

线性系统特征值的计算及其分布^{*}

冯纯伯

(东南大学自动化研究所, 南京 210096)

摘要 提出了两种计算线性系统特征值的方法, 其一是由低阶到高阶用根轨迹法逐次递推求出全部特征值, 其二是利用 Schwartz 阵的性质采用搜索方法确定系统特征多项式的所有因子. 还给出确定在左右半复平面内各有多少个特征值的方法.

关键词 特征值 特征值的分布 稳定性分析 Schwartz 矩阵

研究线性系统的动态性能时人们需要分析其下列特征方程:

$$A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0, s \triangleq \frac{d}{dt}, a_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{[0, n-1]} \quad (1)$$

的特征值的性质及其分布. 有许多稳定判据来判别(1)式的特征值是否都在左半复平面内, 例如 Routh, Hurwitz, Nyquist 判据等. 但要分析清楚(1)式的特征值在整个复平面上的分布, 则并不容易. 求取(1)式的所有的根也是一个有重要意义的课题. 众所周知, 只有四阶及其以下的多项式方程的解可以用其文字系数进行完全分类. 虽然有一些计算 $n \geq 5$ 时(1)式的解的数值算法, 但一般效率不高. 最近, 文献[1]讨论了(1)式的解的分布, 通过符号(文字)系数给出判别此多项式的实根和虚根的数目及其相应重数的一组表达式, 此结果是有关多项式根的分布讨论的重要进展.

已知利用 Schwartz 矩阵的性质来分析系统(1)的稳定性是十分方便的^[2], 它特别便于形成相应的判别计算程序, 文献[3, 4]给出了相应的计算步骤. 进一步, 对于线性定常系统, 文献[5]给出了特征方程的逐次递归的表达形式, 这就为其特征值的求解、分析及其分布提供了方便, 本文将利用文献[3~5]的成果讨论(1)式特征值的数值解法, 并分析其分布.

1 预备知识

系统(1)的状态方程表示为

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{vmatrix} x = Ax, \quad (2)$$

经初等等价变换不难将 A 阵化为 Schwartz 阵的形式, 即

$$\dot{y} = By, \quad (3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -b_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b_{n-2} & -b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

文献[2]给出

$$b_{n-1} = H_1, b_{n-2} = \frac{H_2}{H_1}, b_{n-3} = \frac{H_3}{H_1 H_2}, \cdots, b_0 = \frac{H_{n-3} H_n}{H_{n-2} H_{n-1}}, \quad (5)$$

式中 $H_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 Hurwitz 行列式, 已知当所有的 b_i 为正时系统(1)式渐进稳定, 由(5)式可以看出这显然和 Hurwitz 稳定判据一致.

文献[2]还给出了由 A 转换成 B 阵的转换阵. 但文献[3, 4]给出的方法更为直观, 并便于编写计算程序, 在以后的分析中要借助于这个程序, 故予以介绍如下: 利用非零的 $-a_{n-1}$ 经过列变换由右向左逐个消除第 n 行中的第 $n-2, n-4, \cdots$ 列上的元, 相应的行变换将使第 $n-1$ 行的第 $n-2, n-4, \cdots$ 列上出现非零元, 即得到下列形式的系统矩阵:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ * & 0 & * & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & * & 0 & \cdots & -b_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & * & 0 & \cdots & * & 0 & 1 \\ * & 0 & * & \cdots & 0 & -b_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

(n 为奇数) (n 为偶数)

然后利用第 n 行第 $n-1$ 列的非零元(即 b_{n-2}), 自右向左经列变换逐个消除第 n 行除第 n 及 $n-1$ 列上的元以外的各元. 这样第 n 行中只保留有 $-b_{n-2}$ 和 $-b_{n-1} (= -a_{n-1})$. 重复以上步骤自下而上逐步消去各元, 最后得 Schwartz 阵, 也就求得了所有的 $b_i, i \in \overline{[0, n-1]}$. 从以上运算可以看出, b_{n-1} 和 b_{n-2} 不能等于零, 否则运算无法进行. 在本文中我们假设这一条件是满足的, 以便讨论有关问题, 如果此条件不满足, 只要对多项式 $(s+a)A(s)$, $a = \text{const}$, 进行相似的分析就可以了, 因此本文的分析并不失去普遍意义. 我们还可以注意到一个重要结果, 若 $b_i = 0$, 则在 $b_1, \cdots, b_{i-1}$ 的各自的同一行中其左边的各元均应为零, 因为 $b_i = 0$ 时将无法用它消除同行中 b_i 以左的各元(如果它们存在的话), 运算只能终止, 因此 $b_{i-1}, b_{i-2}, \cdots$ 及其同行中其左的各元也都不会产生. 此结果和文献[2]中的结果是一致的. 确实, 举例来说, 若(5)式中 $b_{n-3} = 0$, 则要求 $H_3 = 0$, 此时 $b_{n-4} = \infty$, 显然没有意义.

文献[5]应用无源性分析研究一般动态系统的稳定性, 给出一种递推运算方法. 对于线性

定常系统所得结果和 Schwartz 矩阵的性质一致, 文中指出代表下列传递函数的循环反馈网:

$$\frac{A(s)}{D(s)} = \frac{b_{n-1}}{\vdots} + s, \quad (6)$$

$$\frac{b_2}{\frac{b_1}{s+b_0} + s}$$

其中 $A(s)$ 即为(1)式所示, 而(6)式中 b_i 即(4)式矩阵中的诸元. 根据文献[5]的结果. 对于定常线性系统 $A(s)$ 可以由以下递推形式求得:

$$A_i(s) = sA_{i-1}(s) + b_{i-1}A_{i-2}(s), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

其中 $A_{-1}(s) = 1, A_0(s) = 1$, 余下的 $A_i(s)$ 由(7)式递推求得. 不难验证(7)式和(3)、(4)式所示状态方程一致. 下一节中我们将可看到, (7)式提供了一种用递推方法求解(1)式的特征值的方法.

2 特征值计算

利用以上预备知识, 下面给出两种计算(1)式特征值的方法.

2.1 根轨迹法

由(7)式可知 $A_i(s)$ 的特征值是图1所示系统的极点, 在 $A_{i-2}(s), A_{i-1}(s)$ 和 b_{i-1} 已知的情况下, 利用根轨迹的作图法可以求得 $A_i(s)$ 的特征值. 文献[6]给出了求根轨迹的现成的程序. 我们注意到图中分子分母总相差二阶, 因此根轨迹的渐近线总和虚轴平行. 在常规的根轨迹作图中 b_{i-1} 均为正. 而我们这里 b_{i-1} 可能为正, 也可能为负, $A_i(s)$ 的特征值可能分布在复平面内. 根据特征方程的根

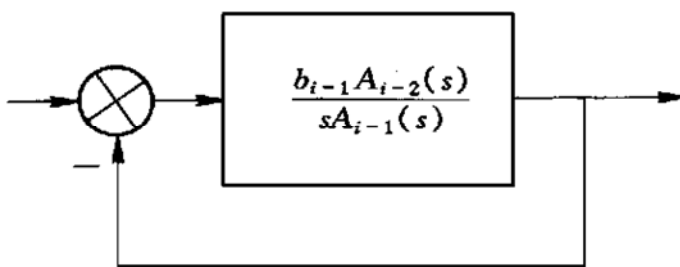
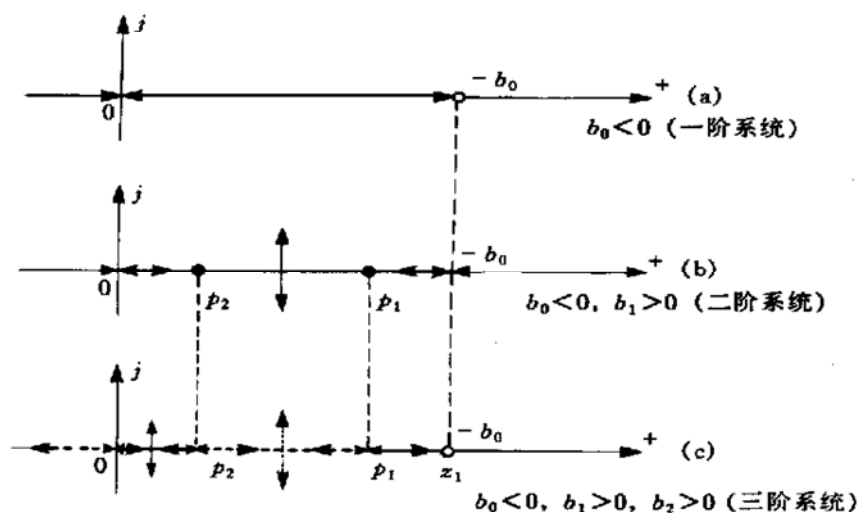


图1 由(7)式得到的反馈系统

随其方程的系数连续变化的原理, $b_{i-1} < 0$ 时根轨迹的走向应和 $b_{i-1} > 0$ 时走向相反. 即正常 $b_{i-1} > 0$ 时根轨迹应由 $s = 0$ 和 $A_{i-1}(s) = 0$ 的零点出发走向 $A_{i-2}(s) = 0$ 的零点, 但当 $b_{i-1} < 0$ 时根轨迹的走向相反. 考虑到上述 b_{i-1} 正负不同情况, 根轨迹的渐近线显然仍平行于虚轴, 但可能从正负无穷远处相交后才和虚轴平行. 下面举 $i = 0, 1, 2$ 的一种情况为例, 其根轨迹如图2所示. 为便于理解, 图中分别表示出一阶、二阶及三阶系统的情况.

对于一阶系统情况很简单, 系统的极点就在 $-b_0$ 处, 当 $b_0 < 0$ 时得一正实根. 对二阶系统当 $b_1 > 0$ 时根轨迹和常规反馈系统的情况相同, $s = 0$ 和 $s = -b_0$ 的两个极点相互靠拢, 若 b_1 较大则可能产生共轭极点, 图中用实线表示其根轨迹. 设在某一 b_1 时所得极点是 p_1 和 p_2 , 均为正实根. 三阶系统的根轨迹示于图2(c)中, 注意, 此时反馈系统中有一个零点 $z_1 = -b_0$, 它就是一阶系统的极点, 但系统的零极点之差仍为2, 图中用实线表明 $b_2 > 0$ 的根轨迹, 用虚线表明 $b_2 < 0$ 的情况, 根据轨迹的原理, 图2(c)所示结果是很容易理解的.

对于四阶及更高阶的系统求取系统极点(即(1)式的特征值)的原理相同. 有一点要特别注意, i 阶系统所得的极点将是 $i+2$ 阶系统的零点, 而每次作根轨迹图时总有一个 $s = 0$ 的极点从原点移出, 或左移, 或右移.

图 2 $i = 0, 1, 2$ 时的根轨迹

2.2 搜索法

令

$$s = D + r, r \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

由(1)式可得

$$\begin{aligned} A(s) &= (D + r)^n + a_{n-1}(D + r)^{n-1} + \dots + a_1(D + r) + a_0 = \\ &= D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \dots + c_1D + c_0 = C(D), \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} c_{n-1} = nr + a_{n-1}, \\ c_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!}r^2 + (n-1)a_{n-1}r + a_{n-2}, \\ c_{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}r^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}a_{n-1}r^2 + (n-3)a_{n-2}r + a_{n-3}, \\ \vdots \\ c_0 = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0. \end{cases} \quad (10)$$

记 $C(D)z = 0$, 用状态方程表示可得

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \dots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{bmatrix} z. \quad (11)$$

用相同的办法将(11)式中的系统矩阵化为 Schwartz 矩阵, 可得

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -b'_0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -b'_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b'_{n-2} & -b'_{n-1} \end{bmatrix} v, \quad (12)$$

式中所有的 b'_1 均是 r 的函数. (8)式表明 D 域中的特征值加上 r 即得 S 域中的特征值. 改变 r , 就是移动虚轴, 于是采用搜索方法可求得 S 域中最靠近虚轴的极点, 若这个极点是实极点, 则必有 $b'_0 = 0$, 即在 D 域中原点是极点. 若在 S 域中极点在虚轴的左半侧, 则 $r < 0$, 若在 S 域中此极点在虚轴的右半侧, 则 $r > 0$. 若最靠近虚轴的极点是一对共轭极点, 则此时 $b'_1 = 0$, 此时极点的位置也由 r 来判定. 当 $b'_1 = 0$, 系统(12)式分解为左上角和右下角两个独立的部分, 其中左上角部分的系统矩阵为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -b'_0 & 0 \end{vmatrix}$, 由此可得系统的一个因子为 $(D^2 + b'_0)$, 若 $b'_0 > 0$, 则在此 r 处在 D 域内得一对共轭复根 $\pm i \sqrt{b'_0}$, 若 $b'_0 < 0$, 则得正负实根各一, 这表明 r 位于此对实根的对称中心. 此时必有一实根在 S 域中更靠近虚轴, 因此它可以从搜索使 $b'_0 = 0$ 来获得. 若存在重实根, 则当 $b'_0 = 0$ 时必有 $b'_1 = 0$, 多重实根可依次类推, 因为当 $b'_0 = 0$ 时(12)式中状态矩阵的第二行和第二列以下形成独立的 $(n-1) \times (n-1)$ 状态矩阵, 若它也存在零根, 则必须 $b'_1 = 0$, 余下类推. 同理, 当 $b'_1 = 0$ 时除有 $\pm i \sqrt{b'_0}$ 共轭复根外还有一对共轭复根, 则必须 $b'_2 = 0$, 此时同时存在 $\pm i \sqrt{b'_2}$ ($b'_2 > 0$) 共轭复根. 余下类推, 求得已知的实极点或共轭极点, 可用剔因子的办法使 $A(s)$ 降阶, 然后重复以上搜索办法, 直到求得 $A(s)$ 的所有特征值, 注意不能再利用(12)式继续搜索其它特征值了, 因为系统的阶次已经变了.

文献[7]提供了一种可用于上述搜索的快速算法.

3 特征值的分布

第2.1节说明将(2)式化为(4)式后可用根轨迹法逐次递推确定(1)式的特征值, 即由 $A_{i-2}(s)$ 确定的零点和 $A_{i-1}(s)$ 确定的极点, 根据 b_{i-1} 确定 $A_i(s)$ 的特征值, 逐步依次递推即可求得 $A(s)$ 的全部特征值. 由此法我们还可以看出, 由 $b_i, i \in [0, n-1]$ 的符号即可判别在复平面内左、右各半平面内有几个特征值. 现将其原理陈述如下. 我们不考虑 $b_i = 0$ 的情况, 上节中已经说明此时 $A(s)$ 在虚轴上有特征值, 而且容易求出. 由第2.1节的分析可以看出以下规则成立:

(1) 作根轨迹时用到的渐近线总是平行于虚轴, 此渐近线或在左半平面或在右半平面, 不跨越左右两个半平面. 因此极点移动时不会由左半平面转入右半平面, 或相反, 即原在左半平面内的极点不会再移动到右半平面, 反之亦然.

(2) 在每一步递推运算中都要确定极点 $s = 0$ (原点) 的走向, 它沿实轴或走向左边, 或走向右边, 只可能取其一, 不可能再返回. 这一点也和上一点结论相符.

(3) 以上两点说明在左右各半平面内共有多少个特征值, 只决定于 b_i 的符号, 不受 $|b_i|$ 大小的影响. 我们只需判别每一步极点 $s = 0$ 走向那半平面即可. 为便于说明问题, 设想 b_i 使 $s = 0$ 移向左(右)边, 若 $|b_i|$ 很小, 则在很靠近原点的左(右)侧有一特征值, 于是若 $b_{i+1} > 0$, 则根据根轨迹原理, 在第 $i+2$ 步 $s = 0$ 将移向左(右)边, 若 $b_{i+1} < 0$, 则相反. 以上分析表明在递推过程中, 每一步在那一边增加特征值, 决定于在此步及其以前各 b_i 符号的累积变化.

由上规则即可确定左(右)半复平面内有多少特征值. 今以图2所示 $i = 0, 1, 2$ 时的例子加以说明. 为此记

$$[x] = \begin{cases} 1, & \text{若 } x > 0, \\ 0, & \text{若 } x < 0, \end{cases} \quad (13)$$

显然, 由 b_0 产生的在左半平面内的特征值有 $[b_0]$ 个, 由 b_1 新增加的左半平面内的特征值有 $[b_0 b_1]$ 个, 即二阶系统在左半平面内的特征值数目为 $([b_0] + [b_0 b_1])$ 个, 这里我们采用 b_0 和 b_1 相乘的符号来确定左半平面是否增加特征值, 是因为必须考虑 b_0 产生的特征值在那个半平面才能判别 b_1 的正负将使 $s=0$ 走向那边. 依次类推 b_2 在左半平面内新增加的特征值数目为 $[b_0 b_1 b_2]$. 于是三阶系统在左半平面内应有的特征值的数目为 $([b_0] + [b_0 b_1] + [b_0 b_1 b_2])$. 于是对于 n 阶系统在左半平面内应有的特征值数目为 $\sum_{j=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{n-j} (b_i)$ 个, 以上结果显然与图 2 所示结果一致, 显然, 若 $b_i > 0, i \in [0, n-1]$, 则所有的特征值均在左半平面内, 此时系统稳定, 这是已有的结论, 显然还可以看出 $b_i < 0, i \in [0, n-1]$, 并不表示所有的特征值都在右半平面内, 若要所有的特征值都在右半平面内, 必须 $b_0 < 0, b_1 > 0, b_2 < 0, \dots$, 正负相间直至 b_{n-1} .

以上方法只能确定在左半平面内有多少个特征值, 但不能判别其中有几个共轭复特征值, 复特征值是否出现决定于 $|b_i|$ 的大小, $|b_i|$ 增大, 将使产生共轭特征值的可能性增大, 根据根轨迹法也并不难求产生共轭特征值时最小的 $|b_i|$.

文献中已有用 Routh-Hurwitz 判别法研究特征值的分布的, 例如可以参阅文献[8]及其所引用的文献. 本文所得结果显然和文献[8]一致, 因为和本文一样, 文献[8]也是在 Schwartz 阵的基础上讨论的, 但本文的结果更为简便直观.

4 小结

我们首先把由特征多项式确定的系统状态矩阵化为 Schwartz 矩阵, 根据 Schwartz 阵的性质给出了两种计算特征多项式的全部特征值的方法. 第 1 种方法是用根轨迹法由低阶到高阶逐次递推求出多项式的全部特征值, 根据根轨迹原理还可以用 Schwartz 阵中各元素的符号事先定出在左右各半复平面内各有多少个特征值. 第 2 种方法是利用搜索法由 Schwartz 阵确定特征多项式的所有因子. 以上方法都很实用, 计算简单且可靠有效, 均已有现成的计算程序可以利用.

参 考 文 献

- 1 杨 路, 侯晓荣, 曾振柄. 多项式的完全判别系统. 中国科学, E 辑, 1996, 26(10): 424~ 441
- 2 Csaki F. State-Space Methods for Control Systems. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1977
- 3 冯纯伯. 判别线性定常系统稳定性的一种计算方法. 南京工学院学报, 1980, 2: 57~ 60
- 4 冯纯伯, 王海风. 线性多变量系统的稳定判据. 中国科学, A 辑, 1987, (7): 771~ 778
- 5 冯纯伯. 应用无源性分析研究时变非线性系统的稳定性. 自动化学报, 1997, 12: 775~ 781
- 6 南京航空学院、西北工业大学、北京航空学院合编. 胡寿松主编. 自动控制原理(修订版), 上册. 北京: 国防工业出版社, 1984
- 7 江 帆, 王海风, 冯纯伯. 一种判别电力系统静态稳定性的快速算法. 中国电机工程学报, 1987, 7(6): 29~ 35
- 8 Chen C. T. Linear System Theory and Design. Holt: Rinehart and Winston, 1984