中国科学: 数学　2024 年　第 54 卷　第 3 期: 259～284

SCIENTIA SINICA　Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

综　述

伪抛物方程的一些研究进展

献给姜礼尚教授 90 华诞

曹杨[1], 尹景学[2*]

1. 大连理工大学数学科学学院, 大连 116024;
2. 华南师范大学数学科学学院, 广州 510631

E-mail: mathcy@dlut.edu.cn, yjx@scnu.edu.cn

收稿日期: 2023-03-22; 接受日期: 2023-11-25; 网络出版日期: 2024-01-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11871134 和 12171166) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: DUT23LAB303) 资助项目

摘要　本文是关于伪抛物方程的综述, 内容包括伪抛物方程的物理背景以及从黏性角度对伪抛物方程的研究, 重点介绍半线性伪抛物方程解的渐近行为方面的研究成果, 这是目前研究较为深入的领域.

关键词　伪抛物方程　伪抛物黏性　渐近行为

MSC (2020) 主题分类　35K70, 35B40, 35A01

1　引言

1954 年, 著名数学家 Sobolev [135] 首次研究了一类描述旋转液体微振动的非经典方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)+\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0.$$

不难发现, 上述方程中的最高阶导数项为关于时间 t 和空间 x 的混合导数. 人们将具有这种特征的方程称为 Sobolev 方程或者 Sobolev-Gal'pern 方程. 俄罗斯学者 Al'shin 等 [3] 给出了各种不同类型的 Sobolev 方程, 以混合导数具有关于时间 t 的奇数阶导数或者偶数阶导数作为区分, 列举了已有研究工作中涉及的 Sobolev 方程.

Sobolev 的工作激发了数学工作者对这类方程的研究兴趣. 20 世纪 50 年代至 60 年代, 文献 [53, 54, 85] 利用 Fourier 变换研究了如下 Sobolev 方程组 Cauchy 问题解的存在性和正则性:

$$M\left(t,\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+L\left(t,\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{u}=f(x),$$

英文引用格式: Cao Y, Yin J X. An overview of recent studies on the pseudo-parabolic equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 259–284, doi: 10.1360/SSM-2023-0057

其中 M 和 L 为关于空间变量的线性微分算子的方阵, 其系数为常数或仅依赖于 t. 到 20 世纪 70 年代, 对这类方程, 特别是线性伪抛物方程的理论研究蓬勃发展起来. 具有标志性的工作为 1970 年 Showalter 和 Ting[130] 首次提出将方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\tau\frac{\partial \Delta u}{\partial t}=\Delta u \tag{1.1}$$

命名为伪抛物方程, 其原因在于他们发现抛物方程适定的问题对这种伪抛物方程也是适定的, 并且 (1.1) 的解连续依赖于 τ, 即抛物方程的解可以由满足相同初边值条件的伪抛物方程的解来逼近. 此后, 伪抛物方程以一种大家普遍接受的定义方式而提出, 这就是方程中的混合导数项具有关于时间 t 的一阶导数.

从 20 世纪 60 年代至 80 年代, Showalter[121–125, 127–129]、Ting[149]、Showalter 和 Ting[131]、Gopala Rao 和 Ting[57]、Coleman 等[26]、Colton[28–30]、Colton 和 Wimp[31]、Rundell 等[32, 115–120, 138]、DiBenedetto 和 Pierre[42]、Böhm 和 Showalter[11]、Brill[13] 等完成了多篇关于线性及非线性伪抛物方程的经典工作, 研究了初边值问题或 Cauchy 问题解的存在性、唯一性、正则性以及极值原理和基本解等基本理论. 此后, 伪抛物方程的研究得到了长足的发展, 人们对具有非线性性和退化性的伪抛物方程[21, 37, 39, 68, 70–72, 75]、非局部伪抛物方程[38, 41, 50, 95, 154]、分数阶伪抛物方程[67, 105, 106, 150, 158]、随机伪抛物方程[93, 94, 143, 144, 165] 以及控制[20, 60, 139, 140, 157] 和多孔介质渗流[15, 76, 167] 等领域出现的伪抛物方程模型得到了很多重要的分析及数值计算结果 (参见文献 [2, 74, 155, 156, 160, 168]).

本文综述近年来伪抛物方程的研究进展. 第 2 节介绍伪抛物方程的实际背景并详细推导具跳扩散的期权定价问题和多孔介质中具动态毛管压力的水油动力学中的伪抛物方程模型. 不论从物理背景的角度亦或是数学理论的角度看, 高阶混合导数项都可以被认为是一种新的黏性项, 称其为伪抛物黏性并在第 3 节总结这类黏性的特点. 第 4 节作为主要内容, 介绍最近十余年来对半线性伪抛物方程解的渐近行为的研究成果.

2 应用背景

伪抛物方程具有非常丰富的物理背景. 例如, 当利用二阶近似研究均匀各向同性的不可压缩流体时, 若应力张量含有二阶 Rivlin-Ericksen 张量, 则可得到伪抛物方程 (1.1) 的混合边值问题 (参见文献 [27, 148]). 考虑均匀流体在裂隙岩石的渗流也可得到伪抛物方程 (1.1), 此时 Δu_t 的系数 τ 代表了裂隙岩石的特征, 它的减小对应于多孔块体尺寸的减小和裂缝程度的增加 (参见文献 [6]). 在 Chen 和 Gurtin[25] 建立的具有热力学温度 $u-\tau\Delta u$ 和传导温度 u 的双温热传导理论中, 对于各向同性材料, 能量方程的线性化形式就是伪抛物方程. 当考虑聚合物固体中的溶剂吸收时, 人们发现聚合物内部的溶剂颗粒先形成一个几乎尖锐的前沿以近似恒定的速度前进, 一段时间后才能观察到 Fickian 扩散, 这种异常扩散称为 II 型扩散. Thomas 和 Windle[146, 147] 认为这是由溶剂颗粒的扩散和溶剂进入引起的聚合物膨胀之间的相互作用导致的. 由此, 他们将聚合物固体看成黏弹性体, 将聚合物的膨胀看成是一个松弛过程, 并在溶剂流量满足的 Darcy 定律中引入溶剂颗粒对聚合物施加的应力, 由此得到的扩散模型便是伪抛物方程, 其 3 阶项的系数为黏弹性体的黏性特征. 特别地, 具有如下源项的伪抛物方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\tau\frac{\partial \Delta u}{\partial t}=\Delta u+u^p+f(x)$$

还可以应用到具有源项的半导体非平稳过程的分析中 (参见文献 [83, 84]), 其中, $\tau\frac{\partial\Delta u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}$ 代表自由电子密度率, Δu 代表自由电子流的线性耗散, u^p 代表自由电子流的源. 从物理的角度来看, 其解的爆

破对应着半导体中的电击穿现象, 这种现象在实验中也会发生. 本节以近年来对具跳扩散的期权定价问题和多孔介质中具动态毛管压力的水油动力学的研究为例, 详细推导伪抛物方程模型.

在金融数学中, 基于 Poisson 跳 - 扩散过程研究期权定价是人们常用的办法. 然而这个过程中得到的偏微分积分方程 (partial integro-differential equation, PIDE) 通常没有解析解, 其数值求解也面临一些问题. 2012 年, Itkin 和 Carr [65] 将 PIDE 转化为伪抛物方程, 他们的想法是将 Lévy 测度表示为某个未知微分算子 A 的 Green 函数, 如果能找到算子 A 的显式形式, 则原始 PIDE 将简化为伪抛物方程. 假设股票价格为纯跳跃过程, 进一步地假设跳跃过程是复合 Poisson 过程. 令 $u(x,t)$ 为基于股票价格 x 和时间 t 的未定权益值, 则对于欧式看涨期权, u 满足如下终值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\lambda\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left[u(x+j,t)-u(x,t)-\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)j\right]q(j)dj=0, & x\in\mathbb{R}, \quad t\in[0,T], \\ u(x,T)=(x-K)^+, & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中, $\lambda>0$, $K\in\mathbb{R}$ 为成交价, $q(j)$ 为跳跃的概率密度, 满足

$$q(j)=\frac{\alpha \mathrm{e}^{-\alpha|j|}}{2}, \quad j\in\mathbb{R}, \quad \alpha>0.$$

令 $s=T-t$, 并记 $u(x,T-s)=w(x,s)$, 则终值问题 (2.1) 可转化为

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial w}{\partial s}(x,s)+\lambda\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left[w(x+j,s)-w(x,s)-\dfrac{\partial w}{\partial x}(x,s)j\right]q(j)dj=0, & x\in\mathbb{R}, \quad s\in[0,T], \\ w(x,0)=(x-k)^+, & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.2}$$

由概率密度函数 $q(j)$ 的对称性和归一性, 方程 (2.2) 可简化为

$$-\frac{\partial w}{\partial s}(x,s)-\lambda w(x,s)+\lambda\int_{\mathbb{R}}w(x+j,s)q(j)dj=0.$$

令 $z=-j$, 方程转变为

$$-\frac{\partial w}{\partial s}(x,s)-\lambda w(x,s)+\lambda\int_{\mathbb{R}}w(x-z,s)q(z)dz=0.$$

再令 $y=x-z$, 方程转变为

$$-\frac{\partial w}{\partial s}(x,s)-\lambda w(x,s)+\lambda\int_{\mathbb{R}}w(y,s)q(x-y)dy=0. \tag{2.3}$$

考虑如下二阶线性非齐次常微分方程的边值问题:

$$g''(x)-\alpha^2g(x)=-\delta(x), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{2.4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=0, \tag{2.5}$$

其中 $\delta(x)$ 为 δ 函数. (2.4) 和 (2.5) 的解称为 Green 函数,

$$g(x)=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha|x|}}{2\alpha}.$$

于是 $q(x)=\alpha^2g(x)$ 且方程 (2.3) 转化为

$$-\frac{\partial w}{\partial s}(x,s)-\lambda w(x,s)+\lambda\alpha^2\int_{\mathbb{R}}w(y,s)g(x-y)dy=0. \tag{2.6}$$

令线性微分算子 $A_x = D_x^2 - \alpha^2 I$, 则常微分方程 (2.4) 可写成 $A_x g(x) = -\delta(x)$. 将 A_x 作用在方程 (2.6) 两边, 并假设积分与求导可交换次序, 则有

$$-A_x \frac{\partial w}{\partial s}(x,s) - \lambda A_x w(x,s) + \lambda\alpha^2 \int_{\mathbb{R}} w(y,s) A_x g(x-y) dy = 0.$$

再利用 (2.4), 可得

$$-A_x \frac{\partial w}{\partial s}(x,s) - \lambda A_x w(x,s) - \lambda\alpha^2 \int_{\mathbb{R}} w(y,s) \delta(x-y) dy = 0.$$

将 $A_x = D_x^2 - \alpha^2 I$ 代入上式, 可以得到伪抛物方程的初值问题

$$\begin{cases} \alpha^2 \dfrac{\partial w}{\partial s}(x,s) - \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial s}(x,s) - \lambda \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,s) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad s \in [0,T], \\ w(x,0) = (x-k)^+, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

对于其他类型的跳分布, 也可以采用上述办法将 PIDE 转化为伪抛物方程. 例如, 对于 Erlang 分布[48], 可选取高阶微分算子代替二阶微分算子, 相应得到更高阶的伪抛物方程. 更多关于金融数学中伪抛物方程的研究可参见文献 [64, 第五和六章].

在单相和多相多孔介质流体模型中, 人们通常在平衡状态下构建本构方程. 例如, 令 S_w 和 S_n 分别表示湿相及非湿相饱和度, p_w 和 p_n 分别表示湿相及非湿相压力, 假设孔隙中相静态分布, 则毛管压力 (相压差) 通常被视为湿相饱和度的单调递减函数:

$$p_n - p_w = p_c(S_w), \tag{2.7}$$

其中函数 $p_c(\cdot)$ 可以通过实验给出 (参见文献 [63,73]). (2.7) 称为静态毛管压力模型. 然而, 多个实验测得的渗透和排水关系并不满足静态假设. 例如, DiCarlo[43] 的实验表明, 在均质介质中, 渗透过程中饱和剖面可能会变得非单调; Rezanezhad 等[114] 的实验结果呈现了二维情形下的指进现象 (fingers behavior). 这些现象与平衡态下的经典模型相悖, 因此人们考虑在数学模型中引入动态机制. 1993 年, Hassanizadeh 和 Gray[61] 提出了依赖于湿相饱和度及湿相饱和度时间导数的毛管压力, 即动态毛管压力模型

$$p_n - p_w = p_c(S_w) - \tau \partial_t S_w, \tag{2.8}$$

其中 $\tau > 0$ 为动态效应系数并可以是 S_w 的函数[12]. 2001 年, Beliaev 和 Hassanizadeh[7] 提出了带有滞后效应的动态毛管压力模型 $p_n - p_w = p_c(S_w) - \gamma \mathrm{sign} \partial_t S_w - \tau \partial_t S_w$. 以两相多孔介质流体为例, 当考虑动态毛管压力时, 流体可由伪抛物方程耦合椭圆型压力 - 速度方程描述. 为完整起见, 以下按照文献 [1,14] 给出推导过程.

假设湿相和非湿相占据整个孔隙空间, 即

$$S_w + S_n = 1. \tag{2.9}$$

对于湿相和非湿相, 质量守恒方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi S_w + \nabla \cdot \boldsymbol{v}_w = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi S_n + \nabla \cdot \boldsymbol{v}_n = 0, \tag{2.11}$$

其中, ϕ 为孔隙度, $\boldsymbol{v}_w$ 和 $\boldsymbol{v}_n$ 为渗流速度. 由 Darcy 定律可得

$$\boldsymbol{v}_w = -\frac{\bar{k}}{\mu_w} k_{rw} \nabla \Psi_w, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{v}_n = -\frac{\bar{k}}{\mu_n} k_{rn} \nabla \Psi_n, \tag{2.13}$$

其中, $\bar{k}$ 为多孔介质的绝对渗透率, μ_w 和 μ_n 为黏性, k_{rw} 和 k_{rn} 分别为湿相和非湿相的相对渗透率, 一般是湿相饱和度 S_w 的函数. Ψ_w 和 Ψ_n 为相位,

$$\Psi_w = p_w + \rho_w g z, \quad \Psi_n = p_n + \rho_n g z, \tag{2.14}$$

其中, ρ_w 和 ρ_n 分别为湿相和非湿相的质量密度, g 为重力加速度, z 为垂直坐标且方向向上. 由 (2.8)–(2.14) 可以得到如下的方程组:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\phi S_w - \nabla \cdot \left(\frac{\bar{k}}{\mu_w} k_{rw}(\nabla p_w + \rho_w g z)\right) = 0, \\
&-\frac{\partial}{\partial t}\phi S_w - \nabla \cdot \left(\frac{\bar{k}}{\mu_n} k_{rn}(\nabla p_n + \rho_n g z)\right) = 0, \\
&p_n - p_w = p_c(S_w) - \tau \partial_t S_w.
\end{aligned}$$

假设 $\bar{k}$ 为常数, 可将上述系统无量纲化. 令

$$t := \frac{t}{T}, \quad x := \frac{x}{L}, \quad p_n := \frac{p_n}{P_r}, \quad p_w := \frac{p_w}{P_r}, \quad p_c := \frac{p_c}{P_r}, \quad k_w := \frac{\bar{k} P_r T}{L^2 \phi} \frac{k_{rw}}{\mu_w}, \quad k_n := \frac{\bar{k} P_r T}{L^2 \phi} \frac{k_{rn}}{\mu_n}$$

以及

$$\overrightarrow{g_1} := \frac{\rho_w g z L}{P_r}, \quad \overrightarrow{g_2} := \frac{\rho_n g z L}{P_r}, \quad \tau := \frac{\tau}{T P_r},$$

可得到

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} - \nabla \cdot (k_w(\nabla p_w + \overrightarrow{g_1})) = 0, \quad -\frac{\partial S_w}{\partial t} - \nabla \cdot (k_n(\nabla p_n + \overrightarrow{g_2})) = 0, \quad p_n - p_w = p_c(S_w) - \tau \partial_t S_w.$$

由上述方程组可得到伪抛物方程

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\boldsymbol{V} \frac{k_w}{k_w + k_n}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{k_w k_n}{k_w + k_n}\left(\nabla p_c(S_w) - \tau \nabla \frac{\partial S_w}{\partial t} + \overrightarrow{g_2} - \overrightarrow{g_1}\right)\right) = 0 \tag{2.15}$$

和压力 - 速度方程

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0, \quad \boldsymbol{V} = k_w \nabla p_w + k_n \nabla p_n + k_w \overrightarrow{g_1} + k_n \overrightarrow{g_2}.$$

注意, 当 S_w 为 0 或 1 时, k_w、k_n 或 p_c 可能为 0 或者 ∞, 则伪抛物方程 (2.15) 出现退化性或者奇异性.

3　伪抛物黏性

从数学角度, 人们常将 3 阶混合导数看成黏性项或者松弛项, 不妨称其为伪抛物黏性. 这种黏性具有鲜明的自身特点.

首先, 伪抛物方程是抛物方程的一种正则化逼近. Ting [149]、Showalter 和 Ting [130] 指出了伪抛物方程 $\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon M\frac{\partial u}{\partial t}=Lu$ 的解在 L^2 的意义下逼近于抛物方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=Lu$ 的解, 其中 M 和 L 为自伴随椭圆算子. 虽然正则化的方式有很多种, 如 Cahn-Hilliard 扰动 $\varepsilon\Delta^2 u$ 和双曲扰动 εu_{tt} 等, 但是伪抛物黏性的一个显著优点是能够保留原问题的定解条件, 即抛物方程适定的问题对于相应的伪抛物方程也是适定的, 这也是 Showalter 和 Ting 称其为 "伪抛物" 的主要原因. 此外在解的正则性方面, Showalter 和 Ting [130]、Gopala Rao 和 Ting [57] 及 Karch [75] 等都曾指出热方程的伪抛物黏性解 u 及其导数 u_t 关于空间变量 x 的光滑性与初值 u_0 的光滑性一致, 即伪抛物黏性保留初值的空间正则性, 降低热核的光滑作用.

进一步对非适定问题, 如倒向热传导和正倒向扩散问题, 伪抛物黏性是有效的正则化方式. 实际上, 它属于 Lattès 和 Lions [87] 提出的拟逆方法, 其本质思想是对算子进行微小扰动从而得到适定的逼近问题. 1972 年, Gajewski 和 Zacharias [52] 首先提出对不适定问题的时间导数项进行扰动. Showalter [126] 和 Ewing [49] 又将其推广到一般情形, 即伪抛物正则化. 以热方程 $u_t=\Delta u$ 满足终值 $u(x,T)=\chi(x)$ 为例, 这一问题是非适定的. 文献 [49, 52, 126] 指出, 如果以倒向问题 $v_t-\varepsilon\Delta v_t=\Delta v$ 满足 $v(x,T)=\chi(x)$ 的解

$$v_\varepsilon(x,0)=\exp(-\Delta(I-\Delta)^{-1}T)v(x,T)$$

作为热方程的初值, 则有 $\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(x,T)=\chi(x)$.

进入 20 世纪 90 年代, 人们开始引入伪抛物黏性处理正倒向扩散方程. 1991 年, Novick-Cohen 和 Pego [107] 受黏性二元混合物的等温相分离问题的启发, 对具有三次型 (cubic-like) 响应函数的正倒向扩散方程考虑其线性伪抛物正则化问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial \Delta u}{\partial t}=\Delta\varphi(u). \tag{3.1}$$

由于响应函数 $\varphi(\cdot)$ 非单调, 方程 (3.1) 具有不连续稳态解, 其相位以任意斑图排列. 文献 [107] 的一个显著结果是满足 $\varphi(u)=0$ 和 $\varphi'(u)>0$ 的任意有界可测稳态解在小扰动下动态稳定. 特别地, 长时间后 (3.1) 光滑解可能几乎处处接近不连续稳态. Plotnikov [111, 112]、Evans 和 Portilheiro [47]、Lafitte 和 Mascia [86]、Smarrazzo 和 Terracina [132] 分析了方程 (3.1) 黏性消失时的奇异极限, 并发现伪抛物正则化具有 Cahn-Hilliard 正则化不具备的一个优点, 即 (3.1) 的解及其黏性消失得到的 Young 测度解成立着熵不等式. 特别地, 以此熵不等式作为容许条件, 文献 [56, 99, 141] 建立了描述稳定相之间过渡状态的两相熵解的研究框架, 进一步还得到了具有滞后和不稳定相的两相熵解. 对于具其他类型响应函数的正倒向扩散方程的线性伪抛物正则化问题 (参见文献 [109, 110, 145]), 还有一类重要的正倒向扩散方程一直受到人们的关注, 即图像处理中的 Perona-Malik 模型. 需要注意的是线性伪抛物正则化并不适用于处理 Perona-Malik 型响应函数. 这是因为对于三次型响应函数, 任何有界且足够大的区间是正则化问题解 u 的不变区域, 因此伪抛物黏性项在无穷远处的行为并不起关键作用, 但对于 Perona-Malik 型的响应函数而言, 其不变域是一个有限区间, 必须考虑伪抛物黏性项在无穷远处的行为. 1993 年, Barenblatt 等 [4] 在考虑稳定分层剪切湍流热或质量传导 (交换) 过程中, 最早研究了具退化伪抛物黏性的 Perona-Malik 型正倒向扩散方程 $u_t-\varepsilon\psi(u_x)_{xt}=\varphi(u_x)_x$. 他们指出退化伪抛物黏性可以保留下初始的非连续性, 甚至对某些光滑初值, 解在有限时刻仍然能够呈现与物理背景一致的非连续特征, 且如果解在某点非连续, 则解在此点保持非连续, 并在此点的跳跃值随时间非减, 长时间后解收敛为分片常值函数. 正因为退化伪抛物黏性保留了原正倒向扩散方程解的间断性质, Smarrazzo 和 Tesei [133, 134] 进一步考虑了方程 $u_t-\varepsilon\Delta(\psi(u))_t=\Delta\varphi(u)$ 的 Radon 测度解的存在唯一性及黏性消

失问题, 同时发现测度解的正则部分满足黏性熵不等式, 而奇异部分的支集随时间非减. 更多关于退化伪抛物黏性正倒向扩散方程, 特别是对有界 $\varphi(\cdot)$、多项式型 $\varphi(\cdot)$ 和 Log 型 $\varphi(\cdot)$ 的研究, 可参见系列工作 [8–10, 142].

除了从正则化非适定问题的角度研究退化伪抛物黏性, 很多实际问题中得到的伪抛物方程也具有退化性, 如在第 2 节提到的多孔介质中具动态毛管压力效应的两相渗流模型. 绝大多数关于退化伪抛物方程的研究成果是围绕行波解建立的. 1997 年, Barenblatt 等 [5] 指出, 与二阶渗流方程相比, 退化伪抛物方程能够在大多孔块 (block) 处保持渗流方程最重要的有限传播性质, 但在小多孔块处无限传播. 1998 年, King 和 Hulshof [81] 详细研究了方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+u^\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right) \tag{3.2}$$

的行波解, 描述了参数 α 和 β 在不同范围内近波前区域解的局部行为, 特别地, 当 $2\leqslant\beta<2\alpha$ 时出现与渗流方程类似的界面固定现象. Cuesta 等 [35] 发现方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left((\beta-\alpha-1)u^\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\tau u^\beta\frac{\partial}{\partial x}\left(u^\gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right)+u^\beta\right)$$

中伪抛物项对行波解的单调性和界面的存在性也有着重要影响, 当 τ 足够小时, 具有单调行波解, 当 τ 大时, 会出现振荡但非周期行波解; $2\alpha-\beta-\gamma=0$ 是界面存在与否的临界条件, 次临界时界面存在, 超临界时界面不存在, 临界情形下只有 τ 足够小时界面才存在. 特别地, 他们指出, 对于上述方程的特例

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\tau\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

即线性伪抛物 Burgers 方程, τ 具有增加行波振荡次数的作用, 并找到了临界值 $\tau=\frac{1}{4}$, 当 $\tau\leqslant\frac{1}{4}$ 时, 行波解单调且非线性稳定, 当 $\tau>\frac{1}{4}$ 时, 行波解非单调但线性稳定 (参见文献 [33, 34]). 除了水气两相渗流, 人们还很关心具动态毛管效应的水油两相渗流, 如伪抛物 Buckley-Leverett 方程, 理论分析集中于探索行波解及极限情形下的非标准激波. Cuesta 等 [36]、Mitra 等 [104]、van Duijn 等 [151, 152]、Spayd 和 Shearer [137]、Spayd [136] 分别针对线性伪抛物项和退化伪抛物项的不同情形, 得到伪抛物 Buckley-Leverett 方程振荡行波解和不满足 Oleinik 条件的新型容许激波. 特别地, 文献 [104, 152] 对行波解的单调性和尖锐 (sharp) 波的存在性发现了 τ 的分支现象, 这与实验中发现的饱和度过冲现象相吻合. 关于分界面, King 和 Cuesta [80] 通过初值在边界处的增长指数以及 α 和 β 划分了方程 (3.2) 比二阶渗流方程更加复杂的等候或非等候时间区域, 分界面局部行为也更加丰富, 甚至可能同时出现前进界面和后退界面.

在解的存在唯一性方面, Düll [46] 证明了方程 (3.2) 在 $\alpha=\beta$ 时光滑解的局部存在性, 同时也发现了与渗流方程类似, 退化伪抛物方程也具有支集有限传播的性质. 重要进展由 Mikelić 和 Bruining [102] 完成, 他们使用统计流体力学的方法, 为正则化问题构造相应的 Kullback 熵泛函, 得到了方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}+D(u)u\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-mu}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)$$

弱解的整体存在性. Mikelić [101] 及 Cao 和 Pop [16] 对高维退化伪抛物方程和方程组得到了类似的结果. 在这些工作中, 虽然动态毛管效应系数可以与 u 有关, 但均要求 (2.8) 中的 τ 有正下界. 这个要求直到 2018 年 Milišić [103] 构造了新的 Kullback 熵泛函才得以去掉, 在允许 $\tau(u)$ 有零点的条件下, 可以证明解的整体存在性.

4 半线性伪抛物方程

正如前面所述, 以最典型的伪抛物黏性热方程为例, 伪抛物项 Δu_t 的引入并未改变求解方程的定解条件, 而且使得初值的光滑性得以保持. 若考虑解的其他性质, 如长时间渐近行为, 则伪抛物项的存在是否会对其产生影响呢? 解的渐近行为一直是非线性抛物方程理论研究中深入且富有活力的领域. 对于伪抛物方程, 已有大部分工作围绕解的整体存在与否这一问题开展研究. 2011 年, 专著 [3] 详尽总结了 20 世纪至 21 世纪初期关于 Sobolev 方程解的整体存在和有限时刻爆破的研究结果. 该专著中的 Sobolev 方程以如下的抽象形式展示:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbb{A}_0 u+\sum_{j=1}^{N}\mathbb{A}_j u\right)+a\mathbb{L}u+b\mathbb{D}\mathbb{P}u=\mathbb{F}u,$$

其中抽象形式的算子可取成

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}_0 u:\Delta u,\Delta u-u,\pm\Delta^2 u\mp\Delta u,\\
&\mathbb{A}_j u:\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_j-2}\nabla u),\\
&\mathbb{L}u:\Delta u,\\
&\mathbb{D}u:\frac{\partial u}{\partial x_i},\nabla u,\\
&\mathbb{P}u:|u|^{q-1},\\
&\mathbb{F}u:|u|^q u,\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u.
\end{aligned}$$

该专著细致介绍了利用 Galerkin 方法证明解的存在性, 以及通过构造不同形式的能量泛函 Φ 得到微分不等式

$$\Phi\Phi''-(1+\alpha)(\Phi')^2+C_1\Phi\Phi'+C_2\Phi^2\geqslant 0,$$

从而证明解在有限时刻爆破.

为与文献 [3] 互为补充, 本节以如下最典型的半线性伪抛物方程为例, 讲述近十五年来对解的渐近行为的研究进展:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\tau\frac{\partial\Delta u}{\partial t}=\Delta u+f(u),$$

其中 $f(u)$ 为多项式源 u^p 或 Log 型源 $u\log|u|$, 所考虑的问题为 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 问题或初边值问题. 当然, 对含源项问题的研究是典型扩散方程理论研究的重要组成部分, 源的存在对解的长时间渐近行为有着很大的影响, 可能会使得解在有限时刻发生爆破或熄灭等.

4.1 半线性伪抛物方程的 Cauchy 问题

首先考虑 $\mathbb{R}^n$ 上具多项式源 u^p 的伪抛物方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\tau\dfrac{\partial\Delta u}{\partial t}=\Delta u+u^p, & x\in\mathbb{R}^n,\quad t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n,\end{cases}\tag{4.1}$$

其中初值 $u_0(x)$ 非负非平凡. 当 $\tau=0$ 时, 问题 (4.1) 正是读者们熟知的半线性热方程, 其研究结果非常丰富和深刻. 特别地, 人们发现 p 的取值在刻画解的渐近行为上起到了举足轻重的作用, 解的长时

间行为完全可由 p 的取值范围来精确给出. 这方面的开创性工作首推 Fujita [51] 于 1966 年的研究, 他在 $\mathbb{R}^n$ 上讨论了具有非线性源 u^p 的热方程 Cauchy 问题, 并证明了 (1) 如果 $1 < p < 1 + \frac{2}{n}$, 则不存在非负非平凡的整体解; (2) 如果 $p > 1 + \frac{2}{n}$, 则当初值充分小时存在非负整体解. 随后, Hayakawa [62] 和 Kobayashi 等 [82] 分别考虑了 $n = 1, 2$ 和 $n \geqslant 1$ 时的临界情形 $p = 1 + \frac{2}{n}$, 证明了对于任意初值, 解在有限时刻爆破. 人们称以上的结果为 Fujita 型结果, 将 $p_c = 1 + \frac{2}{n}$ 称为 Fujita 指标. 根据上述工作发展起来的后续研究逐渐形成了抛物方程理论研究中非常重要的临界指标理论. 一个很自然的问题是, 对于伪抛物方程 (4.1), 是否也能建立相应的指标理论? 其指标是否会受到伪抛物项 Δu_t 的影响? Kaikina 等 [69] 和 Cao 等 [19] 指出, 对伪抛物方程 Cauchy 问题 (4.1), 其 Fujita 指标与热方程一致.

定理 4.1 Cauchy 问题 (4.1) 的 Fujita 指标 $p_c = 1 + \frac{2}{n}$, 即当 $1 < p \leqslant p_c$ 时, 对于任意初值 $u_0(x)$, 解在有限时刻爆破; 当 $p > p_c$ 时, 对足够大的初值, 解在有限时刻爆破, 对足够小的初值, 解整体存在.

注 4.1 从上述结果不难发现, 伪抛物项 Δu_t 的出现并未对临界指标的大小产生影响, 这说明这种黏性的作用不足以改变临界指标. 但是在证明过程中, 3 阶项 Δu_t 会带来不小的困难, 如它会导致伪抛物方程没有自相似结构, 因此无法通过构造自相似上下解这一重要方法来研究伪抛物方程的临界指标问题. 文献 [19, 69] 利用伪抛物方程解的积分表示, 即温和解, 来完成解的整体存在性的证明. 进一步地, 文献 [19] 从能量 (积分) 爆破法来得到解的有限时刻爆破的证明.

为了得到伪抛物方程温和解, 对 (4.1) 作 Fourier 变换, 则有

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -\dfrac{|\xi|^2}{1+\tau|\xi|^2}\hat{u} + \dfrac{1}{1+\tau|\xi|^2}\hat{u^p}, & (\xi, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

求解上述问题可以得到

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{1+\tau|\xi|^2}t}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{1+\tau|\xi|^2}(t-s)}\frac{1}{1+\tau|\xi|^2}\hat{u^p}ds.$$

再作 Fourier 逆变换可以得到温和解:

$$u(x, t) = \mathscr{G}(t)u_0(x) + \int_0^t \mathscr{H}(t-s)u^p(x, \tau)ds, \tag{4.2}$$

其中算子 $\mathscr{G}(t)$ 和 $\mathscr{H}(t)$ 分别为

$$\mathscr{G}(t)\varphi = (\mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{1+\tau|\xi|^2}t}\hat{\varphi}(\xi))^\vee, \quad \mathscr{H}(t)\varphi = \left(\mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{1+\tau|\xi|^2}t}\frac{1}{1+\tau|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi)\right)^\vee.$$

利用 Taylor 展开, 可以发现

$$\mathscr{G}(t)\varphi = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\sum_{m=0}^\infty \frac{\tau^{-m}t^m}{m!}\mathscr{B}_m\varphi, \quad \mathscr{H}(t)\varphi = \mathscr{G}(t)\mathscr{B}\varphi = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\sum_{m=0}^\infty \frac{\tau^{-m}t^m}{m!}\mathscr{B}_{m+1}\varphi,$$

其中, $\mathscr{B}_m$ 为 Bessel 位势

$$\mathscr{B}_m\varphi = \left(\frac{1}{(1+\tau|\xi|^2)^m}\hat{\varphi}(\xi)\right)^\vee = \frac{1}{\tau^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^n} B_m\left(\frac{x-y}{\sqrt{\tau}}\right)\varphi(y)dy,$$

B_m 为 Bessel-Macdonald 核函数

$$B_m(x) = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}(m-1)!}\int_0^\infty \xi^{m-N/2-1}\mathrm{e}^{-\xi-|x|^2/4\xi}d\xi,$$

并具有如下性质:

(1) $B_m(x) \geqslant 0$ 且 $B_m(-x) = B_m(x)$;

(2) $\int_{\mathbb{R}^N} B_m(x)dx = 1$;

(3) $B_{m_1} * B_{m_2} = B_{m_1+m_2}$ 且 $\mathscr{B}_{m_1} \circ \mathscr{B}_{m_2} = \mathscr{B}_{m_1+m_2}$, 其中

$$\mathscr{B}_m\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} B_m(x-y)\varphi(y)dy.$$

于是温和解 (4.2) 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \mathscr{G}(t)u_0(x) + \int_0^t \mathscr{G}(t-\tau)\mathscr{B}u^p(x,s)ds\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)u_0(y)dy + \int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^n} H(x-y,t-s)u^p(y,s)dy,\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}G(x,t) &= (2\pi)^{-n/2}\mathrm{e}^{-t/k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k^{-m}t^m}{m!}B_m(x) \geqslant 0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\geqslant 0,\\ H(x,t) &= (2\pi)^{-n/2}\mathrm{e}^{-t/k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k^{-m}t^m}{m!}B_{m+1}(x) \geqslant 0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\geqslant 0.\end{aligned}$$

根据算子 $\mathscr{G}$ 和 Bessel 位势的估计

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{G}(t)\varphi\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}\\ &\quad\leqslant M(1+t)^{n(1/q_1-1/q_2)/2}\|\varphi\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} + M\mathrm{e}^{-t}\|\varphi\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}\\ &\quad\leqslant M\sqrt{1+|t|^2}^{n(1/q_1-1/q_2)/2}\|\varphi\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} + M\mathrm{e}^{-t}\|\varphi\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}, \quad \varphi\in L^{q_1}(\mathbb{R}^n)\cap L^{q_2}(\mathbb{R}^n), \quad t\geqslant 0,\\ &\|\mathscr{B}^m\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant M\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \varphi\in L^q(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

在空间

$$\begin{aligned}&X = \{0\leqslant\varphi\in C([0,+\infty); C(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)) : \|\varphi\|_X < \delta\},\\ &\|\varphi\|_X = \sup_{t>0}(\langle t\rangle^{n/2}\|\varphi(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)})\end{aligned}$$

上利用压缩不动点定理, 可以证得小初值时解的整体存在性. 然而伪抛物方程核函数 $G(x,t)$ 和 $H(x,t)$ 比热核复杂得多且无法写出具体表达式, 故从基本解的估计来得到爆破并不可行. 文献 [19] 采用积分估计的方法证明了爆破, 主要考虑如下积分的变化:

$$w_l(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\psi_l(x)dx, \quad t\geqslant 0, \quad l>0,$$

其中,

$$\psi_l(x) = \psi\left(\frac{x}{l}\right), \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

$\psi(x)$ 为截断函数. 对足够大的 $l>0$, 成立着

$$w_l(t) \geqslant \frac{1}{1+kC_0l^{-2}}\bigg(w_l(0) + (C_2l^{-pn+n})^{1/p}\int_0^t w_l(s)$$

$$\cdot(-C_1 l^{n-2-n/p} + C_2^{(p-1)/p} l^{(-pn+n)(p-1)/p} w_l^{p-1}(s))ds\Big). \tag{4.3}$$

注意在 (4.3) 右端 l 的幂次满足:

$$\text{当 } p < p_c = 1 + \frac{2}{n} \text{ 时,}\quad n - 2 - \frac{n}{p} < \frac{(-pn+n)(p-1)}{p};$$
$$\text{当 } p > p_c = 1 + \frac{2}{n} \text{ 时,}\quad n - 2 - \frac{n}{p} > \frac{(-pn+n)(p-1)}{p};$$
$$\text{当 } p = p_c = 1 + \frac{2}{n} \text{ 时,}\quad n - 2 - \frac{n}{p} = \frac{(-pn+n)(p-1)}{p}.$$

于是,

当 $p_0 < p < p_c$ 时, 选择 l 足够大 $\Rightarrow$ 任意初值解爆破;
当 $p > p_c$ 时, 选择 $w_l(0)$ 足够大 $\Rightarrow$ 大初值解爆破;
当 $p = p_c$ 时, 选择 $w_l(0)$ 足够大 $\Rightarrow$ 大初值解爆破.

对于临界情形, 伪抛物方程是否与热方程一样, 对于任意非负非平凡初值, 解会在有限时刻爆破? 为此, 文献 [19] 采用反证法, 考虑 $w_l(t)$ 的增长. 需要注意的是, 在积分估计中伪抛物项 Δu_t 会在分部积分后带来边界积分

$$\int_{\partial B_{2l}} u(x,t_i)\nabla\psi_l\cdot\nu d\sigma, \tag{4.4}$$

这一项会给估计特别是临界情形时的估计带来极大困扰. 假设 u 为 Cauchy 问题 (4.1) 的整体古典解. 由 (4.3) 和 $p = p_c$ 可得 $\sup_{t\geqslant 0}\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx < \infty$. 那么存在一个常数 $\Lambda < \infty$ 使得

$$\Lambda = \sup_{l>0,t\geqslant 0} w_l(t) = \sup_{t\geqslant 0}\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx. \tag{4.5}$$

如果能够找到某个 $T > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,T)dx > \Lambda, \tag{4.6}$$

则与假设 u 为整体古典解矛盾. 注意, 对于任意 $0 < \varepsilon < \Lambda$, 存在 $t_0 \geqslant 0$ 和 $l_0 \geqslant 1$ 使得

$$w_{l_0}(t_0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t_0)\psi_{l_0}(x)dx > \Lambda - \varepsilon.$$

将时间离散 $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N \equiv T$, 需要选择合适的 t_i, 一步一步估计积分 $\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx$. 为避免边界积分 (4.4) 带来的困难, 在每一步选取具有紧支集的初值满足

$$u^{(1)}(x,t_0) \leqslant u(x,t_0),\quad u^{(2)}(x,t_1) \leqslant u^{(1)}(x,t_1),\quad \ldots,\quad u^{(N)}(x,t_{N-1}) \leqslant u^{(N-1)}(x,t_{N-1}),$$

并令 $u^{(i)}(x,t)$ 为满足初值条件 $u^{(i)}(x,t_{i-1}) = u^{(i-1)}(x,t_{i-1})$ 的解. 于是对每个 $i \geqslant 2$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^{(i)}(x,t_i)dx \geqslant \Lambda - \sum_{m=0}^{i}\frac{\varepsilon_0}{2^m} + \sum_{m=0}^{i-1}\delta_m,$$

其中,

$$t_i = t_{i-1} + \frac{\Gamma_0}{C_1}\left(\frac{l_i}{2}\right)^{-(p_c(n-2)-n)/(p_c-1)},$$

$$\delta_i = \frac{C_2\Gamma_0}{2C_1}\left(\Lambda - \sum_{m=0}^{i+1}\frac{\varepsilon_0}{2^m}\right)^{p_c} 2^{(p_c(n-2)-n)/(p_c-1)},$$

这里, C_1 和 C_2 为常数, Γ_0、ε_0 和 l_i 为选取的常数. 因此, 对每个 $i \geqslant 2$, 可以得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^{(i)}(x,t_i)dx \geqslant \Lambda - \sum_{m=0}^{i}\frac{\varepsilon_0}{2^m} + \sum_{m=0}^{i-1}\delta_m > \Lambda - 2\varepsilon_0 + i\delta,$$

其中

$$\delta = \frac{C_2\Gamma_0}{2C_1}\left(\Lambda - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_0}{2^m}\right)^{p_c} 2^{(p_c(n-2)-n)/(p_c-1)}.$$

这样只要有限多步后就可以得到 (4.6), 从而得到解的有限时刻爆破结论.

在工作 [19] 后, 国内外对伪抛物方程的临界指标的研究有了长足的进展. Wang 和 Wang [153] 考虑负指数 Sobolev 空间中的初值, 并找到 (4.1) 新的临界指标 $p_s = 1 + \frac{2}{n+s}$. Yang 等 [164] 考虑了半线性耦合伪抛物方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \tau\dfrac{\partial \Delta u}{\partial t} = \Delta u + v^p, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \tau\dfrac{\partial \Delta v}{\partial t} = \Delta v + u^p, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

确定了其临界 Fujita 曲线 $(pq)_c = 1 + \frac{2}{n}\max(p+1, q+1)$. Li 和 Du [90] 及 Khomrutai [77] 同时考虑了具无穷系数源的伪抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \tau\frac{\partial \Delta u}{\partial t} = \Delta u + |x|^\sigma u^p, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{4.7}$$

找到了 Fujita 指标 $p_c = 1 + \frac{\sigma+2}{n}$. 当 $0 < p < 1$ 时, Khomrutai [78] 又考虑了 (4.7) 解的整体存在唯一性并建立了解的时间增长和空间径向增长的下界估计. 与 (4.7) 相关的非局部扩散方程的临界指标参见文献 [79]. 我们知道对半线性热方程或半线性伪抛物方程, 如果初值 $u_0(x) \equiv 0$, 则解 $u \equiv 0$. 因此, 当初值非负非平凡时, 上述结果可理解为对初值作小扰动后解的性质发生的本质变化, 即解可能在有限时刻爆破. 很自然地人们也考虑, 当对内部源作小扰动时是否有相关的结论. Cao 和 Yin [18] 考虑了具零初值的伪抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \tau\frac{\partial \Delta u}{\partial t} = \Delta u + u^p + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

发现了此时临界指标 $p_c = \frac{n}{n-2}$, $n \geqslant 3$, 即内部源的小扰动可以扩大任意初值爆破的区域.

在对临界指标的研究中, 人们发现初值对解的渐近行为有着重要影响, 如大初值解在有限时刻爆破, 小初值解整体存在. 那么何为大初值何为小初值是人们一直思考的问题, 人们通过对生命跨度 (life span) 的研究来解答这样的问题. 定义

$$T^* = \sup\{T > 0 \mid u(x,t) \text{ 在 } \mathbb{R}^N \times [0,T] \text{ 上有界}\}.$$

如果 $T^* < +\infty$, 则

$$\lim_{t\to T^*}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}=\infty,$$

并将 T^* 称为解的生命跨度. 半线性热方程解的生命跨度的早期工作是由 Lee 和 Ni [88] 以及 Gui 和 Wang[58] 完成的. 他们发现了很多重要的现象, 特别是初值在无穷远处的性态会密切影响解的生命跨度. 这一发现为许多后续工作指明了方向. 在文献 [58, 88] 中, 一个很有趣的想法是, 将初值作伸缩变换 $u_0(x)=\lambda\phi(x)$, 考虑 $\phi(x)$ 在无穷远处多项式衰减阶对解的渐近性态的影响以及伸缩系数 λ 与生命跨度的关系. 特别地, 文献 [88] 确定了第二临界指标 $a_c=\frac{2}{p-1}$. 对半线性伪抛物方程的 Cauchy 问题 (4.1), Yang 等 [163] 也发现了第二临界指标的存在且与半线性热方程一致.

定理 4.2 对问题 (4.1), 当 $p>p_c=1+\frac{2}{n}$ 时, 有如下结论:

(1) 如果 $\liminf_{|x|\to\infty}|x|^a\phi(x)>0$, $a<a_c$ 或 $a\geqslant a_c$ 且 λ 足够大, 则解在有限时刻爆破;

(2) 如果 $\limsup_{|x|\to\infty}|x|^a\phi(x)<\infty$, $a>a_c$, 且对固定的 τ, 存在 $\lambda_\tau>0$ 使得当 $\lambda<\lambda_\tau$ 时, 或者对于任意 $\lambda>0$, 存在 τ_λ 使得 $\tau>\tau_\lambda$ 时, 解整体存在.

注 4.2 从上述结论可以发现, 尽管伪抛物方程与热方程在解的整体存在和有限时刻爆破方面对初值在无穷远处衰减阶的划分相同, 但当 $a>a_c$ 时, 可以增大伪抛物项的系数 τ 来保证解的整体存在.

当考虑 λ 对生命跨度的影响时, 先看空间齐次情形, 即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=|u|^{p-1}u, & (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,+\infty),\\ u(x,0)=\lambda, & x\in\mathbb{R}^N,\end{cases}$$

可以给出解的显式形式

$$u(x,t)=\begin{cases}(\lambda^{1-p}-(p-1)t)^{1/(p-1)}, & p>1,\\ \lambda\mathrm{e}^t, & p=1.\end{cases}$$

因此解的爆破时间

$$T_\lambda=\frac{\lambda^{1-p}}{p-1}.$$

对半线性热方程的 Cauchy 问题, 由文献 [88] 的结果可知

$$\liminf_{|x|\to\infty}u_0(x)>0,$$

则

$$T_\lambda\sim\lambda^{-(p-1)},\quad 当\ \lambda\to0^+\ 时.$$

进一步文献 [58] 证明了, 如果

$$\lim_{|x|\to\infty}u_0(x)=\lambda A>0,$$

则

$$\lim_{\lambda\to0}\lambda^{p-1}T_\lambda=\frac{1}{p-1}A^{1-p}.$$

还有很多工作关心对生命跨度上下界的估计, 这里主要引用文献 [55, 108, 161, 162] 关于半线性热方程 Cauchy 问题的研究结果. Giga 和 Umeda[55] 指出, 若初值 $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, 则生命跨度

$$T^* \geqslant \frac{1}{p-1}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{1-p}. \tag{4.8}$$

如果从平凡初值 $u_0(x) \equiv \lambda$ 的角度来看,

$$T^* = \frac{\lambda^{1-p}}{p-1},$$

这说明文献 [55] 中的估计 (4.8) 是最优的. 但是只有下界估计是无法判断解是否在有限时刻爆破, 人们还需要生命跨度的上界估计. Yamaguchi 和 Yamauchi[161] 建立了一维情形时生命跨度的上界估计, 即如果 $\lim_{x\to\pm\infty} u_0(x) = A_\pm$, 则

$$T^* \leqslant \frac{1}{p-1}\left(\frac{A_+ + A_-}{2}\right)^{1-p}.$$

Ozawa 和 Yamauchi[108] 考虑了高维情形, 假设 $\liminf_{r\to\infty} u_0(rx) = u_\infty(x)$, $x \in \mathbb{S}^{N-1}$, 这里 $u_\infty(x) \in L^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$ 满足 $\int_{S^{N-1}} u_\infty(x)\,d\sigma(x) > 0$, 其中 σ 表示单位球表面积, 则生命跨度

$$T^* \leqslant \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{\sigma(\mathbb{S}^{N-1})}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} u_\infty(x')\,d\sigma(x')\right)^{1-p}.$$

这表明如果初值在无穷远处的下极限经伸缩变换后在单位球面上的积分大于 0, 则解在有限时刻爆破. Yamauchi[162] 进一步地指出, 只要初值在无穷远的角状区域上大于 0, 解也会在有限时刻爆破. 令

$$u_\infty(x') = \liminf_{r\to+\infty} u(rx'), \quad x' \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

在单位球面上取一点 ξ' 并令 $\delta \in (0, \sqrt{2})$, 给出角状邻域

$$\Gamma_{\xi'}(\delta) = \left\{\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \,\middle|\, \left|\xi' - \frac{\eta}{|\eta|}\right| < \delta\right\}$$

和部分球冠

$$S_{\xi'}(\delta) = \Gamma_{\xi'}(\delta) \cap \mathbb{S}^{N-1}.$$

如果存在 $\xi' \in \mathbb{S}^{N-1}$ 以及 $\delta > 0$, 使得 $\operatorname{essinf}_{x'\in S_{\xi'}(\delta)} u_\infty(x') > 0$, 则解在有限时刻爆破, 且有生命跨度的上界估计

$$T^* \leqslant \frac{1}{p-1}\Big(\operatorname*{essinf}_{x'\in S_{\xi'}(\delta)} u_\infty(x')\Big)^{1-p}.$$

此结果的一维情形版本如下: 如果 $\max\{\liminf_{x\to+\infty} u_0(x), \liminf_{x\to-\infty} u_0(x)\} > 0$, 则有

$$T^* \leqslant \frac{1}{p-1}\Big(\max\Big\{\liminf_{x\to+\infty} u_0(x), \liminf_{x\to-\infty} u_0(x)\Big\}\Big)^{1-p}.$$

通过上述系列工作, 可以看到初值在无穷远处非零性质的重要作用, 因此人们有理由相信初值在无穷远处的密度对解渐近行为起到的关键作用. Cao 等[17] 发现对于伪抛物方程的 Cauchy 问题 (4.1), 只要初值在无穷远处非稀疏, 解就会在有限时刻爆破. 如果

$$\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{mes}(B(x_0, r) \cap E)}{\operatorname{mes}(B(x_0, r))} = 0,$$

其中, $\mathrm{mes}(F)$ 为集合 F 的 Lebesgue 测度, $B(x,r)$ 为以 x 为球心、r 为半径的球, 则称点 x_0 为集合 E 的稀疏点. 如果

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\mathrm{mes}(B(0,r)\cap E)}{\mathrm{mes}(B(0,r))}=0,$$

则称 ∞ 为集合 E 的稀疏点. 对于非负函数 $\varphi(x)$, 如果对于任意 $\alpha>0$, ∞ 为集合 $\{x\mid\varphi(x)\geqslant\alpha\}$ 的稀疏点, 则称 ∞ 为 $\varphi(x)$ 的稀疏点.

定理 4.3 [17]　如果 ∞ 是初值 $u_0(x)$ 的非稀疏点, 即存在 $\alpha>0$ 使得

$$\overline{D}(\alpha):=\limsup_{r\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\frac{\mathrm{mes}(B(x,r)\cap\{y\mid u_0(y)\geqslant\alpha\})}{\mathrm{mes}(B(x,r))}>0,$$

则问题 (4.1) 的解在有限时刻爆破且生命跨度 T^* 有上界估计

$$T^*\leqslant\frac{1}{p-1}\inf_{\alpha>0}(\alpha\overline{D}(\alpha))^{1-p}.$$

下面简要介绍对这一结果的证明思路, 主要想法是对温和解作积分估计. 回顾热方程的温和解

$$u(x,\bar{t})=\int_{\mathbb{R}^N}G(x-y,\bar{t})u_0(y)dy+\int_0^{\bar{t}}\int_{\mathbb{R}^N}G(x-y,\bar{t}-s)u^p(y,s)dyds,$$

如果对上式两边同时乘以 $G(z-x,t-\bar{t})$ 并在 $\mathbb{R}^n$ 上积分, 则利用热核 $G(x,t)$ 的半群性质可以容易得到微分不等式

$$F'(\bar{t})\geqslant F^p(\bar{t}), \tag{4.9}$$

其中

$$F(\bar{t})=\int_{\mathbb{R}^N}G(z-y,\bar{t})u_0(y)dy+\int_0^{\bar{t}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}G(z-y,t-s)u(y,s)dy\right)^p ds.$$

然而伪抛物方程涉及多个核函数 $h(x,t)$、$g(x,t)$ 和 $b_m(x)$, 其中 $g(x,t)$ 具有半群性质, 但 $h(x,t)$ 不具有半群性质,

$$\int_{\mathbb{R}^n}g(x-y,t)g(y-z,s)dy=g(x-z,s+t),$$
$$\int_{\mathbb{R}^n}B_m*h(x-y,t)h(y-z,s)dy=B_{m+1}*h(x-z,t).$$

因此对伪抛物方程的解

$$u(x,\bar{t})=\int_{\mathbb{R}^N}g(x-y,\bar{t})u_0(y)dy+\int_0^{\bar{t}}\int_{\mathbb{R}^N}h(x-y,\bar{t}-s)u^p(y,\tau)dyds, \tag{4.10}$$

两边同时卷积 $h(x,t)$ 或者 $g(x,t)$ 都无法得到类似热方程的结果. 文献 [17] 对 (4.10) 两边同时乘以 $(B_m*g)(z-x,t-\bar{t})$ 并关于 x 在 $\mathbb{R}^N$ 上积分得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(B_m*g)(z-x,t-\bar{t})u(x,\bar{t})dx\geqslant{}&\int_{\mathbb{R}^N}(B_m*g)(z-y,t)u_0(y)dy\\&+\int_0^{\bar{t}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(B_{m+1}*g)(z-y,t-s)u(y,s)dy\right)^p ds.\end{aligned}$$

如果对 Bessel 核函数 $B_m(x)$ 与 $B_{m+1}(x)$ 建立一些合适的估计, 则有可能得到类似 (4.9) 的微分不等式.

引理 4.1 令 $B_m(x)$ 为 m 阶 Bessel 核函数. 令

$$C(m)=\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\frac{B_{m+1}(x)}{B_m(x)}.$$

则当 $m>\frac{N}{2}$ 时, $C(m)<1$ 且

$$\lim_{m\to+\infty}C(m)=1.$$

证明 首先证明 $B_{m+1}(x)/B_m(x)$ 为关于 $|x|$ 的递增函数. 令 $r=|x|^2/4$, 考虑函数

$$F(r)=\frac{\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\xi-\frac{r}{\xi}}d\xi}{\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}-1}\mathrm{e}^{-\xi-\frac{r}{\xi}}d\xi}.$$

令 $d\mu=\mathrm{e}^{-\xi-\frac{r}{\xi}}d\xi$, 则

$$\frac{dF}{dr}=\frac{\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}}d\mu\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}-2}d\mu-(\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}-1}d\mu)^2}{(\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}-1}d\mu)^2}.$$

利用 Cauchy 不等式, 得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}-1}d\mu&=\int_0^\infty(\xi^{m-\frac{N}{2}})^{1/2}(\xi^{m-\frac{N}{2}-2})^{1/2}d\mu\\&\leqslant\left(\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}}d\mu\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}-2}d\mu\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

于是 $F'(r)\geqslant0$ 且 $B_{m+1}(x)/B_m(x)$ 为 $|x|$ 的递增函数, 并且有

$$\frac{B_{m+1}(x)}{B_m(x)}\geqslant\lim_{x\to0}\frac{B_{m+1}(x)}{B_m(x)}.$$

由于当 $2m>N$ 时, $B_m(0)\in(0,\infty)$ 且 $B_m(x)$ 连续, 所以

$$\frac{B_{m+1}(0)}{B_m(0)}=\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\frac{B_{m+1}(x)}{B_m(x)},\quad 对\ 2m>N. \tag{4.11}$$

接下来通过直接计算可得

$$\frac{B_{m+1}(0)}{B_m(0)}=\frac{\frac{1}{m!}}{\frac{1}{(m-1)!}}\frac{\int_0^\infty\xi^{-(\frac{N}{2}-m)}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi}{\int_0^\infty\xi^{-(\frac{N}{2}-m)-1}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi}=\frac{1}{m}\frac{\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi}{\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}-1}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi}.$$

当 N 为偶数时,

$$\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi=\left(m-\frac{N}{2}\right)!,\quad\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}-1}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi=\left(m-\frac{N}{2}-1\right)!.$$

当 N 为奇数时,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi&=\left(m-\frac{N}{2}\right)\left(m-\frac{N}{2}-1\right)\cdots\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\xi}}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi,\\\int_0^\infty\xi^{m-\frac{N}{2}-1}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi&=\left(m-\frac{N}{2}-1\right)\left(m-\frac{N}{2}-2\right)\cdots\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\xi}}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi,\end{aligned}$$

其中 $\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\xi}}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi=\sqrt{\pi}$. 这样可以得到

$$\frac{B_{m+1}(0)}{B_m(0)}=\frac{m-\frac{N}{2}}{m}\to1,\quad 当\ m\to\infty\ 时.$$

结合 (4.11) 得到引理结果. □

将引理 4.1 的结果应用到 (4.10), 类似对半线性热方程的处理可以得到类似 (4.9) 的微分不等式以及如下引理.

引理 4.2 令 u 为问题 (4.1) 在 $[0,T^*)$ 上的解, 则可以得到如下对生命跨度 T^* 的上界估计:

$$T^* \leqslant \sup\left\{T>0 \,\middle|\, \frac{C(m)^{-p}}{p-1}\left(\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} B_m * g(z-y,t)u_0(y)\,dy\right)^{1-p} \geqslant t, t\in(0,T)\right\}, \tag{4.12}$$

其中, $m>N+1$, $B_m(x)$ 为 m 阶 Bessel 核函数, $C(m)>0$ 且 $\lim_{m\to\infty} C(m)=1$.

如果能证明

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} B_m * g(z-y,T^*)u_0(y)\,dy \geqslant \alpha\overline{D}(\alpha), \quad \forall\, m>\frac{N}{2}, \tag{4.13}$$

则由 (4.12) 就可以得到定理 4.3 的结果

$$T^* \leqslant \frac{1}{p-1}(\alpha\overline{D}(\alpha))^{1-p}.$$

引理 4.3 对于任意 $\delta\in(0,1)$, 存在 K, 使得当 $k>K$ 时,

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in B(z_k,r_k-\sqrt{r_k})}\int_{B(z_k,r_k)} \mathbb{1}_{B(x,\sqrt{r_k})}(y)B_m * g(x-y,T^*)u_0(y)\,dy\\ &\geqslant \frac{1-\delta}{(r_k-\sqrt{r_k})^N}[\alpha(\overline{D}(\alpha)-\varepsilon)r_k^N - \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}(r_k^N-(r_k-2\sqrt{r_k})^N)],\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{1}_E$ 为集合 E 的特征函数.

由引理 4.3、$\lim_{k\to\infty}\frac{r_k^N}{(r_k-\sqrt{r_k})^N}=1$ 和 $\lim_{k\to\infty}\frac{r_k^N-(r_k-2\sqrt{r_k})^N}{(r_k-\sqrt{r_k})^N}=0$ 以及 ε 和 δ 的任意性得到 (4.13).

注 4.3 通过定理 4.3 可以发现某些在无穷远处的下极限为 0 的初值可以导致解在有限时刻爆破, 然而这样的结果无法通过文献 [108, 162] 得到. 例如, 令 $a_k=k!$, $0<\varepsilon<1$, $u_0(x)$ $(0\leqslant u_0(x)\leqslant 1)$ 满足

$$u_0(x)=\begin{cases}\varepsilon, & |x|\in\left[a_{2k-1}+\dfrac14, a_{2k}-\dfrac14\right],\\ 1, & |x|\in[a_{2k},a_{2k+1}].\end{cases}$$

由 $D(\alpha)$ 的定义可以得到

$$D(1)\geqslant \limsup_{k\to+\infty}\frac{\mathrm{mes}(\{x\mid u_0(x)\geqslant 1\}\cap B(0,a_{2k+1}))}{\mathrm{mes}(B(0,a_{2k+1}))} \geqslant \limsup_{k\to+\infty}\frac{a_{2k+1}^N-a_{2k}^N}{a_{2k+1}^N}=1.$$

故生命跨度 T^* 有估计 $T^*\leqslant \frac{1}{p-1}(1D(1))^{1-p}=\frac{1}{p-1}$.

4.2 半线性伪抛物方程的初边值问题

当考虑有界域上的半线性伪抛物方程的初边值问题时, Xu 和 Su [159] 利用位势井方法研究伪抛物方程的工作引起了很大关注. 在此工作基础上, 人们相继建立了很多利用位势井方法讨论具有源项的伪抛物方程 [59, 89, 96, 98, 100, 169, 170]、变指标伪抛物方程 [92, 113] 及退化、奇异伪抛物方程 [23, 91] 解的渐近

行为的结果. 文献 [159] 首次通过初始能量的大小来划分如下伪抛物方程初边值问题解的整体存在和爆破:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial \Delta u}{\partial t}=\Delta u+u^p, & x\in\Omega, \quad t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega,\\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega, \quad t>0.\end{cases} \tag{4.14}$$

引入能量泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2-\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}, \quad I(u)=\|\nabla u\|_2^2-\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

和 Nehari 流形

$$N=\{u\in H_0^1(\Omega)\mid I(u)=0, \|u\|_{H_0^1}\neq 0\},$$

并令

$$d=\inf\left\{\sup_{\lambda\geqslant 0}J(\lambda u)\,\middle|\, u\in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |\nabla u|^2dx\neq 0\right\}=\inf_{u\in N}J(u).$$

文献 [159] 建立了如下结果.

定理 4.4 对问题 (4.14), 当 $1<p<\infty$, $n=1,2$ 或者 $1<p\leqslant\frac{n+2}{n-2}$, $n\geqslant 3$ 时,

(i) $J(u_0)<d$, $I(u_0)>0$, 解整体存在且指数衰减 $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2\leqslant\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2\mathrm{e}^{-\lambda t}$;

(ii) $J(u_0)<d$, $I(u_0)<0$, 解有限时刻爆破, $\lim_{t\to T}\int_0^t\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2ds=\infty$;

(iii) $J(u_0)=d$, $I(u_0)\geqslant 0$, 解整体存在, 进一步地当 $J(u_0)=d$、$I(u_0)>0$ 时, 解指数衰减 $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2\leqslant C\mathrm{e}^{-\lambda t}$;

(iv) $J(u_0)=d$, $I(u_0)<0$, 解有限时刻爆破, $\lim_{t\to T}\int_0^t\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2ds=\infty$;

(v) $J(u_0)>d$, $I(u_0)>0$, $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant\inf\{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\mid I(u)=0, \|u\|_{H_0^1(\Omega)}<\sqrt{\frac{2d(p+1)}{p-1}}\}$, 解整体存在且衰减至 0;

(vi) $J(u_0)>d$, $I(u_0)<0$ 且 $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}\geqslant\sup\{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\mid I(u)=0, \|u\|_{H_0^1(\Omega)}<\sqrt{\frac{2d(p+1)}{p-1}}\}$, 解在有限时刻爆破.

在多项式源之外, 还有一类源项也极具研究价值, 即 Log 型源. 除了 Log 型源本身具有的物理背景, 其数学理论上的研究也很有趣. 从大量对多项式源 u^p 的研究发现, 线性源 u 与多项式源 u^p 具有本质区别. 以伪抛物方程为例, 当 $p=1$ 时, 解整体存在; 当 $p=1+\varepsilon$ 时, 解会在有限时刻爆破. 当 $u\to\infty$ 时, $u\log|u|$ 介于线性增长和多项式增长之间, 那么 Log 型源会如何影响解的定性性质呢, $u\log|u|$ 的行为更类似于线性源 u 还是多项式源 u^p 呢? Chen 和 Tian [22] 首次讨论了具 Log 型源的伪抛物方程, 这一工作吸引了众多学者的广泛关注 (参见文献 [24,40,44,45,97,166]). 文献 [22] 考虑了如下的具 Log 型源的伪抛物方程的初边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial \Delta u}{\partial t}=\Delta u+u\log|u|, & x\in\Omega, \quad t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega,\\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega, \quad t>0.\end{cases} \tag{4.15}$$

实际上常用的位势井方法适用于满足如下条件的非线性源 $f(u)$.

(1) $f\in C^1$, $f(0)=f'(0)=0$.

(2) f 单调且在 $u>0$ 时是凸函数, $u<0$ 时是凹函数; 或者 f 是凸函数.

(3) $(p+1)F(u)\leqslant uf(u)$, 且 $|uf(u)|\leqslant\gamma|F(u)|$, 其中 $2<p+1\leqslant\gamma<2^*$, $F(u)=\int_0^u f(s)ds$.

值得注意的是 Log 型源并不满足上述要求, 因此文献 [22] 给出了改进的能量泛函:

$$
\begin{aligned}
J(u)&=\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2-\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\log|u|dx+\frac{1}{4}\int_\Omega u^2dx,\\
I(u)&=\|\nabla u\|_2^2-\int_\Omega u^2\log|u|dx,\\
d&=\inf\left\{\sup_{\lambda\geqslant0}J(\lambda u)\,\middle|\,u\in H_0^1(\Omega),\int_\Omega|\nabla u|^2dx\neq0\right\},
\end{aligned}
$$

并建立了如下结果.

定理 4.5 对于问题 (4.15), 令 $M=\frac{1}{4}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^n$.

(i) 如果 $J(u_0)\leqslant d$, $I(u_0)\geqslant0$, 则解整体存在且有界. 进一步地, 如果 $J(u_0)<M$, $I(u_0)\geqslant0$, 则

$$
\|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha t},\quad t\geqslant0,
$$

其中 α 与 $J(u_0)$ 有关. 如果 $J(u_0)=M$, $I(u_0)>0$, 则对于任意小的 $\gamma>0$, 存在 t_γ, 使得

$$
\|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_1 t},\quad t\geqslant t_\gamma,
$$

其中 α_1 与 γ 和 M 有关.

(ii) 如果 $J(u_0)\leqslant d$, $I(u_0)<0$, 则解在无穷时刻爆破 $\lim_{t\to\infty}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\infty$. 进一步地,

$$
\|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2\leqslant\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2\mathrm{e}^{\mathrm{e}^t},\quad t\geqslant0,
$$

对于任意 $\alpha_2\in(0,1)$, 存在 $t_{\alpha_2>0}$ 和 $C_{\alpha_2}>0$, 使得

$$
\|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2\geqslant C_{\alpha_2}(t-t_{\alpha_2})^{\frac{1}{1-\alpha_2}-1},\quad t\geqslant t_{\alpha_2}.
$$

注 4.4 定理 4.5 揭示了 Log 型源与多项式源之间的区别, 对具多项式源 u^p 的问题 (4.14), 解在有限时刻爆破 [159]; 而对具 Log 型源的问题 (4.15), 解在无穷时刻爆破 [22]. 另外, 文献 [22] 的研究表明, 通过与具 Log 型源的热方程的结果相比较, 在解的衰减估计方面, 伪抛物方程的解衰减更弱; 在解的爆破估计方面, 热方程解以指数增长为下界在无穷时刻爆破, 而伪抛物方程则以多项式增长为下界在无穷时刻爆破. 这些区别正是由伪抛物项 Δu_t 造成的.

文献 [22] 指出 $M\leqslant d$, 则当 $J(u_0)=d$、$I(u_0)=0$ 时, 是否会出现定理 4.5 的结论 (1) 中描述的解衰减至 0 的现象呢? Ji 等 [66] 关于具 Log 型源的伪抛物方程周期解的工作回答了这一问题. 文献 [66] 讨论了如下伪抛物方程 ($\tau=1$) 及热方程 ($\tau=0$) 周期解的存在性和稳定性问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}-\tau\dfrac{\partial\Delta u}{\partial t}=\Delta u+m(t)u\log|u|, & x\in\Omega,\quad t>0,\\
u(x,t)=u(x,t+T), & x\in\Omega,\quad t>0,\\
u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\quad t>0.
\end{cases}\tag{4.16}
$$

定理 4.6 热方程周期解问题 (4.16) ($\tau=0$) 存在至少一个正周期解. 令 $\widetilde{u}(x,t)$ 为一个周期解. 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $u_i^0\in L^2(\Omega)$ $(i=1,2)$, 满足 $\|u_i^0-\widetilde{u}(x,0)\|_{L^\infty(\Omega)}<\varepsilon$, 使得

$$
\|u_1(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\geqslant\|\widetilde{u}(x,0)\|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\exp\left(\exp\left(\int_0^t m(\tau)\,d\tau+\log\log(1+\delta)\right)\right),
$$

且

$$\|u_2(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|\widetilde{u}(x,0)\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \exp\Bigg(- \exp\bigg(\int_0^t m(\tau)\, d\tau + \log|\log(1-\delta)|\bigg)\Bigg),$$

其中, $u_i(x,t)$ 为以 u_i^0 $(i=1,2)$ 为初值的问题 (4.15) 当 $\tau=0$ 时的解, δ $(0<\delta<1)$ 使得 $\|\delta\widetilde{u}(x,0)\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon$.

定理 4.7 伪抛物方程周期解问题 (4.16) 存在至少一个正周期解. 令 $\widetilde{u}(x,t)$ 为一个周期解. 进一步假设 $m(t)\equiv m_0$. 则对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $u_0\in H_0^1(\Omega)$ 满足 $\|u_0-\widetilde{u}(x,0)\|_{L^\infty(\Omega)}<\varepsilon$ 及常数 $\mu>0$, 使得

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \geqslant \|\widetilde{u}(x,0)\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \exp(\exp(\mu t + \log\log(1+\delta))),$$

其中, $u(x,t)$ 为以 u_0 为初值的问题 (4.15) 的解, δ $(0<\delta<1)$ 使得 $\|\delta\widetilde{u}(x,0)\|_{L^\infty(\Omega)}<\varepsilon$.

注 4.5 从定理 4.6 和 4.7 以及关于具周期源的热方程和伪抛物方程的研究结果可知, 在周期解的存在性方面, Log 型源的作用更接近于幂指型源, 此时均存在正周期解. 而具线性源的热方程或伪抛物方程, 其正周期解的存在性依赖于周期系数, 可能存在也可能不存在. 在周期解的稳定性方面, Log 型源与线性源和幂指型源皆有重要区别. 具线性源的热方程和伪抛物方程的正周期解稳定; 而具幂指型源和 Log 型源时周期解不稳定. 这种不稳定性也有很大差别, 文献 [66] 给出了不稳定性的增长速率或衰减速率, 这在以往对周期解稳定性的分析中未曾发现. 此外, $m(t)=1$ 可以认为是特殊的周期情形, 那么从周期解的存在性可知, 此时存在正周期解 $\tilde{u}$, 根据文献 [66] 的证明可知此时周期解 $\tilde{u}(x,t)$ 与 t 无关, 即 $\tilde{u}(x,t)=\tilde{u}(x)$, 这实际上表明 $I(\tilde{u})=0$. 另外从文献 [66, 引理 2.1] 及 Nehari 流形可以推断 $J(\tilde{u})=d$, 因此可知文献 [22] 中 $J(u_0)=d$ 和 $I(u_0)=0$ 对应的整体有界解可能是周期解.

可以说目前对半线性伪抛物方程解的有限时刻爆破及整体存在结果, 人们已经有了较为深刻的认识. 然而还有很多问题尚未完全解决, 如伪抛物项对生命跨度的精确影响以及伪抛物方程的爆破集和爆破速率, 而这些都是解的渐近行为中具有重要理论价值的问题.

致谢 感谢编委和两位审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

1 Abreu E, Ferraz P, Vieira J. Numerical resolution of a pseudo-parabolic Buckley-Leverett model with gravity and dynamic capillary pressure in heterogeneous porous media. J Comput Phys, 2020, 411: 109395
2 Abreu E, Vieira J. Computing numerical solutions of the pseudo-parabolic Buckley-Leverett equation with dynamic capillary pressure. Math Comput Simulation, 2017, 137: 29–48
3 Al'shin A B, Korpusov M O, Sveshnikov A G. Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 15. Berlin: Walter de Gruyter, 2011
4 Barenblatt G I, Bertsch M, Dal Passo R, et al. A degenerate pseudoparabolic regularization of a nonlinear forward-backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stably stratified turbulent shear flow. SIAM J Math Anal, 1993, 24: 1414–1439
5 Barenblatt G I, Garcia-Azorero J, De Pablo A, et al. Mathematical model of the non-equilibrium water-oil displacement in porous strata. Appl Anal, 1997, 65: 19–45
6 Barenblatt G I, Zheltov Iu P, Kochina I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. J Appl Math Mech, 1960, 24: 1286–1303
7 Beliaev A Y, Hassanizadeh S M. A theoretical model of hysteresis and dynamic effects in the capillary relation for two-phase flow in porous media. Transp Porous Media, 2001, 43: 487–510
8 Bertsch M, Smarrazzo F, Tesei A. Pseudoparabolic regularization of forward-backward parabolic equations: A logarithmic nonlinearity. Anal PDE, 2013, 6: 1719–1754
9 Bertsch M, Smarrazzo F, Tesei A. On a pseudoparabolic regularization of a forward-backward-forward equation. Nonlinear Anal, 2015, 129: 217–257

10 Bertsch M, Smarrazzo F, Tesei A. Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: Power-type nonlinearities. J Reine Angew Math, 2016, 712: 51–80
11 Böhm M, Showalter R E. A nonlinear pseudoparabolic diffusion equation. SIAM J Math Anal, 1985, 16: 980–999
12 Bottero S. Advances in theories of capillarity in porous media. PhD Thesis. Utrecht: Utrecht University, 2009
13 Brill H. A semilinear Sobolev evolution equation in a Banach space. J Differential Equations, 1977, 24: 412–425
14 Cao X. Mathematical and numerical analysis for non-equilibrium two phase flow models in porous media. PhD Thesis. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2016
15 Cao X, Nemadjieu S F, Pop I S. Convergence of an MPFA finite volume scheme for a two-phase porous media flow model with dynamic capillarity. IMA J Numer Anal, 2019, 39: 512–544
16 Cao X, Pop I S. Degenerate two-phase porous media flow model with dynamic capillarity. J Differential Equations, 2016, 260: 2418–2456
17 Cao Y, Wang Z Y, Yin J X. A semilinear pseudo-parabolic equation with initial data non-rarefied at ∞. J Funct Anal, 2019, 277: 3737–3756
18 Cao Y, Yin J X. Small perturbation of a semilinear pseudo-parabolic equation. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36: 631–642
19 Cao Y, Yin J X, Wang C P. Cauchy problems of semilinear pseudo-parabolic equations. J Differential Equations, 2009, 246: 4568–4590
20 Chaves-Silva F W, Souza D A. On the controllability of some equations of Sobolev-Galpern type. J Differential Equations, 2020, 268: 1633–1657
21 Chen G W, Xue H X. Global existence of solution of Cauchy problem for nonlinear pseudo-parabolic equation. J Differential Equations, 2008, 245: 2705–2722
22 Chen H, Tian S Y. Initial boundary value problem for a class of semilinear pseudo-parabolic equations with logarithmic nonlinearity. J Differential Equations, 2015, 258: 4424–4442
23 Chen H, Xu H Y. Global existence and blow-up in finite time for a class of finitely degenerate semilinear pseudo-parabolic equations. Acta Math Sin (Engl Ser), 2019, 35: 1143–1162
24 Chen H, Xu H Y. Global existence and blow-up of solutions for infinitely degenerate semilinear pseudo-parabolic equations with logarithmic nonlinearity. Discrete Contin Dyn Syst, 2019, 39: 1185–1203
25 Chen P J, Gurtin M E. On a theory of heat conduction involving two temperatures. Z Angew Math Phys, 1968, 19: 614–627
26 Coleman B D, Duffin R J, Mizel V J. Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip. Arch Ration Mech Anal, 1965, 19: 100–116
27 Coleman B D, Noll W. An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics. Arch Ration Mech Anal, 1960, 6: 355–370
28 Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable. J Differential Equations, 1972, 12: 559–565
29 Colton D. On the analytic theory of pseudoparabolic equations. Q J Math, 1972, 23: 179–192
30 Colton D. Integral operators and the first initial boundary value problem for pseudoparabolic equations with analytic coefficients. J Differential Equations, 1973, 13: 506–522
31 Colton D, Wimp J. Asymptotic behaviour of the fundamental solution to the equation of heat conduction in two temperatures. J Math Anal Appl, 1979, 69: 411–418
32 Cosner C, Rundell W. Uniqueness classes for pseudoparabolic equations with unbounded coefficients. Comm Partial Differential Equations, 1983, 8: 1–20
33 Cuesta C M. Linear stability analysis of travelling waves for a pseudo-parabolic Burgers' equation. Dyn Partial Differ Equ, 2010, 7: 77–105
34 Cuesta C M, Hulshof J. A model problem for groundwater flow with dynamic capillary pressure: Stability of travelling waves. Nonlinear Anal, 2003, 52: 1199–1218
35 Cuesta C M, van Duijn C J, Hulshof J. Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: Travelling waves. European J Appl Math, 2000, 11: 381–397
36 Cuesta C M, van Duijn C J, Pop I S. Non-classical shocks for Buckley-Leverett: Degenerate pseudo-parabolic regularisation. In: Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2004. Mathematics in Industry, 8, European Consortium for Mathematics in Industry (Berlin). Berlin: Springer-Verlag, 2006, 569–573
37 Dai D Q. The Riemann-Hilbert boundary value problem for semilinear pseudoparabolic equations. Nonlinear Anal, 1994, 23: 785–796
38 Dai D Q, Huang Y. On a nonlocal problem for nonlinear pseudoparabolic equations. Nonlinear Anal, 2006, 64: 499–512
39 Dai D Q, Lin W. Piecewise continuous solutions of nonlinear pseudoparabolic equations in two space dimensions.

Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1992, 121: 203–217
40 Dai P, Mu C L, Xu G Y. Blow-up phenomena for a pseudo-parabolic equation with p-Laplacian and logarithmic nonlinearity terms. J Math Anal Appl, 2020, 481: 123439
41 Di H F, Shang Y D. Global well-posedness for a nonlocal semilinear pseudo-parabolic equation with conical degeneration. J Differential Equations, 2020, 269: 4566–4597
42 DiBenedetto E, Pierre M. On the maximum principle for pseudoparabolic equations. Indiana Univ Math J, 1981, 30: 821–854
43 DiCarlo D A. Experimental measurements of saturation overshoot on infiltration. Water Resour Res, 2004, 40: W04215
44 Ding H, Zhou J. Global existence and blow-up for a mixed pseudo-parabolic p-Laplacian type equation with logarithmic nonlinearity. J Math Anal Appl, 2019, 478: 393–420
45 Ding H, Zhou J. Global existence and blow-up for a mixed pseudo-parabolic p-Laplacian type equation with logarithmic nonlinearity-II. Appl Anal, 2021, 100: 2641–2658
46 Düll W P. Some qualitative properties of solutions to a pseudoparabolic equation modeling solvent uptake in polymeric solids. Comm Partial Differential Equations, 2006, 31: 1117–1138
47 Evans L C, Portilheiro M. Irreversibility and hysteresis for a forward-backward diffusion equation. Math Models Methods Appl Sci, 2004, 14: 1599–1620
48 Evans M, Hastings N, Peacock B. Erlang distribution. In: Statistical Distributions, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 2000, 12: 71–73
49 Ewing R E. The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations. SIAM J Math Anal, 1975, 6: 283–294
50 Fu J L, Liu J J. Recovery of a potential coefficient in a pseudoparabolic system from nonlocal observation. Appl Numer Math, 2023, 184: 121–136
51 Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. J Fac Sci Univ Tokyo Sect I, 1966, 13: 109–124
52 Gajewski H, Zacharias K. Zur Regularisierung einer Klasse nichtkorrekter Probleme bei Evolutionsgleichungen. J Math Anal Appl, 1972, 38: 784–789
53 Gal'pern S A. Cauchy problem for general systems of linear partial differential equations. Dokl Akad Nauk SSSR (NS), 1958, 119: 640–643
54 Gal'pern S A. The Cauchy problem for general systems of linear partial differential equations. Trudy Moskov Mat Obšč, 1960, 9: 401–423
55 Giga Y, Umeda N. Blow-up directions at space infinity for solutions of semilinear heat equations. Bol Soc Parana Mat (3), 2005, 23: 9–28
56 Gilding B H, Tesei A. The Riemann problem for a forward-backward parabolic equation. Phys D, 2010, 239: 291–311
57 Gopala Rao V R, Ting T W. Solutions of pseudo-heat equations in the whole space. Arch Ration Mech Anal, 1972, 49: 57–78
58 Gui C F, Wang X F. Life span of solutions of the Cauchy problem for a semilinear heat equation. J Differential Equations, 1995, 115: 166–172
59 Han Y Z. Finite time blowup for a semilinear pseudo-parabolic equation with general nonlinearity. Appl Math Lett, 2020, 99: 105986
60 Hasan A, Aamo O M, Foss B. Boundary control for a class of pseudo-parabolic differential equations. Systems Control Lett, 2013, 62: 63–69
61 Hassanizadeh S M, Gray W G. Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media. Water Resour Res, 1993, 29: 3389–3405
62 Hayakawa K. On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations. Proc Japan Acad Ser A Math Sci, 1973, 49: 503–525
63 Hilfer R, Steinle R. Saturation overshoot and hysteresis for twophase flow in porous media. Eur Phys J Spec Top, 2014, 223: 2323–2338
64 Itkin A. Pricing Derivatives under Lévy Models: Modern Finite-Difference and Pseudo-Differential Operators Approach. New York: Springer, 2017
65 Itkin A, Carr P. Using pseudo-parabolic and fractional equations for option pricing in jump diffusion models. Comput Econ, 2012, 40: 63–104
66 Ji S M, Yin J X, Cao Y. Instability of positive periodic solutions for semilinear pseudo-parabolic equations with logarithmic nonlinearity. J Differential Equations, 2016, 261: 5446–5464
67 Jin L Y, Li L, Fang S M. The global existence and time-decay for the solutions of the fractional pseudo-parabolic

equation. Comput Math Appl, 2017, 73: 2221–2232
68 Kaikina E I, Naumkin P I, Shishmarev I A. On the asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for a nonlinear Sobolev-type equation. Dokl Akad Nauk, 2005, 401: 736–740
69 Kaikina E I, Naumkin P I, Shishmarev I A. The Cauchy problem for an equation of Sobolev type with power non-linearity. Izv Math, 2005, 69: 59–111
70 Kaikina E I, Naumkin P I, Shishmarev I A. Asymptotics for a Sobolev type equation with a critical nonlinearity. Differ Equ, 2007, 43: 673–687
71 Kaikina E I, Naumkin P I, Shishmarev I A. Large-time asymptotic behaviour of solutions of non-linear Sobolev-type equations. Russian Math Surveys, 2009, 64: 399–468
72 Kaikina E I, Naumkin P I, Shishmarev I A. Asymptotic expansion of solutions to the periodic problem for a non-linear Sobolev-type equation. Izv Math, 2013, 77: 313–324
73 Kalaydjian F J-M. Dynamic capillary pressure curve for water/oil displacement in porous media: Theory vs. experiment. In: Proceedings of SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Richardson: Society of Petroleum Engineers, 1992, SPE-24813-MS
74 Kao C Y, Kurganov A, Qu Z L, et al. A fast explicit operator splitting method for modified Buckley-Leverett equations. J Sci Comput, 2015, 64: 837–857
75 Karch G. Asymptotic behaviour of solutions to some pseudoparabolic equations. Math Methods Appl Sci, 1997, 20: 271–289
76 Karpinski S, Pop I S. Analysis of an interior penalty discontinuous Galerkin scheme for two phase flow in porous media with dynamic capillary effects. Numer Math, 2017, 136: 249–286
77 Khomrutai S. Global and blow-up solutions of superlinear pseudoparabolic equations with unbounded coefficient. Nonlinear Anal, 2015, 122: 192–214
78 Khomrutai S. Global well-posedness and grow-up rate of solutions for a sublinear pseudoparabolic equation. J Differential Equations, 2016, 260: 3598–3657
79 Khomrutai S. Weighted L^p estimates and Fujita exponent for a nonlocal equation. Nonlinear Anal, 2019, 184: 321–351
80 King J R, Cuesta C M. Small- and waiting-time behavior of a Darcy flow model with a dynamic pressure saturation relation. SIAM J Appl Math, 2006, 66: 1482–1511
81 King J R, Hulshof J. Analysis of a Darcy flow model with a dynamic pressure saturation relation. SIAM J Appl Math, 1998, 59: 318–346
82 Kobayashi K, Sirao T, Tanaka H. On the growing up problem for semilinear heat equations. J Math Soc Japan, 1977, 29: 407–424
83 Korpusov M O, Sveshnikov A G. Three-dimensional nonlinear evolution equations of pseudoparabolic type in problems of mathematical physics. Comput Math Math Phys, 2003, 43: 1765–1797
84 Korpusov M O, Sveshnikov A G. Blow-up of solutions of nonlinear Sobolev type equations with cubic sources. Differ Equ, 2006, 42: 431–443
85 Kostyuchenko A G, Èskin G I. The Cauchy problem for Sobolev-Gal'pern equations (in Russian). Tr Mosk Mat Obs, 1961, 10: 273–284
86 Lafitte P, Mascia C. Numerical exploration of a forward-backward diffusion equation. Math Models Methods Appl Sci, 2012, 22: 1250004
87 Lattès R, Lions J L. The Method of Quasi-Reversibility: Applications to Partial Differential Equations. Translated from the French edition and edited by Richard Bellman. Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, No. 18. New York: American Elsevier Publishing Co., 1969
88 Lee T Y, Ni W M. Global existence, large time behavior and life span of solutions of a semilinear parabolic Cauchy problem. Trans Amer Math Soc, 1992, 333: 365–378
89 Li X T, Fang Z B. New blow-up criteria for a semilinear pseudo-parabolic equation with general nonlinearity. Math Methods Appl Sci, 2022, 45: 9438–9455
90 Li Z P, Du W J. Cauchy problems of pseudo-parabolic equations with inhomogeneous terms. Z Angew Math Phys, 2015, 66: 3181–3203
91 Lian W, Wang J, Xu R Z. Global existence and blow up of solutions for pseudo-parabolic equation with singular potential. J Differential Equations, 2020, 269: 4914–4959
92 Liao M L, Guo B, Li Q W. Global existence and energy decay estimates for weak solutions to the pseudo-parabolic equation with variable exponents. Math Methods Appl Sci, 2020, 43: 2516–2527
93 Liaskos K B, Pantelous A A, Stratis I G. Linear stochastic degenerate Sobolev equations and applications. Internat J Control, 2015, 88: 2538–2553

94 Liaskos K B, Stratis I G, Pantelous A A. Stochastic degenerate Sobolev equations: Well posedness and exact controllability. Math Methods Appl Sci, 2018, 41: 1025–1032
95 Lin Y Z, Zhou Y F. Solving nonlinear pseudoparabolic equations with nonlocal boundary conditions in reproducing kernel space. Numer Algorithms, 2009, 52: 173–186
96 Liu W J, Yu J Y. A note on blow-up of solution for a class of semilinear pseudo-parabolic equations. J Funct Anal, 2018, 274: 1276–1283
97 Liu W J, Yu J Y, Li G. Global existence, exponential decay and blow-up of solutions for a class of fractional pseudo-parabolic equations with logarithmic nonlinearity. Discrete Contin Dyn Syst Ser S, 2021, 14: 4337–4366
98 Luo P. Blow-up phenomena for a pseudo-parabolic equation. Math Methods Appl Sci, 2015, 38: 2636–2641
99 Mascia C, Terracina A, Tesei A. Two-phase entropy solutions of a forward-backward parabolic equation. Arch Ration Mech Anal, 2009, 194: 887–925
100 Meyvacı M. Bounds for blow-up time in nonlinear pseudo-parabolic equations. Mediterr J Math, 2018, 15: 8
101 Mikelić A. A global existence result for the equations describing unsaturated flow in porous media with dynamic capillary pressure. J Differential Equations, 2010, 248: 1561–1577
102 Mikelić A, Bruining H. Analysis of model equations for stress-enhanced diffusion in coal layers. Part I: Existence of a weak solution. SIAM J Math Anal, 2008, 40: 1671–1691
103 Milišić J P. The unsaturated flow in porous media with dynamic capillary pressure. J Differential Equations, 2018, 264: 5629–5658
104 Mitra K, Köppl T, Pop I S, et al. Fronts in two-phase porous media flow problems: The effects of hysteresis and dynamic capillarity. Stud Appl Math, 2020, 144: 449–492
105 Nguyen H T, Au V V, Xu R Z. Semilinear Caputo time-fractional pseudo-parabolic equations. Commun Pure Appl Anal, 2021, 20: 583–621
106 Nguyen H T, Tuan N A, Yang C. Global well-posedness for fractional Sobolev-Galpern type equations. Discrete Contin Dyn Syst, 2022, 42: 2637–2665
107 Novick-Cohen A, Pego R L. Stable patterns in a viscous diffusion equation. Trans Amer Math Soc, 1991, 324: 331–351
108 Ozawa T, Yamauchi Y. Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with general non-decaying initial data. J Math Anal Appl, 2011, 379: 518–523
109 Padrón V. Sobolev regularization of a nonlinear ill-posed parabolic problem as a model for aggregating populations. Comm Partial Differential Equations, 1998, 23: 457–486
110 Padrón V. Effect of aggregation on population recovery modeled by a forward-backward pseudoparabolic equation. Trans Amer Math Soc, 2004, 356: 2739–2756
111 Plotnikov P I. Passage to the limit with respect to viscosity in an equation with a variable direction of parabolicity. Differ Equ, 1994, 30: 614–622
112 Plotnikov P I. Forward-backward parabolic equations and hysteresis. J Math Sci (NY), 1999, 93: 747–766
113 Qu C Y, Zhou W S. Asymptotic analysis for a pseudo-parabolic equation with nonstandard growth conditions. Appl Anal, 2022, 101: 4701–4720
114 Rezanezhad F, Vogel H J, Roth K. Experimental study of fingered flow through initially dry sand. Hydrol Earth Syst Sci Discuss, 2006, 3: 2595–2620
115 Rundell W. The Stefan problem for a pseudo-heat equation. Indiana Univ Math J, 1978, 27: 739–750
116 Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations. Proc Amer Math Soc, 1979, 76: 253–257
117 Rundell W, Sneddon I N. The solution of initial-boundary value problems for pseudoparabolic partial differential equations. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1976, 74: 311–326
118 Rundell W, Stecher M. Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equations. Proc Amer Math Soc, 1977, 63: 77–81
119 Rundell W, Stecher M. A Runge approximation and unique continuation theorem for pseudoparabolic equations. SIAM J Math Anal, 1978, 9: 1120–1125
120 Rundell W, Stecher M. The nonpositivity of solutions to pseudoparabolic equations. Proc Amer Math Soc, 1979, 75: 251–254
121 Showalter R E. Partial differential equations of Sobolev-Galpern type. Pacific J Math, 1969, 31: 787–793
122 Showalter R E. Local regularity of solutions of Sobolev-Galpern partial differential equations. Pacific J Math, 1970, 34: 781–787
123 Showalter R E. Well-posed problems for a partial differential equation of order $2m+1$. SIAM J Math Anal, 1970, 1: 214–231
124 Showalter R E. Weak solutions of nonlinear evolution equations of Sobolev-Galpern type. J Differential Equations,

1972, 11: 252–265
125 Showalter R E. Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space. SIAM J Math Anal, 1972, 3: 527–543
126 Showalter R E. The final value problem for evolution equations. J Math Anal Appl, 1974, 47: 563–572
127 Showalter R E. The Sobolev equation, I. Appl Anal, 1975, 5: 15–22
128 Showalter R E. The Sobolev equation, II. Appl Anal, 1975, 5: 81–99
129 Showalter R E. Local regularity, boundary values and maximum principles for pseudoparabolic equations. Appl Anal, 1983, 16: 235–241
130 Showalter R E, Ting T W. Pseudoparabolic partial differential equations. SIAM J Math Anal, 1970, 1: 1–26
131 Showalter R E, Ting T W. Asymptotic behavior of solutions of pseudo-parabolic partial differential equations. Ann Mat Pura Appl (4), 1971, 90: 241–258
132 Smarrazzo F, Terracina A. Sobolev approximation for two-phase solutions of forward-backward parabolic problems. Discrete Contin Dyn Syst, 2013, 33: 1657–1697
133 Smarrazzo F, Tesei A. Degenerate regularization of forward-backward parabolic equations: The regularized problem. Arch Ration Mech Anal, 2012, 204: 85–139
134 Smarrazzo F, Tesei A. Degenerate regularization of forward-backward parabolic equations: The vanishing viscosity limit. Math Ann, 2013, 355: 551–584
135 Sobolev S L. On a new problem of mathematical physics. Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat, 1954, 18: 3–50
136 Spayd K. Generalizing the modified Buckley-Leverett equation with TCAT capillary pressure. European J Appl Math, 2018, 29: 338–351
137 Spayd K, Shearer M. The Buckley-Leverett equation with dynamic capillary pressure. SIAM J Appl Math, 2011, 71: 1088–1108
138 Stecher M, Rundell W. Maximum principles for pseudoparabolic partial differential equations. J Math Anal Appl, 1977, 57: 110–118
139 Sunahara Y, Aihara S I, Ishikawa M. On the state estimation for pseudoparabolic systems with stochastic coefficients. IEEE Trans Automat Control, 1985, 30: 306–310
140 Tao Q, Gao H, Yao Z A. Null controllability of a pseudo-parabolic equation with moving control. J Math Anal Appl, 2014, 418: 998–1005
141 Terracina A. Two-phase entropy solutions of forward-backward parabolic problems with unstable phase. Interfaces Free Bound, 2015, 17: 289–315
142 Tesei A. Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations with bounded nonlinearities. J Math Sci (NY), 2018, 235: 536–555
143 Thach T N, Kumar D, Luc N H, et al. Existence and regularity results for stochastic fractional pseudo-parabolic equations driven by white noise. Discrete Contin Dyn Syst Ser S, 2022, 15: 481–499
144 Thach T N, Tuan N H. Stochastic pseudo-parabolic equations with fractional derivative and fractional Brownian motion. Stoch Anal Appl, 2022, 40: 328–351
145 Thanh B L T, Smarrazzo F, Tesei A. Sobolev regularization of a class of forward-backward parabolic equations. J Differential Equations, 2014, 257: 1403–1456
146 Thomas N L, Windle A H. Diffusion mechanics of the system PMMA-methanol. Polymer, 1981, 22: 627–639
147 Thomas N L, Windle A H. A theory of case II diffusion. Polymer, 1982, 23: 529–542
148 Ting T W. Certain non-steady flows of second-order fluids. Arch Ration Mech Anal, 1963, 14: 1–26
149 Ting T W. Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations. J Math Soc Japan, 1969, 21: 440–453
150 Tuan N H, Caraballo T. On initial and terminal value problems for fractional nonclassical diffusion equations. Proc Amer Math Soc, 2021, 149: 143–161
151 van Duijn C J, Fan Y, Peletier L A, et al. Travelling wave solutions for degenerate pseudo-parabolic equations modelling two-phase flow in porous media. Nonlinear Anal Real World Appl, 2013, 14: 1361–1383
152 van Duijn C J, Peletier L A, Pop I S. A new class of entropy solutions of the Buckley-Leverett equation. SIAM J Math Anal, 2007, 39: 507–536
153 Wang W K, Wang Y T. The well-posedness of solution to semilinear pseudo-parabolic equation. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2019, 35: 386–400
154 Wang X C, Xu R Z. Global existence and finite time blowup for a nonlocal semilinear pseudo-parabolic equation. Adv Nonlinear Anal, 2021, 10: 261–288
155 Wang Y. An overview of the modified Buckley-Leverett equation. In: Integral Methods in Science and Engineering. Cham: Birkhäuser, 2015, 657–673
156 Wang Y, Kao C Y. Bounded domain problem for the modified Buckley-Leverett equation. J Dynam Differential

Equations, 2014, 26: 607–629
157 White L W. Control problems governed by a pseudo-parabolic partial differential equation. Trans Amer Math Soc, 1979, 250: 235–246
158 Xie M H, Tan Z, Wu Z. Local existence and uniqueness of weak solutions to fractional pseudo-parabolic equation with singular potential. Appl Math Lett, 2021, 114: 106898
159 Xu R Z, Su J. Global existence and finite time blow-up for a class of semilinear pseudo-parabolic equations. J Funct Anal, 2013, 264: 2732–2763
160 Xu Y, Zhou Z G, Zhao J J. Conforming virtual element methods for Sobolev equations. J Sci Comput, 2022, 93: 32
161 Yamaguchi M, Yamauchi Y. Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with non-decaying initial data. Differential Integral Equations, 2010, 23: 1151–1157
162 Yamauchi Y. Life span of solutions for a semilinear heat equation with initial data having positive limit inferior at infinity. Nonlinear Anal, 2011, 74: 5008–5014
163 Yang C X, Cao Y, Zheng S N. Second critical exponent and life span for pseudo-parabolic equation. J Differential Equations, 2012, 253: 3286–3303
164 Yang J G, Cao Y, Zheng S N. Fujita phenomena in nonlinear pseudo-parabolic system. Sci China Math, 2014, 57: 555–568
165 Yang X, Zhu Q. Existence, uniqueness, and stability of stochastic neutral functional differential equations of Sobolev-type. J Math Phys, 2015, 56: 122701
166 Yuan W S, Ge B. Global well-posedness for pseudo-parabolic p-Laplacian equation with singular potential and logarithmic nonlinearity. J Math Phys, 2022, 63: 061503
167 Zhang H, Zegeling P A. Numerical investigations of two-phase flow with dynamic capillary pressure in porous media via a moving mesh method. J Comput Phys, 2017, 345: 510–527
168 Zhang Q F, Qin Y F, Sun Z Z. Linearly compact scheme for 2D Sobolev equation with Burgers' type nonlinearity. Numer Algorithms, 2022, 91: 1081–1114
169 Zhou J, Xu G Y, Mu C L. Analysis of a pseudo-parabolic equation by potential wells. Ann Mat Pura Appl (4), 2021, 200: 2741–2766
170 Zhu X L, Li F Y, Rong T. Global existence and blow up of solutions to a class of pseudo-parabolic equations with an exponential source. Commun Pure Appl Anal, 2015, 14: 2465–2485

An overview of recent studies on the pseudo-parabolic equation

Yang Cao & Jingxue Yin

Abstract In this paper, we give an overview of the recent developments in the area of pseudo-parabolic equations, including the physical background, and the study from the perspective of viscosity. A significant part of the paper is devoted to the asymptotic behavior of the solutions for semi-linear pseudo-parabolic equations, which is an in-depth research field at present.

Keywords pseudo-parabolic equation, pseudo-parabolic viscosity, asymptotic behavior

MSC(2020) 35K70, 35B40, 35A01

doi: 10.1360/SSM-2023-0057