研究简报

关于 Fuller 范畴的一个注记

郭 善 良

(复旦大学数学研究所，上海 200433)

关键词 M-非奇异模、Fuller 范畴

在本文中环 R 表示有单位元的环，所有模都是右酉模. $\sigma[M_R]$ 是 Mod-R 中含有 M_R 且关于同态像、直和和取子模封闭的最小全子范畴. Gen(M_R) 是 Mod-R 中含有 M_R 且关于同态像和直和封闭的最小全子范畴. 下面这个定义为普通非奇异性的自然拓广.

定义 设 M_R 为一个右 R-模，称 N_R 为 M-非奇异的，如果集合 $\{f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)\mid \ker f\leqslant_e M\}=0$。

引理 设 M_R 为一个右 R-模且满足 $\sigma[M_R]=\mathrm{Gen}(M_R)$，则有下列结论:

(1) $\sigma[M_R]$ 为一个 Grothendieck 范畴.

(2) 函子 $\mathrm{Hom}_R(M,\_)$: $\sigma[M_R]\to \text{Mod-End}(M_R)$ 保持内射包.

(3) M-非奇异模类在取子模、直积和本质扩张下封闭.

证 (1) 由 $\sigma[M_R]$ 定义知 $\sigma[M_R]$ 为一个 AB3 Abel 范畴. 令 $\{N_i\}_{i\in I}$ 为 $N\in\sigma[M_R]$ 的一个子模直接族. 由于 Mod-R 为一个 AB5 Abel 范畴，故 $\varinjlim_{i\in I} N_i=\sum_{i\in I} N_i$ 为 N 的一个子模，而 $\sigma[M_R]$ 关于取子模封闭，所以 $\sum_{i\in I} N_i\in\sigma[M_R]$ 且为 N 的一个子模，应用文献[1] 命题 14.6 知 $\sigma[M_R]$ 为一个 AB5 Abel 范畴. 由于 $\sigma[M_R]=\mathrm{Gen}(M_R)$，故 M_R 为 $\sigma[M_R]$ 的一个生成子，从而 $\sigma[M_R]$ 为一个 Grothendieck 范畴.

(2) 由于 $\sigma[M_R]$ 为一 Grothendieck 范畴，用文献[1]定理 14.11 知对任意 $N\in\sigma[M_R]$，$\sigma[M_R]$ 中有 N 在 $\sigma[M_R]$ 中的内射包 $\hat{N}$. 又由于 $\sigma[M_R]=\mathrm{Gen}(M_R)$，故应用文献 [2]引理 2.1 知 ${}_SM$ 为一个平坦模. 令 $S=\mathrm{End}(M_R)$，以及 $0\to I_S\to S$ 为 Mod-S 中的一个正合序列. 则有 $0\to I\otimes_S M\to M$，而且 $I\otimes_S M\in\sigma[M_R]$，从而有 $\mathrm{Hom}_R(M,\hat{N})\to\mathrm{Hom}_R(I\otimes_S M,\hat{N})\to 0$. 由于函子 $\_\otimes_S M$ 为函子 $\mathrm{Hom}_R(M,\_)$ 的左转置，故有 $\mathrm{Hom}_S(S,\mathrm{Hom}_R(M,\hat{N}))\to\mathrm{Hom}_S(I,\mathrm{Hom}_R(M,\hat{N}))\to 0$，所以 $\mathrm{Hom}_R(M,\hat{N})$ 为 Mod-S 中的内射模. 任取 $0\neq f\in\mathrm{Hom}_R(M,\hat{N})$，则有 $f(M)\cap N\neq 0$. 所以 $f: f^{-1}(N)\to N$ 为一个非零同态. 由于 M_R 为 $\sigma[M_R]$ 的一个生成子，故函子 $\mathrm{Hom}_R(M,\_)$ 忠实，所以有 $g\in\mathrm{Hom}_R(M,f^{-1}(N))\subseteq\mathrm{Hom}_R(M,M)=S$ 使得 $0\neq f\circ g\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$. 即 $\mathrm{Hom}_R(M,\hat{N})_S$ 为 $\mathrm{Hom}_R(M,N)_S$ 的内射包.

(3) M-非奇异模类在取子模和直积下封闭的证明是平凡验证，略去. 令 K 为 N 的一个本质子模，且 K 为一个 M-非奇异模，若有 $0\neq f\in\{g\in\mathrm{Hom}_R(M,N)\mid \ker g\leqslant_e M\}$，则同理

本文 1989 年 10 月 19 日收到.

$f(M)\cap K\neq 0$，所以有 $f:f^{-1}(K)\to K$ 为非零，从而有 $\alpha\in\mathrm{Hom}_R(M, f^{-1}(K))$ 使 $0\neq f\circ\alpha\in\mathrm{Hom}_R(M, K)$. 对任意 $0\neq m\in M$，若 $\alpha(m)\neq 0$，则必有 $0\neq r\in R$ 使 $0\neq\alpha(mr)\in\ker f$. 从而 $f\circ\alpha(mr)=0$，即说明 $\ker f\circ\alpha\leqslant_e M$，但这与$K$为 M-非奇异矛盾，所以 M-非奇异模类关于本质扩张封闭. 证毕.

定理 设 M_R 为一个有限生成的 M-非奇异模，且对于 $\sigma[M_R]$ 中的任意 M-非奇异模N存在集合A使得N为 $M^{(A)}$ 的一个直和项，即有 N' 使 $N\oplus N'\cong M^{(A)}$，则M有有限长度，且 $\sigma[M_R]$ 范畴等价于某个右 Artin 环上的右模范畴.

证 记 $S=\mathrm{End}(M_R)$，首先证明S为一个右非奇异环. 设 $f\in Z_r(S)$，则对任意非零元 $m\in M$，$\mathrm{Hom}_R(M, mR)\cap r_S(f)\neq 0$，取 $g\in\mathrm{Hom}_R(M, mR)\cap r_S(f)$，则 $f\circ g=0$. 而由g的取法知有 $0\neq u\in M$ 使得 $0\neq mr=g(u)$，所以 $f(m)r=0$，说明 $\ker f\leqslant_e M$，但由M为 M-非奇异性知 $f=0$，故S为一个右非奇异环.

由引理及题设知 $\sigma[M_R]=\mathrm{Gen}(M_R)$，所以 $\sigma[M_R]$ 为一个 Grothendieck 范畴. 应用 Gabriel-Popesco 定理[3] 知S上有一个右 Gabriel 拓扑 $\mathfrak{F}$，使得 $\mathrm{Mod}\text{-}(S,\mathfrak{F})$ 和 $\sigma[M_R]$ 在函子 $\mathrm{Hom}_R(M,\_\_)$ 作用下等价. 由于 $\sigma[M_R]$ 为一个 Grothendieck 范畴，所以对任意集合A有 $M^A\in\sigma[M_R]$[3]，由引理知 M^A 为 M-非奇异，故有集合A和模N使得 $M^A\oplus N\cong M^{(A)}$. 由于 M_R 为有限生成，应用文献[1]命题 4.25c 知 $S^A\oplus\mathrm{Hom}_R(M,R)\cong S^{(A)}$，所以 S^A 为一个右 S-射影模，应用 Chase 定理[4]知S为一个右完备环. 令 $\hat{M}$ 为M在 $\sigma[M_R]$ 中的内射包，则$\hat{M}$为 M-非奇异模，故有集合A和模N使得 $\hat{M}\oplus N\cong M^{(A)}$，应用引理知 $E(S)\oplus\mathrm{Hom}_R\cdot(M,N)\cong S^{(A)}$，由于$S$为一个右完备环，故应用文献[5]有$S$中的一个幂等元 e，使得$E(S)$和 eS 等价，即有 $E(S)^{(A)}\cong(eS)^{(B)}$. 其中 A, B 为适当的无限集，且 eS 作为一个直和项出现在 $E(S)$ 中，所以 eS 为S的一个忠实的内射理想，且 $(eS)^A$ 为射影对任意集合. 应用 Colby-Rutter 定理[6]知S为一个半准素环.

由于 $Z_r(S)=0$，故 $E(S)$ 有一个环结构，且 $Q_m(S)=E(S)$. 由于对任意集合 A，$\hat{M}^A$ 为 M-非奇异模，故 $Q_m(S)^A_S$ 为一个右 S-射影模，由于 $Q_m(S)$ 为 $\mathrm{Mod}\text{-}Q_m(S)$ 的生成子，故有集合A使得 $Q_m(S)^{(A)}\xrightarrow{f}Q_m(S)^A\to 0$，由于 $Q_m^A(S)$ 作为 S-模射影，故有 $g\in\mathrm{Hom}_R\cdot(Q_m(S)^A, Q_m(S)^{(A)})$ 使得 $f\circ g=1$，但 $Q_m(S)^{(A)}$ 为一个右 S-非奇异模，故 $g\in\mathrm{Hom}_{Q_m(S)}\cdot(Q_m(S)^A, Q_m^{(A)}(S))$，所以 $Q_m(S)$ 亦为一个右完备环，而 $Q_m(S)$ 又为一个自内射环，且 $Z_r(S)=0$，故 $J(Q_m(S))=Z_r(Q_m(S))=0$. 所以 $Q_m(S)$ 为一个半单 Artin 环. 应用文献[3]定理 XII, 2.5 知：S有有限右 Goldie 维数. 应用题设知S中的所有 $\mathfrak{F}$-闭右理想都是射影模，应用文献[7]命题 8.24 知S中的所有 $\mathfrak{F}$-闭右理想是有限生成的. 由于S为一个半维素环，故S为一个左完备环，根据 Björk 定理[4]知S为一个 $\mathfrak{F}$-Artin 环，故应用范畴的等价性知 M_R 为一个 Artin 模. 再应用 Miller 和 Teply 定理[8]知S为一个 $\mathfrak{F}$-Noether 环，再根据范畴的等价性知 M_R 为一个 Noether 模，所以 M_R 为一个有有限长度的模.

由于S为半准素环，应用文献[3]命题 VIII 的 6.2 知S中存在一个幂等元e使得一个右 S-模L为 $\mathfrak{F}$-torsion 的当且仅当 $L\cdot e=0$. 由此极易验证 $\mathfrak{F}$-torsion class $\mathfrak{F}=\{L\in\mathrm{Mod}\text{-}S\mid\mathrm{Hom}_S(eS, L)=0\}$. 由于$S$为一个 $\mathfrak{F}$-Noether 环，故 eS 为 $\mathrm{Mod}\text{-}(S,\mathfrak{F})$ 中的一个有限生成对象.

若 $L_1\xrightarrow{f}L_2\to 0$ 为 $\mathrm{Mod}\text{-}(S,\mathfrak{F})$ 中的一个正合序列则必有 L_2/inf 为一个 $\mathfrak{F}$-torsion

模. 若 L_2/inf 不是 torsion 模. 则取 $L_3=\mathrm{Im}f$ 为 $\mathrm{Im}f$ 在 L_2 中的 $\mathfrak{F}$-闭子模包,则 L_2/L_3 为 $\mathfrak{F}$-torsionfree 模,取 $L_4=E_{\mathfrak{F}}(L_2/L_3)$, 以及同态 $L_2 \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} L_4$. 其中 $g_2=0$, g_1 为 $L_2\to L_2/L_3$ 的自然满态则有 $0=fg_2=fg_1=0$, 由 f 为满态,可导出 $g_1=g_2=0$, 矛盾, 故 $L_2/\mathrm{Im}f$ 为一个 $\mathfrak{F}$-torsion 模.

令

$$\begin{tikzcd} & eS \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "g"'] & \\ L_1 \arrow[r, "\alpha"] & L_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

在 Mod-$(S,\mathfrak{F})$ 中正合则在 Mod-S 中有 $eS \xrightarrow{\nu\circ f} L_2/\mathrm{Im}\alpha$, 但 $L_2/\mathrm{Im}\alpha$ 为 $\mathfrak{F}$-torsion 模,故 $\nu\circ f=0$, 所以 $\mathrm{Im}f\subseteq\mathrm{Im}\alpha$, 从而有 $g: eS\to L_1$ 使上面交换,即 eS 为 Mod-$(S,\mathfrak{F})$ 中的射影对象.

令 L 为 Mod-$(S,\mathfrak{F})$ 中的任意一个对象,则

$$(eS)^{(\mathrm{Hom}_S(eS,L))} \xrightarrow{\alpha} L \to 0.$$

由于 eS 为一个射影 S-模,故 $\mathrm{Hom}_R(eS, L/\mathrm{im}\alpha)=0$, 亦即上面的序列在 Mod-$(S,\mathfrak{F})$ 中正合,所以 eS 为 Mod-$(S,\mathfrak{F})$ 中的一个有限生成射影生成元. 应用文献 [3] 第十章的例知 Mod-$(S,\mathfrak{F})$ 与 Mod-eSe 范畴等价. 由于 eS 为 Mod-$(S,\mathfrak{F})$ 中的 Artin 对象,故 eSe 为一个 Artin 环,从而 $\sigma[M_R]$ 与某个右 Artin 环上的模范畴等价. 证毕.

推论 设 M_R 为一个右 R-模,则下列条件等价:

(1) M_R 为一个单模.

(2) M_R 满足下列两个条件:

a) M_R 为一个 M-非奇异模,

b) 对 $\sigma[M_R]$ 中任意 M- 非奇异模 N 有集合 A 使得 $N\cong M^{(A)}$.

证 (1)$\Longrightarrow$(2)显然.

(2)$\Longrightarrow$(1). 令 L 为 M 的一个有限生成子模,应用引理知 L 为 M-非奇异,故有集合 A 使得 $L\cong M^{(A)}$, 所以 M_R 为有限生成. 从而应用定理和有 M 及一个单子模 N, 此时必有 $N\cong M$, 所以 M_R 为一个单模. 证毕.

致谢: 作者对 Wisbauer 教授和许永华教授的一贯支持和关心,表示感谢.

参 考 文 献

[1] Faith, C., *Algebra I, Rings Modules and Categories*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[2] Fuller, K. R., *J. Algebra*, 29(1974), 528—550.

[3] Stenstrom, B., *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[4] Faith, C., *Algebra II, Ring Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[5] Anderson, F. W. and Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[6] Colby, R. R. and Rutter, Jr. E. A., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 153(1971), 371—386.

[7] Chatters, A. W. and Hajarnavis, C. R., *Rings with Chain Conditions*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1980.

[8] Albu, T. and Nastasecu, C., *Relative Finiteness in Moduie Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel 1984.