作. 对于双曲系统廖分析了它的拓扑结构, 以此为基础人们或能给出在微分变换等价下的分类. 一个自然的不变量是周期轨的特征值. Mather

曾引进另一种不变量以表达游荡区域的两个基本区域的光滑结构如何粘在一起^[20]. 应用这些不变量对双曲系统做微分变换下的分类应很有意义.

致谢 作者对于陈省身先生和 J. Mather 教授仔细阅读初稿并提供宝贵意见深表感谢. 岳澄波关于 Oseledec 工作的解释很有帮助. 程崇庆、董镇喜、J. Franks、蒋云平、钱敏、汪秋东、文兰、R. Williams、夏志宏和熊金城、Ya. G. Sinai、叶向东等的评论与鼓励使作者受益非浅, 在此致谢.

参 考 文 献

- 1 Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull of AMS, 1967, 73: 747~ 817
- 2 Liao S D. On the theory of obstructions of fiber bundles. Ann of Math, 1954, 60(2): 146~ 191
- 3 Oseledec V I. A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. Trudy Moskov Mat Obsc, 1968, 19: 179~ 210
- 4 周作领. 动力系统研究中的遍历理论方法. 自然科学进展, 1995, 5(4): 390~ 396
- 5 Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds. Topology, 1962, 1: 101~ 120
- 6 Pugh C. The closing lemma. Amer J Math, 1967, 89: 956~ 1 009
- 7 Robinson C, Pugh C. The C^1 closing lemma, including Hamiltonians. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1983, 3: 261~ 313
- 8 廖山涛. 一个推广的 C^1 封闭定理. 北京大学学报(自然科学版), 1979, 1(3): 1~ 41
- 9 麦结华. C^1 封闭引理的一个较简单的证明. 中国科学, A 辑, 1986(10): 458~ 466
- 10 廖山涛. 关于稳定流形的扰动. 系统科学与数学, 1988, 8(3): 193~ 213; 8(4): 289~ 314
- 11 Hayashi S. Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω -stability conjecture for flows. Annals of Math, 1997, 145: 81~ 137
- 12 Wen L. On the C^1 stability conjecture for flows. J Diff Eq, 1966, 129: 334~ 357
- 13 Chern S S, Smale S, eds. Global analysis. Proc Symposium in Pure Math of AMS, Vol 14, Providence, Rhode Island: American mathematical Society, 1970
- 14 Hu S. A proof of C^1 stability conjecture for three dimensional flows. Trans of AMS, 1994, 342: 753~ 772
- 15 Mane R. A proof of the stability conjecture. IHES Publ Math, 1988, 66: 162~ 210
- 16 Palis J. On the C^1 stability conjecture. IHES Publ Math, 1988, 66: 211~ 215
- 17 Sullivan D. Differentiable structures on fractal like sets. determined by intrinsic scaling functions on dual Cantor sets. Proc Sympos Pure Math of AMS, 1988, 48: 15~ 23
- 18 de la Llave R, Marco J M, Moriyn R. Canonical perturbation theory of Anosov systems and regularity results for the Livisic cohomology equation. Ann of Math, 1986, 123: 537~ 611
- 19 Hurder S, Katok A. Differentiability, rigidity and Godbilon_Vey classes for Anosov flows. IHES Publ Math, 1990, 72: 5~ 61
- 20 Mather J. Commutators of Diffeomorphisms. Comment Math Helv, 1975, 50: 33~ 40