

Fresnel型高阶积分的统一表达式*

黄 炜^{1,2}, 段旭朝²

(1. 宝鸡职业技术学院基础部, 陕西 宝鸡 721013; 2. 宝鸡文理学院物理与光电技术学院, 陕西 宝鸡 721016)

摘要:菲涅尔(Fresnel)衍射积分在物理光学、微波技术与天线等多学科领域有着重要的应用. 本文采用复分析、伽马函数性质、积分变化等方法对Fresnel型高阶积分进行了求解和计算, 证明了一般情况下统一的数学表达式.

关键词:菲涅尔积分; 高阶; 复分析方法; 伽马函数性质; 统一表达式

中图分类号: O172.2

DOI: 10.19789/j.1004-9398.2021.03.002

0 引言

衍射是光波动性的表现, 是光传播的基本规律, 点源照射的衍射较平面光照射的衍射更具一般性, 对光束的传输与变换、光学系统的衍射成像以及光信息处理等方面有着重要作用^[1-3]. 1882年, 基尔霍夫建立了一个严格的数学理论, 证明了菲涅尔的设想基本上正确, 并修正了倾斜因子. 由于基尔霍夫理论只适用于标量波的衍射, 故又称标量衍射理论. 菲涅尔(Fresnel)衍射积分已在多领域应用, 其计算是物理光学、微波技术与天线等工程和道路工程设计与建设的一道难题. 本文旨在利用复分析、伽马函数与积分变换给出的Fresnel型高阶积分 $S(n)$ 、 $C(n)$ 及相关的实积分进行求解和计算, 以期得到统一的表达式, 解决Fresnel衍射积分在不同领域因计算带来的问题.

1 物理与工程中的Fresnel衍射积分

复宗量Fresnel积分的计算, 是物理光学、微波技术与天线等工程和道路工程设计与建设计算中遇到的一个难题.

1.1 物理光学领域^[4-6]

对于单色波, 基尔霍夫从光场的空间标量波动方程 $\nabla^2 E - \frac{1}{v^2} \frac{\delta^2 E}{\delta t} = 0$ 入手, 得到标量亥姆荷兹方程(Helmholtz equation) $\nabla^2 \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0$ 的积分形式

解, 从系统论角度, 格林函数或称点源函数就是脉冲响应函数, 而系统的输入函数是 $U_0(x_0, y_0)$, 实际上是一个球面波被障碍物调制后形成的光场, 输出的是衍射后的光场 $U(x, y)$. 利用格林定理, 采用适当的边界条件, 推导出无限大不透明屏上孔径后面观察点 P 的场分布. 积分面可选取为衍射孔径平面, 对不同位置的子波源, 由于入射波的复振幅不同, 导致不同的源强度和初位相, $U(x, y)$ 就是由 $U_0(x_0, y_0)$ 的Fresnel衍射的光场分布, 得到化简式为

$$U(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U_0(x_0, y_0) \frac{\exp(iKr)}{r} dx_0 dy_0,$$

式中 $U_0(x_0, y_0)$ 是 x_0 和 y_0 的函数, $\frac{\exp(iKr)}{r}$ 分别是 x 、 y 、 x_0 、 y_0 和 z_0 的函数, $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2}$. 此为Fresnel衍射积分公式, 经过再化简、分离变量和参数代换, 导出Fresnel衍射积分的数学公式为

$$U(x) = C \int_0^x \exp\left(-i\frac{\pi}{2} t^2\right) dt,$$

此积分为复宗量Fresnel衍射积分, 利用欧拉公式, 复宗量Fresnel衍射积分可化为

$$U(x) = C \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt -$$

$$iC \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt = C(C(x) - iS(x)),$$

即为Fresnel衍射积分, 由于被积函数是超越函数, 积分解没有解析表达式, 计算成了难点.

1.2 微波技术与天线等工程领域

随着信息时代的到来,作为信息载体的高频电磁波,不仅在卫星通信、计算机通信、信息传输、移动通信和射频识别领域广泛应用,还在有线电视、闭路监控系统、基站、手机天线和蓝牙耳机等器材中广泛使用.随着数字信号处理(digital signal processing, DSP)技术的迅猛发展,DSP器件性能价格比的不断提高,高频电磁波在雷达、声呐及相关军事通信领域获得成功应用.自适应天线技术在蜂窝移动通信系统中的应用是相关领域学者研究的热点问题.

自适应天线是基于 Fresnel 区相位修正结构聚焦的多波束自适应天线.在多波束自适应天线系数的计算等方面,其难点还是高阶的 Fresnel 积分计算,特别是复宗量 Fresnel 积分的计算^[7].如在深海潜标数据实时传输及我国航天测控网建设中的远望 7 号测量船上的关键设备上,以及在 C 频段高功率功放和 S 频段 1+1 高功率功放 100% 国产化等国之利器上的使用,其中采用了无线连接实现实时数据传输及微波天线计算,都需要计算高阶的 Fresnel 积分.

1.3 道路工程设计与建设领域

回旋线,也称为缓和曲线、过渡曲线和卵形回旋曲线,即 Fresnel 螺旋线^[8].在理论上是车辆转弯时的车轮轨迹,从直线到圆弧线、圆弧线到直线、不同半径的圆弧线之间和 2 个圆的同向连接或反向连接等都离不开回旋线.在高速公路、高速铁路、铁路线性、公路线性以及像汽车一样的自动机械设备的线性规划设计中,均离不开回旋曲线的使用,其可以使高速道路更好地适应车辆转弯时转弯轨迹,最大限度地缩小各种曲线的曲率及绕率突变,增大行车安全、乘车舒适感及线性美观度等.

在两段圆弧之间为 G^2 联系设计一段缓和曲线,一段理想的回旋曲线不应包括任何拐点,其弯曲度随弧长变化逐点增加或减少.通常利用计算机辅助设计 CAD 来进行回旋曲线设计,理想的回旋曲线设计是非常复杂而又非常重要的,其难点是 Fresnel 积分定义的一个超越函数值的计算问题,由于计算难度较大,对野外测设要求苛刻.今后 Fresnel 积分都是指 $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ 和 $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ 这 2 个积分.下面给出 Fresnel 型高阶积分的统一表达式.

2 Fresnel 型高阶积分的统一表达式

Fresnel 衍射积分公式为 $\int_0^\infty \sin x^2 dx, \int_0^\infty \cos x^2 dx$.

Fresnel 型高阶积分 $S(n)$ 、 $C(n)$ 公式为

$$S(n) = \int_0^{+\infty} \sin x^n dx, C(n) = \int_0^{+\infty} \cos x^n dx, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^+.$$

显然, Fresnel 型高阶积分是一种广义积分,该函数是广义函数,不能按普通的方法进行求解和计算.但其是不绝对 Lebesgue 可积而 Riemann 可积的典型反例, Fresnel 积分 ($n=2$) 的计算方法较多^[9-13],而 Fresnel 型高阶积分 ($n>2$) 及实积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx (n>2)$ 的计算相对比较少见,也没有统一的结果.从科学研究和工程应用的角度, Fresnel 型高阶积分的计算具有重要的价值,若能给出 Fresnel 积分的统一表达式,可方便解决对包含 Fresnel 积分及各种复杂函数的计算问题,打通复杂计算的瓶颈,建立快速通道.

利用复分析、伽马函数与积分变换给出 Fresnel 型高阶积分 $S(n)$ 和 $C(n)$ 及相关的实积分的求解和计算,得到了统一的表达式,彻底解决这一复杂的计算问题.该计算结果可归结为下述定理:

定理 2.1 设 $S(n) = \int_0^{+\infty} \sin x^n dx, C(n) = \int_0^{+\infty} \cos x^n dx, n > 2, n \in \mathbf{N}^+$, 则

$$S(n) = \int_0^{+\infty} \sin x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma(1/n) \sin \frac{\pi}{2n},$$

$$C(n) = \int_0^{+\infty} \cos x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma(1/n) \cos \frac{\pi}{2n},$$

特别地,当 $n=2$ 时,

$$S(2) = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4},$$

$$C(2) = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

定理 2.2 设 n 为实数,则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^n} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(n) \cos \frac{n\pi}{2}}, (0 < n < 1),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^n} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(n) \sin \frac{n\pi}{2}}, (0 < n < 2),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^n}{x^n} dx = \frac{-1}{(n-1)} \Gamma(1/n) \sin \frac{\pi}{2n}, \left(n > \frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^n}{x^n} dx = \frac{-1}{(n-1)} \Gamma(1/n) \cos \frac{\pi}{2n}, \left(n > \frac{1}{2}\right).$$

定理 2.3 设 $x \geq 2$ 的实数, $n \in \mathbf{N}^+$, 则有

$$\int_0^\infty e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \Gamma(1/n),$$

特别地,当 $n=2$ 时, $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3 几个引理

引理 3.1^[9,14] 对于任意 $s > 0$ 复变量,并记 $\text{Res} = \sigma, \Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$, 则有

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma(-s) = \frac{-\pi}{s \cdot \sin \pi s},$$

$$\Gamma(n+s) \cdot \Gamma(n-s) =$$

$$\frac{\pi s}{\sin \pi s} ((n-1)!)^2 \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{s^2}{k^2}), (n=1, 2, 3, \dots).$$

引理 3.2 (Jordan 引理)^[9,14] 当 $z \rightarrow \infty$ 时, $f(z) \Rightarrow 0 (0 \leq \arg z \leq \pi, \text{即 } \text{Im} z \geq 0)$ (限制条件), 则 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{imz} dz = 0$, (实常数 $m > 0$). C_R 的上半圆示意图如图 1 所示, 其中 C_R 是以 O 为圆心, 半径为 R 的上半圆周, 即 $z = Re^{i\theta} (0 \leq \theta < \pi)$.

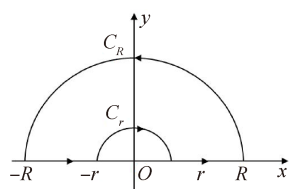


图 1 C_R 的上半圆示意

引理 3.3 (小圆弧引理)^[9,14] 若函数 $f(z)$ 在区域 $D: 0 < |z-a| \leq r, \theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2$ 上连续, 且当 $z(z \in D) \rightarrow a$ 时, $(z-a)f(z)$ 一致地趋于 K , 则 $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = iK(\theta_2 - \theta_1)$, 其中 C_r 是以 a 为圆心, r 为半径, 夹角为 $\theta_2 - \theta_1$ 的圆弧, $|z-a|=r, \theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2$.

4 定理证明

Fresnel 型高阶积分不能按普通的方法进行求解和计算.

4.1 定理 2.1 和 2.2 的证明

用伽马函数的性质及积分变换来计算高阶的 Fresnel 衍射积分为

$$S(n) = \int_0^{\infty} \sin x^n dx, C(n) = \int_0^{\infty} \cos x^n dx.$$

由伽马函数的定义: $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$, 所以有

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-xy} dx \stackrel{t=xy}{=} \frac{1}{y^s} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \frac{1}{y^s} \Gamma(s),$$

$$\text{因此得: } \frac{1}{y^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-xy} dx, \text{故: } \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^s} dx =$$

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \cos x dx \int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-xy} dy.$$

交换积分次序得

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^s} dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} y^{s-1} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} \cos x dx =$$

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{y^s}{1+y^2} dy \stackrel{y^2=l}{=} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{1}{2l^{(1-s)/2}(1+l)} dl,$$

$$\text{因为 } 0 < s < 1, \text{故由积分}^{[7]} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi},$$

($0 < \alpha < 1$) 得

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^s} dx = \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{1}{l^{(1-s)/2}(1+l)} dl = \frac{1}{2\Gamma(s)} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{(1-s)}{2} \pi} = \frac{\pi}{2\Gamma(s) \cos \frac{s\pi}{2}}, \quad (1)$$

同法可得

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^s} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2}}, \quad (2)$$

取 $n=s$ 即可得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^n} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(s) \cos \frac{n\pi}{2}}, (0 < n < 1),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^n} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(s) \sin \frac{n\pi}{2}}, (0 < n < 2).$$

当 $s=1$ 时, $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 就是 Dirichlet 积分;

当 $s \neq 1$ 时, 令 $t=x^s$, 有 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^s}{x^s} dx \stackrel{t=x^s}{=} \frac{1}{s} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{s}-2} \sin t dt$;

当 $0 < 2 - \frac{1}{s} < 2$, 即 $s > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x^s}{x^s} dx = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{s}-2} \sin t dt = \frac{1}{2s\Gamma(2-1/s)} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{(2-1/s)}{2} \pi}; \quad (3)$$

当 $0 < z < 2$ 时, 应用 $\Gamma(s)$ 函数的性质,

$$\Gamma(2-z)\Gamma(2+z) = \frac{\pi z(1-z^2)}{\sin \pi z} \text{ 及 } \Gamma(2+z) = z(1+z)\Gamma(z),$$

可得

$$\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{s}-2} \sin t dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^s}{x^s} dx = \frac{\Gamma(1/s) \cos \frac{\pi}{2s}}{(s-1)},$$

$$\text{亦即 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^s}{x^s} dx = \frac{1}{(s-1)} \Gamma(1/s) \cos \frac{\pi}{2s}, \left(s > \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{类似地,有 } \int_0^{+\infty} \frac{\cos x^s}{x^s} dx = \frac{-1}{(s-1)} \Gamma(1/s) \sin \frac{\pi}{2s}, \left(s > \frac{1}{2}\right).$$

取 $n = s$ 即可得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^n}{x^n} dx = \frac{-1}{(n-1)} \Gamma(1/n) \sin \frac{\pi}{2n}, \left(n > \frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^n}{x^n} dx = \frac{1}{(n-1)} \Gamma(1/n) \cos \frac{\pi}{2n}, \left(n > \frac{1}{2}\right).$$

计算高阶的 Fresnel 积分为

$$\int_0^{\infty} \sin x^s dx, \int_0^{\infty} \cos x^s dx, s > 1.$$

令 $t = x^s$, 当 $0 < z < 2$ 时, 应用 $\Gamma(s)$ 函数的性质,

$$\Gamma(1-z)\Gamma(1+z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z} \text{ 及 } \Gamma(1+z) = z\Gamma(z), \text{ 及}$$

式(3)有

$$\int_0^{\infty} \sin x^s dx \stackrel{t=x^s}{=} \frac{1}{s} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{s}-1} \sin t dt = \frac{1}{2s\Gamma(1-1/s)} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{(1-1/s)\pi}{2}} = \frac{1}{s} \Gamma(1/s) \sin \frac{\pi}{2s}, \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} \cos x^s dx \stackrel{t=x^s}{=} \frac{1}{s} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{s}-1} \cos t dt = \frac{1}{2s\Gamma(1-1/s)} \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{(1-1/s)\pi}{2}} = \frac{1}{s} \Gamma(1/s) \cos \frac{\pi}{2s}, s > 1, \quad (5)$$

取 $n = s$ 即可得到

$$S(n) = \int_0^{\infty} \sin x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma(1/n) \sin \frac{\pi}{2n},$$

$$C(n) = \int_0^{\infty} \cos x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma(1/n) \cos \frac{\pi}{2n},$$

特别地, 当 $n = 2$ 时,

$$S(2) = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, C(2) = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

4.2 定理 2.3 证明

$$S(n) = \int_0^{\infty} \sin x^n dx, C(n) = \int_0^{\infty} \cos x^n dx,$$

$$\text{设 } z = Re^{i\theta} \Rightarrow z^n = R^n e^{in\theta} = R^n \cos n\theta + iR^n \sin n\theta.$$

又设 $f(z) = e^{iz^n}$, 不能取上半圆周, 因为在 $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ 内(左上半部分), 当 $R \rightarrow \infty$ 时,

$$|e^{iz^n}| = |e^{-R^n \sin n\theta} e^{iR^n \cos n\theta}| = e^{R^n |\sin n\theta|} \rightarrow \infty,$$

不能得到 $\int_{C_R} f(z) dz = 0$. 因此, 尝试 C_R 的扇形示意如图 2.

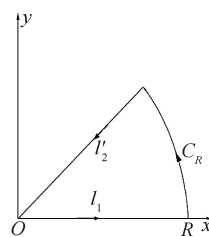


图 2 C_R 的扇形示意

所示的积分路径, 即 $l_1: z = x, l'_2: z = re^{i\frac{\pi}{2n}}, C_R: z = Re^{i\theta}, \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2n}\right)$, 有

$$0 = \oint_{C_R} e^{iz^n} dz = \left[\int_{l_1} + \int_{C_R} + \int_{l'_2} \right] e^{iz^n} dz.$$

当取极限 $R \rightarrow \infty$ 时, 由 Jordan 引理

$$|e^{iz^n}| = |e^{-R^n \sin n\theta} e^{iR^n \cos n\theta}| = e^{-R^n \sin n\theta} \rightarrow 0, \int_{C_R} e^{iz^n} dz = 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

因为在 l_1 上 $z = x$, 则有

$$\int_{l_1} e^{iz^n} dz = \int_0^{\infty} \cos x^n dx + i \int_0^{\infty} \sin x^n dx = C(n) + iS(n).$$

又因为 $l'_2: z = re^{i\frac{\pi}{2n}}$, 所以,

$$\int_{l'_2} e^{iz^n} dz = \int_{\infty}^0 e^{i(re^{i\pi/2n})^n} d(re^{i\pi/2n}) = -e^{i\pi/2n} \int_0^{\infty} e^{-r^n} dr.$$

因此

$$(C(n) + iS(n)) = e^{i\pi/2n} \int_0^{\infty} e^{-r^n} dr. \quad (6)$$

再由式(4~5)有

$$(C(n) + iS(n)) = \int_0^{\infty} (\cos x^n + i \sin x^n) dx =$$

$$\frac{1}{n} \Gamma(1/n) \cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{1}{n} \Gamma(1/n) \sin \frac{\pi}{2n} =$$

$$\frac{1}{n} \Gamma(1/n) \left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{1}{n} \Gamma(1/n) e^{i\pi/2n}.$$

$$\text{得: } \int_0^{\infty} e^{-r^n} dr = \frac{1}{n} \Gamma(1/n),$$

$$\text{特别地, 当 } n = 2 \text{ 时, } \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5 结束语

本文总结了 Fresnel 衍射积分在物理光学、微波技术与天线等工程和道路工程设计与建设计算中所表现的难题形式. 并利用复分析、伽马函数与积

分变换给出的 Fresnel 型高阶积分 $S(n)$ 、 $C(n)$ 及相关的实积分进行求解和计算,得到了统一的表达式

并进行了证明,彻底解决了其在不同领域因计算带来的问题.

参 考 文 献

- [1] 钟文体. Fresnel 积分的再推广[J]. 大学数学, 2016, 32(2): 77-81.
- [2] 邢家省, 杨小远. 菲涅尔积分的积分计算方法[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2016, 29(3): 85-92.
- [3] 邢家省, 杨小远. 广义菲涅尔积分的积分交换次序计算方法[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2016, 29(3): 85-92.
- [4] 徐芳雅. 新型菲涅尔光学天线设计[D]. 成都: 电子科技大学, 2018.
- [5] 许翼雁. 菲涅耳衍射的计算机模拟研究[J]. 现代显示, 2012(11): 38-43.
- [6] 李俊昌. 激光的衍射及热作用计算[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [7] 王新稳. 微波技术与天线[M]. 4 版. 北京: 电子工业出版社, 2001.
- [8] 于文化, 乔培海, 崔香萍, 等. 回旋线曲线在道路建设中的应用[J]. 黑龙江水专学报, 2000, 27(1): 66-67.
- [9] 梁昌洪. 复变函数札记[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [10] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 3 版. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- [11] 埃伯哈德·蔡德勒. 数学指南: 实用数学手册[M]. 3 版. 李文林, 译. 北京: 科学出版社, 2012.
- [12] 姚端正, 梁家宝. 数学物理方法[M]. 2 版. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.
- [13] 张元林. 积分变换[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [14] 《实用积分表》编委会. 实用积分表[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006.

The expression of the higher order Fresnel integration

HUANG Wei^{1,2}, DUAN Xuchao²

(1. Department of Basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji Shaanxi 721013; 2. Institute of Physics and Optoelectronics Technology, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji Shaanxi 721016)

Abstract: Fresnel integration is widely used in the fields of physical optics, microwave technology and antennas. In this paper, by using the methods of complex analysis, properties of the gamma function and integral change, the unified express of the higher order Fresnel integration in the general case is proved with the help of complex analysis method.

Keywords: Fresnel integration; higher order; complex analysis method; properties of gamma function; the unified express

(责任编辑: 马田田)