



5- 正则图的路分解

献给刘桂真教授 80 寿辰

初亚男¹, 范更华², 洪明珠², 周垂香^{2*}

1. 苏州科技大学数学科学学院, 苏州 215009;

2. 福州大学离散数学研究中心, 福州 350108

E-mail: ynchu@mail.usts.edu.cn, fan@fzu.edu.cn, 1577546318@qq.com, cxzhou@fzu.edu.cn

收稿日期: 2023-11-20; 接受日期: 2024-05-07; 网络出版日期: 2024-07-29; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12201447, 11971110 和 12271099) 资助项目

摘要 对于正则图的路分解问题, Favaron 等 (2010) 提出猜想: 对于奇数 l , 任意包含一个完美匹配的 l -正则图可以分解成长度为 l 的路. 当 $l=5$ 时, Favaron 等 (2010) 证明了不含 4-圈时猜想成立. 后来 Botler 等 (2015) 证明了不含 3-圈时猜想成立. 本文证明当 $l=5$ 且图中任意 3-圈与 4-圈的交为空集时, 猜想成立.

关键词 分解 路 正则图

MSC (2020) 主题分类 05C07, 05C38

1 引言

本文涉及的图都是有限的简单图. 图 G 的顶点集用 $V(G)$ 表示, 边集用 $E(G)$ 表示. 如果图 G 的每个点的度都等于 k , 则图 G 称为 k -正则图. 圈或路的长度分别指它们包含的边数. 图 G 的一个完美匹配是一组点不交的边且包含 G 的所有顶点. 设 $\mathcal{H}$ 是由一些图构成的集合, 如果图 G 中不存在子图同构于 $\mathcal{H}$ 中的图, 则称 $\mathcal{H}$ 是 G 的禁用子图集. 设 $\mathcal{D}$ 是图 G 中的一组边不交的子图. 若 $\mathcal{D}$ 满足 $\bigcup_{H \in \mathcal{D}} E(H) = E(G)$, 则称 $\mathcal{D}$ 为图 G 的一个分解. 若 $\mathcal{D}$ 中每个子图均为路, 则称 $\mathcal{D}$ 为 G 的一个路分解. 进一步地, 如果 $\mathcal{D}$ 中每个子图都是长度为 k 的路, 则称 $\mathcal{D}$ 为 G 的一个 P_k -分解.

近年来, 正则图的路分解问题被广泛研究. 众所周知, 关于路分解有著名的 Gallai 猜想 (参见文献 [8]): 任意 n 个点的连通图可以分解成至多 $\lceil n/2 \rceil$ 条路. Lovász [8] 在 Gallai 猜想方面做了许多重要工作, 下面的定理就是 Lovász 的一个结果的推论.

定理 1.1 [8] 对于奇数 l , 任意 n 个点的 l -正则图可以分解成至多 $n/2$ 条路.

英文引用格式: Chu Y N, Fan G H, Hong M Z, et al. Path decompositions of 5-regular graphs (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1787–1794, doi: 10.1360/SSM-2023-0316

注意到, 在定理 1.1 中, 只给出了关于路的个数的界, 并没有限制路的长度. Kotzig^[7]、Bouchet 和 Fouquet^[5] 分别证明了包含完美匹配的 3- 正则图存在 P_3 - 分解 (包含完美匹配是必要条件). Favaron 等^[6] 证明了包含完美匹配且不含 4- 圈的 5- 正则图存在 P_5 - 分解, 提出了以下猜想:

猜想 1.1 假设 l 是一个奇数. 如果 G 是 l - 正则图且包含一个完美匹配, 则 G 存在 P_l - 分解.

如果猜想 1.1 成立, 则不难计算 G 的边数为 $\frac{1}{2}nl$, 而在 G 的 P_l - 分解中每条路含 l 条边, 那么路的个数正好是 $\frac{\frac{1}{2}nl}{l} = n/2$, 从而满足 Gallai 猜想中关于路的个数的界. 也就是说, 如果上述猜想成立, 则在存在完美匹配的条件下, 可得出比定理 1.1 更强的结果.

关于猜想 1.1 的研究, Botler 等^[4] 证明了当 $l = 5$ 且 G 不含三角形时, 猜想成立. 用类似的方法, 文献 [3] 将以上结论进行了推广, 证明了对于 $(2k+1)$ - 正则且围长至少是 $2k$ 的图, 猜想 1.1 成立. 最近, Botler 和 Hoffmann^[2] 证明了以下两类图猜想 1.1 成立: 包含支撑圈的 k 次方的 $(2k+1)$ - 正则图, 包含简单交换 4- 正则 Caley 子图支撑子图的 5- 正则图.

聚焦于 5- 正则图, 文献 [4, 6] 已经证明了当 G 分别不包含 3- 圈和 4- 圈时, 猜想 1.1 成立. 在允许 G 含 3- 圈和 4- 圈的前提下, 本文证明了当 G 中任意 3- 圈与任意 4- 圈的交 (指边集的交) 为空集时, 猜想成立. 令 C_1 是 G 中的一个 3- 圈, C_2 是 G 中的一个 4- 圈. 注意到 G 是简单图, 从而 $|E(C_1) \cap E(C_2)| \leq 2$. 当 $|E(C_1) \cap E(C_2)| = 2$ 时, $C_1 \cup C_2$ 同构于 4- 圈加一条弦; 而当 $|E(C_1) \cap E(C_2)| = 1$ 时, $C_1 \cup C_2$ 则同构于 5- 圈加一条弦. 如果用 C_4^+ 和 C_5^+ 分别表示子图 4- 圈和 5- 圈加一条弦, 则本文的结论可以描述为: 令 G 是包含完美匹配的 5- 正则图. 当 $\{C_4^+, C_5^+\}$ 是 G 的禁用子图集时, G 存在 P_5 - 分解.

接下来介绍本文要用到的一些符号和定义. 令 G 是一个图. 设 $x, y \in V(G)$, xy 表示以 x 和 y 为端点的边. 假设 H 是 G 的子图, x 是 G 的一个顶点, $N_H(x)$ 表示点 x 在 H 中的邻域, 即 $N_H(x) = \{y \mid y \in V(H), xy \in E(H)\}$. 若 $x, y \in V(H)$, 则 $d_H(x, y)$ 表示 x 与 y 在 H 中的距离. 令 F 是一个边集合, $G - F$ (或 $G + F$) 表示由 G 去掉 (或增加) F 中的所有边得到的图. 当 $F = \{uv\}$ 时, 通常简记为 $G - uv$ 和 $G + uv$. 图 G 的 k - 正则支撑子图称为 G 的 k - 因子. 图的完美匹配就是 1- 因子. 图的迹记作 $T = x_0x_1 \cdots x_{t-1}x_t$, 满足 $E(T) = \{x_ix_{i+1} : 0 \leq i \leq t-1\}$ 且 $x_ix_{i+1} \neq x_jx_{j+1}, i \neq j$. 在图中经过所有边恰好一次的迹称为 Euler 迹, 存在闭的 Euler 迹 (起点与终点相同) 的图称为 Euler 图. 进一步地, 由 Euler 图包含闭的 Euler 迹可推导出 Euler 图所有点的度数均为偶数.

在简单有向图 D 中, 有向边称为弧, 用 $A(D)$ 表示 D 的所有弧的集合. $xy \in A(D)$ 意味着 xy 是从 x 到 y 的一条有向边, 也称 x 控制 y . 有向图 D 的一点 v 的入邻点指控制 v 的顶点, 用 $N_D^-(v)$ 表示, $d_D^-(v) = |N_D^-(v)|$ 称为点 v 的入度. 类似地定义点 v 的出邻点为被 v 控制的顶点, 用 $N_D^+(v)$ 表示, $d_D^+(v) = |N_D^+(v)|$ 称为 v 的出度. 如果一个 Euler 图在定向 σ 下满足每个点的出度与入度相等, 则称 σ 为此 Euler 图的一个 Euler 定向.

2 主要结论

本节的目标是证明本文的主要结论—定理 2.2. 思路是首先找到图的一个长度为 5 的迹分解, 然后通过一系列调整, 将这个迹分解转换成 P_5 - 分解. 作为准备工作, 先列举出关于因子分解的定理及一些相关的定义, 然后证明引理 2.1, 这个引理在主要定理的证明中起着至关重要的作用.

以下是 Petersen^[9] 关于 Euler 图的 2- 因子分解定理的加强形式, 此结论可从 Petersen 定理的证明中得出, 并不需要单独证明 (参见文献 [1] 和 [6, 定理 5]).

定理 2.1 (Petersen 定理) 假设 σ 为 $2k$ -正则图 G 上的任意 Euler 定向, 则 G 可以分解成 k 个 2-因子使得定向 σ 在每个 2-因子上导出一个 Euler 定向.

本文研究的是 5-正则图的路分解. 给定 5-正则图 G , 根据前提条件, G 存在一个完美匹配 M , 再根据定理 2.1, $G - M$ 可以分解成两个 2-因子. 这样可以将一个 5-正则图分解成一个完美匹配和两个 2-因子, 继而在这 3 个子图中寻找需要的路分解. 下面的定义用来对迹中的点进行标号, 方便后面对迹分解的调整.

定义 2.1 令 ℓ 是 G 的边集上的函数, 满足 $\ell: E(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$, 记带有函数 ℓ 的 5-正则图 G 为 (G, ℓ) . 若 $T = x_0x_1x_2x_3x_4x_5$ 是图 (G, ℓ) 中长为 5 的迹并满足 $\ell(x_2x_3) = 0$, $\ell(x_1x_2) = \ell(x_3x_4) = 1$, $\ell(x_0x_1) = \ell(x_4x_5) = 2$, 则称 x_1 和 x_4 是 T 的 $(1, 2)$ -点, x_2 和 x_3 为 T 的 $(0, 1)$ -点.

为了叙述方便, 令 $\mathcal{T}$ 是两个图的集合, $T \in \mathcal{T}$ 是长为 5 的路或者是 4-圈加一条悬挂边构成的图. 可以看出 $\mathcal{T}$ 中的两个图均为长度为 5 的迹, 将其中含 4-圈的迹称为待调整的迹. 假设 $\mathcal{D}$ 是图 G 的一个迹分解, 用 $\mathcal{D}(v)$ 表示 $\mathcal{D}$ 中以点 v 为端点的迹的个数. 下面的引理给出一个特殊的迹的分解, 此分解的存在保证能将其转换成一个路分解.

引理 2.1 令 G 是一个包含完美匹配的 5-正则图且 G 中任意 3-圈与 4-圈的交为空集. 则 G 存在一个迹分解 $\mathcal{D}$ 使得任意 $T \in \mathcal{D}$ 都同构于 $\mathcal{T}$ 中的迹, 且对于 G 的任意点 v 有 $\mathcal{D}(v) = 1$. 进一步地, G 存在标号函数 ℓ 使得 (G, ℓ) 中任意点 v 有且仅有一个 $T \in \mathcal{D}$ 使得 v 是 T 的 $(j, j+1)$ -点, 其中 $j \in \{0, 1\}$.

证明 假设 M 是 G 的一个完美匹配. 令 $G' = G - E(M)$. 对于 G 的任意顶点 v , 设 $N_G(v) = \{v_0, v_1, \dots, v_4\}$. 由于 M 是完美匹配, 不妨假设 $vv_0 \in M$. 在此基础上, 通过 G' 来作一个新图 G'' , 作法如下: 如果 v 存在两个邻点 v_i 和 v_j 满足 $v_iv_j \in M$, 则将点 v 分裂成两个点 v' 和 v'' , 使得 $N_{G''}(v') = \{v_i, v_j\}$, $N_{G''}(v'') = N_{G'}(v) \setminus \{v_i, v_j\}$ (在 G'' 中, 与 v'' 相邻的两个点之间可能有边也可能没有边, 如果有边, 有可能在 M 中也有可能不在 M 中); 如果 v 中不存在满足上面条件的邻点 v_i 和 v_j , 则保持 v 在 G' 中的邻接关系, 即不对 v 进行任何操作. 于是 G'' 是一个 Euler 图且满足每个点的度是 2 或者 4. 此时, G'' 存在一个 Euler 迹, 沿着这个 Euler 迹进行定向使其成为一条有向的 Euler 迹, 这样的定向称为 Euler 定向. 假设 G'' 的 Euler 定向为 σ , 只需要将分裂的点合成一个点, σ 也可以转换成图 G' 上的 Euler 定向. 为减少符号的使用, 仍用 σ 表示图 G' 上的 Euler 定向.

由于 G' 是一个 4-正则图, 对于 G' 上的 Euler 定向 σ , 可以根据定理 2.1 将 G' 分解成两个 2-因子 F_1 和 F_2 使得 σ 在 F_1 和 F_2 上都成为 Euler 定向, 即 F_1 和 F_2 在定向 σ 下都是一组边不交的有向圈. 在 F_1 和 F_2 当中任选一个并将其上的方向改变为反方向, 此时得到的这个新的定向仍然是 F_1 和 F_2 上的 Euler 定向. 记这个新的定向为 σ^* , 同时 σ^* 也可以导出 G' 上的一个 Euler 定向. 接下来根据 M 及 F_1 和 F_2 对 G 进行迹分解.

对于任意 $e = uv \in M$, 选择 $uu_1, vv_1 \in A(F_1)$, 然后选择 $u_1u_2, v_1v_2 \in A(F_2)$. 注意到任意顶点在 F_i ($i = 1, 2$) 中的出度和入度都是 1, 所以上面对 u_1, v_1, u_2 和 v_2 的选择由 $e = uv$ 唯一确定. 于是按上面的方法对 M 中的每条边构造出一条长为 5 的迹, 共可得 $n/2$ 条这样的迹. 设 $T_1 = x_2x_1xyy_1y_2$ 和 $T_2 = u_2u_1uvv_1v_2$ 为其中任意两条迹, 我们要说明 $E(T_1) \cap E(T_2) = \emptyset$. 如若不然, 不失一般性, 可假设 $uu_1 \in E(T_1) \cap E(T_2)$ 或 $u_1u_2 \in E(T_1) \cap E(T_2)$. 由 F_1 和 F_2 中的定向以及 T_1 和 T_2 的构造可得, 如果 $uu_1 \in E(T_1) \cap E(T_2)$, 则 uv 与 xy 相邻, 与 uv 和 xy 分别是 M 中的边矛盾; 若 $u_1u_2 \in E(T_1) \cap E(T_2)$, 则在 F_1 中的定向中 u_1 的入度为 2, 同样矛盾. 这说明这样构造的迹之间是边不交的, 通过计算不难发现这 $n/2$ 条迹构成了 G 的分解, 将其记为 $\mathcal{D}$. 对于图 G 中任意一点 v , 在 F_2 中有且只有一条弧是

v 的入边, 从而 $\mathcal{D}(v) \leq 1$. 再根据 $\mathcal{D}$ 中迹的个数, 对于任意 $v \in V(G)$, 有 $\mathcal{D}(v) = 1$. 接下来证明分解 $\mathcal{D}$ 满足引理的其他要求.

任取 $\mathcal{D}$ 中的迹 $T = u_2 u_1 u v v_1 v_2$. 接下来分析 T 的结构.

(1) 如果 T 中没有圈, 则 T 是一条长为 5 的路, 此时显然同构于 $\mathcal{T}$ 中的路.

(2) 如果 T 中包含一个 3- 圈, 则这个 3- 圈一定包含 $e = uv$, 而根据 T 的取法, 3- 圈中除了 e 之外的其余两条边应该分别包含在 F_1 和 F_2 中, 因此 T 中有 $v = u_2$ 或 $u = v_2$. 又由 G 中 3- 圈与 4- 圈不交的结构特点, 可知 $v = u_2$ 和 $u = v_2$ 不同时成立. 不妨设 $v = u_2$. 从而 $uu_1 \in F_1$, $u_1 v \in F_2$. 注意到 σ^* 是将 σ 在 F_1 或 F_2 上反向得到的. 我们可假设 σ^* 是由 σ 在 F_1 上反向得到的, 于是, 在 σ 下, uu_1 和 $u_1 v$ 的方向应该是 $\overrightarrow{u_1 u}$ 和 $\overrightarrow{u_1 v}$. 然而 u_1 的两个邻点 u 和 v 之间的边为 $e = uv \in M$, 所以在 G'' 中 u_1 应该被分裂为两个 2 度点且 $uu_1 v$ 在 G'' 中的 Euler 定向中必须是一条 u 和 v 之间的有向路, 即 uu_1 与 $u_1 v$ 在定向 σ 下应该是 $\overrightarrow{u_1 u}$ 、 $\overrightarrow{vu_1}$ 或 $\overrightarrow{uu_1}$ 、 $\overrightarrow{u_1 v}$. 此矛盾说明 T 中不能包含 3- 圈.

(3) 如果 T 中包含 4- 圈, 则 T 同构于 $\mathcal{T}$ 中待调整的迹.

(4) 如果 T 是一个 5- 圈, 则 $u_2 = v_2$. 但是根据 T 的选取以及 σ^* 在 F_2 上导出的是一个 Euler 定向, 这种情形不会出现.

由 T 的任意性得到 $\mathcal{D}$ 中的迹必定与 $\mathcal{T}$ 中的图同构, 即 $\mathcal{D}$ 中的迹要么是 P_5 , 要么是待调整的迹.

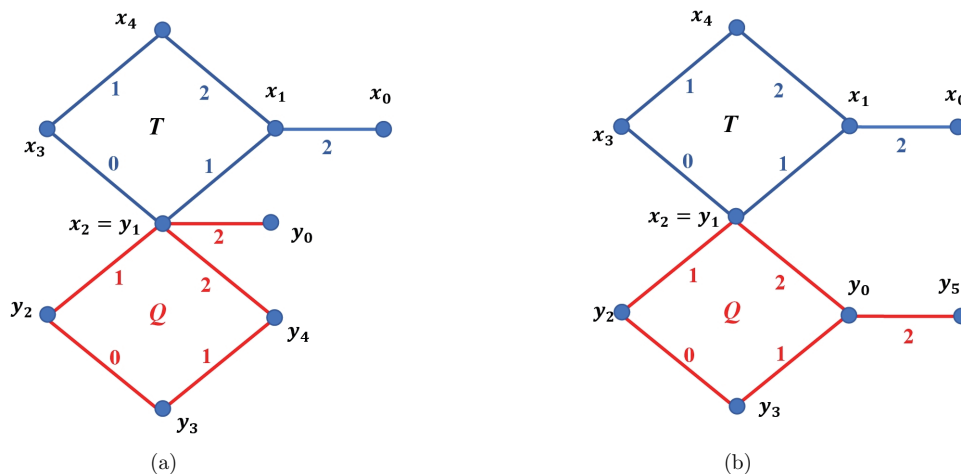
最后寻找引理中满足条件的标号. 定义 ℓ 如下:

$$\ell(e) = \begin{cases} 0, & e \in M, \\ 1, & e \in F_1, \\ 2, & e \in F_2. \end{cases}$$

任取一点 $v \in V(G)$, v 与 M 的一条边相邻, 同时与 F_i ($i = 1, 2$) 中两条边相邻且这条边在定向 σ^* 下分别是一条入边和一条出边. 根据 $\mathcal{D}$ 中迹的构造, v 分别是两条迹中的 $(0, 1)$ - 点和 $(1, 2)$ - 点. 进一步地, 由于 G 是 5- 正则图, 所以在标号 ℓ 下使 v 为 $(0, 1)$ - 点的迹是唯一确定的. 同理, 使 v 为 $(1, 2)$ - 点的迹也唯一. 引理证毕. $\square$

假设 G 是包含完美匹配的 5- 正则图, $\mathcal{D}$ 是 (G, ℓ) 中满足上述引理的迹分解, 即 $\mathcal{D}$ 中每个迹是长为 5 的路或者是待调整的迹, 对于任意点 v , 都有 $\mathcal{D}(v) = 1$ 且以 v 为 $(0, 1)$ - 点和 $(1, 2)$ - 点的迹分别是唯一确定的.

令 $T = x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_1$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个待调整的迹, 其中 $\ell(x_2 x_3) = 0$, $\ell(x_1 x_2) = \ell(x_3 x_4) = 1$ 且 $\ell(x_0 x_1) = \ell(x_4 x_1) = 2$. 将 x_2 称为 T 的连接点, 将 x_1 称为 T 的中心. 注意到, 在 T 中 x_1 既是端点也是 $(1, 2)$ - 点, x_2 是 $(0, 1)$ - 点且有 $d_T(x_1, x_2) = 1$. 假设 $Q = y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5$ 是 $\mathcal{D}$ 中的迹, 满足 $\ell(y_2 y_3) = 0$, $\ell(y_1 y_2) = \ell(y_3 y_4) = 1$ 且 $\ell(y_0 y_1) = \ell(y_4 y_5) = 2$. (Q 可以是长为 5 的路也可能是待调整的迹. 若 Q 为待调整的迹, 则 $y_5 = y_1$ 或 $y_0 = y_4$, 此情形可参考图 1 中 Q 的两种可能性.) 进一步假设 T 的连接点 x_2 是 Q 的 $(1, 2)$ - 点, 不妨设 $x_2 = y_1$ (T 和 Q 的位置关系见图 1). 定义 T 和 Q 上的 α - 操作如下: 将 T 和 Q 分别变换为 $T' = T - x_1 x_2 + y_0 y_1$ 和 $Q' = Q - y_0 y_1 + x_1 x_2$ 并调整函数 ℓ 使得 $\ell(x_1 x_2) = 2$. 当 G 中的任意 3- 圈和 4- 圈的交为空时, 上述操作中得到的 T' 是一条长为 5 的路, 而 Q' 可能是一条路也可能是一条待调整的迹, 这取决于 Q 的结构. 如下定理的证明中将进一步刻画 Q' 的结构并运用 α - 操作将待调整的迹转换为路, 从而证明本文的主要结论. 这里再强调一下, 迹的连接点、中心、 $(0, 1)$ - 点及 $(1, 2)$ - 点都是在特定的函数 ℓ 之下才有定义的.

图 1 (网络版彩图) 满足 α -操作的 T 和 Q : (a) $y_5 = y_1$; (b) $y_0 = y_4$

定理 2.2 令 G 是包含完美匹配的 5-正则图. 假设 G 中的任意 3-圈与 4-圈均不相交, 则 G 存在 P_5 -分解.

证明 令 $\mathcal{D}$ 为 G 的分解, 且 $\mathcal{D}$ 包含长度为 5 的路和待调整的迹. 根据引理 2.1, 存在标号函数 ℓ 使得 $\mathcal{D}$ 在 ℓ 下满足以下性质: (1) 对于任意点 $v \in V(G)$, 都有 $\mathcal{D}(v) = 1$; (2) 对于 $\mathcal{D}$ 中的任意待调整的迹 W , 都存在 $\mathcal{D}$ 中唯一的迹 W' , 使得 W 的连接点与 W' 的 $(1, 2)$ -点重合. 在所有满足以上条件的分解 $\mathcal{D}$ 中, 令 $\mathcal{D}^*$ 是含待调整的迹最少的分解. 为方便叙述, 用 $b(\mathcal{D}^*)$ 表示分解 $\mathcal{D}^*$ 中所包含的待调整的迹的条数. 如果 $b(\mathcal{D}^*) = 0$, 则 $\mathcal{D}^*$ 就是 G 的 P_5 -分解, 定理得证. 因此, 不妨设 $b(\mathcal{D}^*) > 0$. 接下来的目标是将 $\mathcal{D}^*$ 中所有待调整的迹都转化为长度为 5 的路.

首先作有向图 A , 使得 A 的顶点与 $\mathcal{D}^*$ 中元素相对应, A 中两个顶点 T 与 Q 之间有弧 $\overrightarrow{TQ}$ 当且仅当 $\mathcal{D}^*$ 中的元素 T 与 Q 满足: (I) T 是待调整的迹; (II) T 的连接点是 Q 的 $(1, 2)$ -点. 由于 $\mathcal{D}^*$ 中每个迹最多有两个 $(1, 2)$ -点且根据引理 2.1, $\mathcal{D}^*$ 中每个待调整的迹有且只有一个元素, 其 $(1, 2)$ -点与这个待调整的迹的连接点重合. 所以在有向图 A 中, 如果 T 所代表的迹在 $\mathcal{D}^*$ 中是一条待调整的迹, 则 $d_A^+(T) = 1$ 且 $d_A^-(T) \leq 2$; 如果 T 代表的迹在 $\mathcal{D}^*$ 中是一条路, 则 $d_A^+(T) = 0$ 且 $d_A^-(T) \leq 2$. 从而, A 的每个连通分支最多含一个圈.

假设 $T \in V(A)$ 是图 A 中所有非孤立点中入度数最小的一个点, 显然有 $d_A^-(T) \leq 1$. 若 $d_A^-(T) = 0$, 则有 $d_A^+(T) = 1$. 于是在原图 G 中, 与 T 相对应的分解 $\mathcal{D}^*$ 中的元素是一条待调整的迹.

设 $N_A^+(T) = \{Q\}$. 不失一般性, 假设 $N_A^-(Q) = \{T, Q_1\}$, $N_A^+(Q) = \{Q_2\}$, 其中 Q_1 与 Q_2 有可能不存在. 当 Q 是一条路时, Q_2 一定不存在; 当 Q 的另一个 $(1, 2)$ -点是一条路的 $(0, 1)$ 点时, 则 Q_1 不存在. 为简便起见, 仍用 T 、 Q 、 Q_1 和 Q_2 表示与其相对应的分解 $\mathcal{D}^*$ 中的元素.

令 $T = x_0x_1x_2x_3x_4x_1$, $Q = y_0y_1y_2y_3y_4y_5$ 且 $y_1 = x_2$, 其中可以有 $y_5 = y_1$ 或 $y_0 = y_4$. 针对 T 和 Q 进行 α -操作. 根据 G 中任意 3-圈和 4-圈均不相交的结构特点以及分解 $\mathcal{D}^*$ 是由 F_1 和 F_2 上的 Euler 定向得来, 可知 Q 一定不经过 T 的中心点, 即 $x_1 \notin V(Q)$, 同时 $y_0 \notin V(T)$. 从而经过 α -操作后 T' 是长度为 5 的路, 而 Q' 则可能是一条路 (当 Q 是一条路或 Q 是图 1(b) 时), 也可能是一条待调整的迹 (当 Q 是图 1(a) 时). 令 $\mathcal{D}' = (\mathcal{D}^* \setminus \{T, Q\}) \cup \{T', Q'\}$. 不难看出 $\mathcal{D}'$ 仍然是 G 的迹分解且每条迹要么是长为 5 的路, 要么是待调整的迹. 接下来继续验证 $\mathcal{D}'$ 是否符合定理证明中要求的所有条件. 首先 α -操作只是交换了两条迹的端边, T' 的端点是 x_0 和 y_0 , Q' 的端点是 x_1 和 y_1 或 x_1 和 y_5 , 其中

y_1 或 y_5 是 Q 的端点, 即 α - 操作交换了两条迹的一个端点, 并没有改变以某个点为端点的迹的个数. 所以对于任意一点 $v \in V(G)$, 由 $\mathcal{D}^*(v) = 1$ 可知 $\mathcal{D}'(v) = 1$ 成立. 其次由 α - 操作的定义可知, 在函数 ℓ 的定义下, Q_1 若存在, 则它的连接点仍然是 Q' 的 $(1, 2)$ - 点, 并且当 Q' 是待调整的迹时, Q' 的连接点仍然是 Q_2 的 $(1, 2)$ - 点, 且此时的 Q_2 是唯一的. 由于在 A 中, $d_A^-(T) = 0$, 所以 T' 中的 x_1 和 x_4 不会是其连接点, 所以 T 转换为 T' 并不影响 A 中其他点的出度. 事实上, 只有当 Q 是待调整的迹且与 T 的关系如图 1(a) 所示时, α - 操作得到的 Q' 才是待调整的迹. 由上面的分析可知, $\mathcal{D}'$ 中任意待调整的迹都有唯一的迹满足条件 (2). 但是 T 转换成 T' 使得 $b(\mathcal{D}') \leq b(\mathcal{D}^*) - 1$, 这与开始时 $\mathcal{D}^*$ 的选择相矛盾. 于是一定有 $d_A^-(T) = 1$ 且 $d_A^+(T) = 1$, 从而可知图 A 的每个连通分支是孤立点或圈且与 $\mathcal{D}^*$ 中待调整的迹所对应点一定含在 A 的某个圈中.

根据 A 的构造, 如果 A 的某个连通分支是孤立点, 则这个点所代表的迹是一条路. 对于 A 中的孤立点, 我们不进行任何操作. 如果 A 的某个连通分支是圈, 则这个圈上的所有点相对应的 $\mathcal{D}^*$ 中的元素都是待调整的迹. 对于 A 中的圈, 有如下断言:

断言 2.1 假设 C 是 A 的连通分支且 C 是一个圈, 则 $\mathcal{D}^*$ 中对应于 C 上所有点的迹都可以转换成长度为 5 的路.

根据此断言, $\mathcal{D}^*$ 中所有待调整的迹都可以转换成长度为 5 的路, 这样就证明了定理 2.2. 接下来的主要工作就是证明断言 2.1.

断言 2.1 的证明 令 $C = T_1 T_2 \cdots T_k T_1$ 是 A 中的圈, 边的方向是由 T_k 到 T_1 , 且当 $i = 1, \dots, k-1$ 时, 由 T_i 到 T_{i+1} . 根据 G 的结构, 可得 $|C| \geq 3$. 为方便起见, 仍延续之前的做法, 用 T_i 表示与其相对应的 $\mathcal{D}^*$ 中的迹, 其中 $1 \leq i \leq k$. 由之前的分析可知 T_i ($1 \leq i \leq k$) 在 $\mathcal{D}^*$ 中是一条待调整的迹. 圈 C 上的两个相邻顶点, 对应到 $\mathcal{D}^*$ 中的两条迹 T 和 Q (如图 1(a) 和 1(b) 所示), 它们有两种位置关系. 在图 1(a) 中, Q 的中心是 T 的连接点; 而在图 1(b) 中, Q 的 $(1, 2)$ - 点是 T 的连接点. 下面就 T_i 和 T_{i+1} 的位置关系从以下 3 个方向进行证明.

情形 1 T_k 的连接点是 T_1 的中心, 对于 $1 \leq i \leq k-1$, T_i 的连接点是 T_{i+1} 的中心.

为满足下标的表达, 可令 $T_0 = T_k$. 对于所有的 $i \in \{1, \dots, k\}$, 令 v_i 和 u_i 分别是 T_i 的端点且 v_i 是 T_i 的中心点. 于是根据条件, v_i 也是 T_{i-1} 的连接点. 此时作如下变换 (见图 2, 分别用红色实线和黑色实线表示相邻的 T_i): $T'_k = T_k - u_k v_k - v_k v_1 + v_{k-1} v_k + v_1 u_1$, $T'_1 = T_1 - u_1 v_1 - v_1 v_2 + v_k v_1 + v_2 u_2$, $T'_i = T_i - u_i v_i - v_i v_{i+1} + v_{i-1} v_i + v_{i+1} u_{i+1}$, 这里 $i = 2, \dots, k-1$. 由于 G 中任意 3- 圈与 4 圈都不相交, 不难验证以上定义的所有 T'_i ($1 \leq i \leq k$) 都是长度为 5 的路.

情形 2 T_k 的连接点是 T_1 的 $(1, 2)$ - 点, 对于 $1 \leq i \leq k-1$, T_i 的连接点是 T_{i+1} 的 $(1, 2)$ - 点.

如果 k 是偶数, 则对所有的 T_{2i-1} 和 T_{2i} ($i \in \{1, 2, \dots, k/2\}$) 构成的对作 α - 操作. 由于在 G 中任意 3- 圈和 4- 圈的交都为空集, 每个 T_i ($1 \leq i \leq k$) 在 α - 操作下都变成了路, 于是结论成立. 从而假设 k 是奇数. 首先考虑 $k \geq 5$ 的情形. 先在每对迹 T_{2i} 和 T_{2i+1} ($i = 2, \dots, (k-1)/2$) 上进行 α - 操作. 根据同上面类似的分析知, $T_4 \cup T_5 \cup \cdots \cup T_k$ 可以分解成 $k-3$ 条 G 中的路. 最后, 考虑剩下的 3 条迹 T_1 , T_2 和 T_3 . 为方便讨论, 令 $T_1 = z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 z_1$, $T_2 = x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_1$, $T_3 = y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_1$, 其中 $z_2 = x_4$, $x_2 = y_4$. (这里不排除以下情形: $x_0 \in \{y_2, z_4\}$, $y_0 \in \{x_4 = z_2, z_4\}$ 和 $z_0 \in \{x_2 = y_4, y_2\}$. 因为 $\mathcal{D}(z_0) = 1$, 所以可得 $z_0 \notin \{x_1, y_1\}$. 类似地有 $x_0 \notin \{y_1, z_1\}$ 且 $y_0 \notin \{x_1, z_1\}$.) 如果能够证明由 $E(T_1) \cup E(T_2) \cup E(T_3)$ 构成的子图可以分解成 3 条路, 结合 $T_4 \cup T_5 \cup \cdots \cup T_k$ 分解成的 $k-3$ 条路, 我们就将 $T_1, T_2, \dots, T_k$ 转化成了 k 条路, 于是结论成立. 所以接下来考虑 $E(T_1) \cup E(T_2) \cup E(T_3)$ 的 P_5 - 分解. 首先假设 $x_0 \neq y_2$. 如果 $y_0 \neq x_4$, 则令 $T'_1 = T_1 - z_1 z_2 + z_2 x_1$, $T'_2 = z_1 z_2 x_3 x_2 y_1 y_0$, $T'_3 = x_0 x_1 x_2 y_3 y_2 y_1$.

由 G 中任意 3-圈与 4-圈交均为空集的结构可知 $\{T'_1, T'_2, T'_3\}$ 就是我们想要寻找的 3 条路. 如果 $y_0 = x_4 = z_2$, 可以令 $T'_1 = T_1 - z_1z_2 + z_2x_1$, $T'_2 = z_1z_2y_1x_2x_1x_0$, $T'_3 = x_4x_3x_2y_3y_2y_1$, 则 T'_1, T'_2 和 T'_3 满足要求. 从而考虑 $x_0 = y_2$ 的情形. 如果 $z_0 = x_2 = y_4$, 则 $T'_1 = z_1z_4z_3z_2x_3x_2$, $T'_2 = y_1y_4z_1z_2x_1x_0$ 和 $T'_3 = x_1x_2y_3y_2y_1y_0$ 是符合条件的路分解. 如果 $z_0 \neq x_2$, 注意到我们的前提是 $k \geq 5$, 则 $y_2 \neq z_4$, 于是 $T'_1 = z_0z_1z_2x_3x_2y_1$, $T'_2 = z_1z_4z_3z_2x_1x_0$ 和 $T'_3 = y_0y_1y_2y_3y_4x_1$ 就是我们想要的路分解, 结论成立.

接下来考虑 $k = 3$, 即 C 是一个 3-圈. 仍然致力于将 $E(T_1) \cup E(T_2) \cup E(T_3)$ 分解成 3 条长为 5 的路. 由于 C 的长度为 3, 所以 $y_2 = z_4$. 根据顶点重合的几种可能性分类讨论. 首先假设 $x_0 \neq y_2$. 当 $z_0 \neq x_2$ 时, $T'_1 = z_0z_1z_2x_3x_2x_1$, $T'_2 = x_0x_1x_4z_3z_4y_1$ 和 $T'_3 = y_0y_1y_4y_3y_2z_1$ 是满足条件的路分解. 当 $z_0 = x_2$ 时, 进一步考虑如果 $y_0 \neq x_4$, 令 $T'_1 = z_1z_4z_3z_2x_3x_2$, $T'_2 = x_0x_1x_2y_3y_2y_1$ 和 $T'_3 = y_0y_1y_4z_1z_2x_1$, 则 $\{T'_1, T'_2, T'_3\}$ 满足要求. 从而 $y_0 = x_4 = z_2$. 这种情形下可得满足条件的路分解 $T'_1 = y_1y_2z_3z_2x_3x_2$, $T'_2 = x_0x_1x_4y_1y_4z_1$ 和 $T'_3 = x_1x_2y_3y_2z_1z_2$. 接下来假设 $x_0 = y_2$ 成立, 即 $x_0 = y_2 = z_4$. 如果 $z_0 \neq x_2$, 则满足条件的分解为 $T'_1 = y_1y_2x_1z_2z_1z_0$, $T'_2 = z_4z_3z_2x_3x_2x_1$ 和 $T'_3 = y_0y_1y_4y_3y_2z_1$. 如果 $z_0 = x_2$, 则 $T'_1 = z_1x_2x_3x_4z_3z_4$, $T'_2 = y_0y_1y_4y_3y_2x_1$ 和 $T'_3 = y_1y_2z_1z_2x_1x_2$ 是满足条件的路分解.

情形 3 存在某个 $j \in \{1, \dots, k\}$ 使得 T_j 的连接点是 T_{j+1} 的中心且 T_{j+1} 的连接点是 T_{j+2} 的 (1,2)-点.

不失一般性, 可假设 $j = 1$. 首先对 T_2 和 T_3 进行 α -操作, 由于 G 中任意 3-圈与 4-圈的交都为空, 从而 α -操作后得到的 T'_2 和 T'_3 是长度为 5 的路. 接下来对 T_4 和 T_5 进行 α -操作, 同样由 G 的结构特点, 操作后得到一条长为 5 的路 T'_4 , 而此时 T'_5 有可能仍然是一条待调整的迹或一条路, 这取决于 T_4 的连接点是否为 T_5 的中心点. 如果 T'_5 是一条待调整的迹, 则 T'_5 的连接点仍是 T_6 的 (1,2)-点, 从而可以对 T'_5 和 T_6 进行 α -操作. 如果 T'_5 是一条路, 则对 T_6 和 T_7 进行 α -操作. 按上面的方式继续对剩余的迹进行 α -操作. 到最后要么所有的 T_i ($1 \leq i \leq k$) 都被转换成长度为 5 的路, 要么剩下 T_1 (没有经过 α -操作) 或者 T'_1 (经过 T_k 或 T'_k 和 T_1 的 α -操作后得到) 为待调整的迹, 其他的迹均转换为长度为 5 的路. 前一种情形正是我们期望的结果, 在后一种情形下设 $T_1 = x_0x_1x_2x_3x_4x_1$ 或 $T'_1 = zx_1x_2x_3x_4x_1$, 其中 z 是 T_k 的中心点且 x_2 是 T_1 (或 T'_1) 的连接点. 我们将利用 T'_2 进一步将 T_1

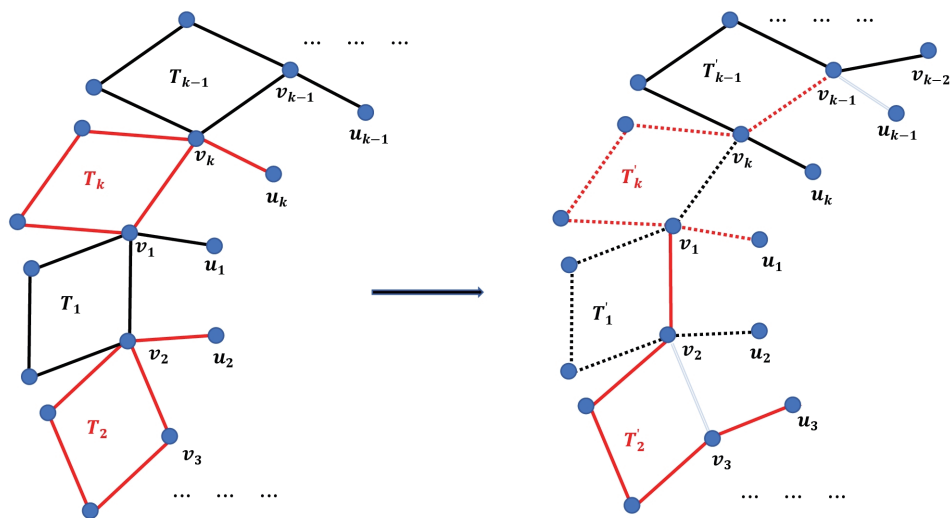


图 2 (网络版彩图) 变换后的 T'_i 分别用红色的实线、虚线及黑色的实线、虚线表示

或 T'_1 转换成路. 设 $T'_2 = y_0y_1y_4y_3y_2w$, 其中 $y_1 = x_2$, w 是 T_3 的中心点. 令 $T''_2 = T'_2 - y_0y_1 + x_1x_2$. 由于 x_1 是 T_1 或 T'_1 的中心点, 所以 $x_1 \notin V(T'_2)$, 从而 T''_2 是一条路. 若经过之前一系列 α -操作后余 T_1 , 则令 $T''_1 = T_1 - x_1x_2 + y_0y_1$; 若经 α -操作后余 T'_1 , 则令 $T''_1 = T'_1 - x_1x_2 + y_0y_1$. 通过分析知 T''_1 也是长为 5 的路且 $\{T''_1, T''_2\}$ 构成 $E(T_1) \cup E(T'_2)$ (或 $E(T'_1) \cup E(T'_2)$) 的分解. 于是分解 $\{T''_1, T''_2\} \cup \{T'_i : 3 \leq i \leq k\}$ 就是满足条件的路分解, 从而断言 2.1 得证. $\square$

根据断言 2.1, 定理 2.2 证毕. $\square$

参考文献

- 1 Berge C. Théorie des Graphes et Ses Applications. Paris: Dunod Université, 1967
- 2 Botler F, Hoffmann L. Decomposition of $(2k+1)$ -regular graphs containing special spanning $2k$ -regular Cayley graphs into paths of length $2k+1$. Discrete Math, 2022, 345: 112906
- 3 Botler F, Mota G O, Oshiro M T I, et al. Decomposing regular graphs with prescribed girth into paths of given length. European J Combin, 2017, 66: 28–36
- 4 Botler F, Mota G O, Wakabayashi Y. Decompositions of triangle-free 5-regular graphs into paths of length five. Discrete Math, 2015, 338: 1845–1855
- 5 Bouchet A, Fouquet J L. Trois types de décompositions d'un graphe en chaînes. Ann Discrete Math, 1983, 17: 131–141
- 6 Favaron O, Genest F, Kouider M. Regular path decompositions of odd regular graphs. J Graph Theory, 2010, 63: 114–128
- 7 Kotzig A. Aus der Theorie der endlichen regulären Graphen dritten und vierten Grades. Časopis Pěst Mat, 1957, 82: 76–92
- 8 Lovász L. On covering of graphs. In: Theory of Graphs. Akad Kiadó: Budapest, 1968, 231–236
- 9 Petersen J. Die Theorie der regulären graphs. Acta Math, 1891, 15: 193–220

Path decompositions of 5-regular graphs

Yanan Chu, Genghua Fan, Mingzhu Hong & Chuixiang Zhou

Abstract Let l be an odd integer. It was conjectured that every l -regular graph containing a perfect matching can be decomposed into paths of length l . For the case $l = 5$, Favaron et al. (2010) verified the conjecture for graphs with no cycle of length 4, and Botler et al. (2015) verified it for triangle-free graphs. In this paper, we prove that every 5-regular graph with a perfect matching can be decomposed into paths of length 5, provided that 3-cycles and 4-cycles in the graph have no edge in common.

Keywords decomposition, path, regular graph

MSC(2020) 05C07, 05C38

doi: 10.1360/SSM-2023-0316