中国科学: 数学 2025 年 第 55 卷 第 ? 期: 1 ∼ 19
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

多元正则变换结构下条件混合矩的渐近行为

杨洋[1], 张科亚[2], 张志民[3*]

1. 南京审计大学数学学院, 南京 211815;
2. 南京审计大学统计与数据科学学院, 南京 211815;
3. 重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331

E-mail: yangyangmath@163.com, zhangkeya@stu.nau.edu.cn, zmzhang@cqu.edu.cn

收稿日期: 2025-03-23; 接受日期: 2025-09-15; 网络出版日期: 2025-XX-XX; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12471448, 12271066 和 12171405)、国家社会科学基金 (批准号: 22BTJ060)、江苏省自然科学基金 (BK20251889)、江苏省高等学校基础科学 (自然科学) 研究重大项目 (批准号: 23KJA110002)、江苏省研究生科研与实践创新计划 (批准号: KYCX25_2454) 和重庆市自然科学基金创新发展联合基金 (批准号: CSTB2024NSCQ-LZX0085) 资助项目

摘要 考虑一个金融或保险系统, 其由易受投资失败和市场冲击的多个个体组成. 在该系统中, 实际投资损失变量均可表示为投资活动产生的潜在损失与外部冲击触发的宏观经济因素之积. 为量化单个或多个个体在系统危机中对整个系统的风险贡献, 本文提出了一类基于系统极端尾风险的条件混合矩, 其提供了一个整体的框架, 用于度量包含单一个体的条件高阶矩和多个体间的条件相关矩等多种风险测度. 在潜在损失变量服从多元正则变换结构下, 本文研究了条件混合矩的渐近行为, 强调了潜在损失变量的重尾程度及其相依结构在系统危机时期的重要作用. 同时, 本文进一步通过数值模拟研究验证了所得渐近公式的精确性. 最后, 基于两种不同的准则, 本文综合分析了理论结果在资本分配中的应用.

关键词 条件混合矩 累积实际投资损失 多元正则变换 渐近分析 资本分配

MSC (2020) 主题分类 60E05, 62P05, 62E20

1 引言

考虑一个由多个体组成的金融或保险系统, 其中, 个体可以具体表示为子投资组合、资产、实体或业务线等. 注意到系统中的个体易受投资失败和市场冲击的影响, 因此存在实际投资损失的风险. 这些风险的累积对社会和经济安全至关重要, 且与投资和市场紧密相关. 2008-2009 年全球金融危机提供了一个典型的案例. 2007 年初, 危机悄然渗入美国次贷市场, 随后逐渐升级. 2008 年年中, 其引发了股票市场的崩溃, 并且在同年 9 月导致了雷曼兄弟 (Lehman Brothers) 的彻底破产和美国国际集团 (American International Group) 的濒临倒闭. 这两起事件不仅标志着全球金融危机的彻底爆发, 而且对整个经济和社会结构产生了巨大冲击. 反之, 极端危机的市场环境也会致使几乎各类资产的价格均

英文引用格式: Yang Y, Zhang K Y, Zhang Z M. An asymptotic study of conditional mixed moments under multivariate regular variation (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1–19, doi: 10.1360/SSM-2024-XXXX

© 2024《中国科学》杂志社

急剧下跌. 这表明未经系统研究的累积风险可能会导致威胁经济稳定的全面危机, 因此, 密切监管累积风险至关重要. 相关的理论和实践研究, 可以参见文献 [4].

根据当前审慎的监管框架 (如 Basel III 和 Solvency II), 系统或企业需持有充足的偿付能力资本. 在此框架下, 针对大规模累积风险的渐近行为研究具有重要意义. 在银行业中, 国际清算银行 (Bank for International Settlements) 要求一年持有期的经济资本需达到 99.99% 的置信水平.1) 保险业的监管框架与之类似. Solvency II 也充分考虑了极端或特殊事件, 其中, 该协议指令 2009/138/EC 的第 105 条概述了计算基本偿付能力资本的准则.2) 这些严格的监管制度本质上均要求充分研究分析尾部风险. 同时, 尾部风险也是投资组合理论研究的关键问题之一.3) 学者们提出了各种基于尾部的风险测度, 用于探究金融机构或保险公司间风险的相互影响. 在银行和金融领域, 文献 [2] 引入了两个概念: 条件在险价值量 (conditional value at risk, CoVaR) 和 ΔCoVaR, 从分位数的角度捕捉特定个体对整体系统性风险的边际贡献. 根据 Acharya 等 [1] 的观点, 现行的监管准则和众多常见的标准风险测度均无法捕捉极端事件引发的系统性风险. 他们定义了两种系统性风险测度: 边际预期短缺 (marginal expected shortfall, MES) 和系统性预期短缺 (systemic expected shortfall, SES), 用于衡量当系统陷入危机时特定个体的风险. 近来, [9] 采用渐近的方法进一步量化了风险测度 MES 和 SES; 更多的相关讨论参见 [13, 27]. 在保险领域, 类似的系统性风险研究包括 [3, 15, 30].

与 MES 和 SES 测度不同, 文献 [28] 提出了一类渐近的方法以研究两种新的风险测度: 条件高阶矩和条件高阶中心矩, 用于计算系统危机时个体风险的条件方差、条件偏度和条件峰度等; 近期的研究成果参见 [17, 44]. 值得注意的是, 上述结果均未涉及系统面临危机时多个体内部的相互关联程度指标, 例如两个个体的条件协方差、条件协偏度和条件协峰度, 后两者参见 [12]. 然而, 以银行系统为例, 在系统危机时期, 银行个体间的关联程度指标可能对系统性风险的度量具有重要作用, 并且该指标的大小在一定程度上也能反映传染效应的强弱.4) 这是因为危机事件往往通过多种关联机制放大银行的系统性风险和传染风险. 例如, 各银行类似的资产投资组合可能因抛售和去杠杆化而面临估值被压低的系统性风险, 另外, 通过衍生品和贷款交织的资产负债表则可能引发连锁违约效应, 参见 [37] 及相关文献. 因此, 本文基于系统的极端尾风险, 构建了一类条件混合矩风险测度. 在系统危机时期, 我们的研究提供了一个整体的框架, 不仅用于度量单一个体的条件高阶矩, 还可以用于估计多个体间的条件关联程度指标. 本研究也契合了当前的监管体制改革, 以及全球金融危机和新冠冲击后风险资产内部的高度相关性.5)

大部分关于风险测度渐近行为研究的共同之处在于, 个体间的相依性通常被描述为某种特定的渐近独立结构. 近来, 文献 [29] 假设个体风险之间满足 Chen 和 Yuen [11] 提出的两两渐近独立相依结构, 并且得到了两个及以上个体风险的条件混合矩的粗略渐近结果. 然而, 该结果并未刻画条件混合矩的精确增长速度. 我们认为, 系统中的所有个体风险均暴露于共同的宏观经济环境中, 因此, 这些风险之间可能高度相互作用, 并呈现出共同处于极端水平的情形. 此外, 作为累积风险的额外驱动力, 冲击引发的宏观经济因素进一步加剧了个体间的相依关系, 也应该被充分考虑. 仍以银行系统为例, 波及整个银行系统的市场冲击会沿着潜在的业务渠道传播, 导致银行间流动性的枯竭, 进而使所有银行更容易

1) 参见国际清算银行 2023/24 年度报告, https://www.bis.org/about/areport/areport2024.pdf.

2) 参见 2024 年的最新版本, https://eur-lex.europa.eu/eli/dir/2009/138/2024-01-09.

3) 文献 [25] 研究了尾部风险在资产市场中的影响, 并表明尾部风险对整体市场收益具有很强的预测能力. [16] 通过实证研究验证了企业社会责任与下行股权尾部风险间具有显著关联性.

4) IMF [22] 指出 "Higher correlations tend to reduce portfolio diversification opportunities and could therefore increase contagion risk and propagate losses across investor portfolios during abrupt price corrections."

5) IMF [22] 表明, 在新冠冲击期间, 风险资产内部的相关程度指标甚至已经超过全球金融危机时期的水平.

受到内生波动的影响. 例如, 某大型银行的意外倒闭可能会促使市场参与者重新评估其他银行, 而这种对所有银行普遍丧失信心的反应, 可能会影响到整个银行系统. 最近的案例包括 2023 年 3 月全球市场对瑞士信贷银行倒闭事件的反应. 保险市场的情况也类似. 在非寿险领域, 气候灾害会直接推高保险市场的系统性风险, 参见 [43]. 在农作物保险方面, 恶劣的天气条件不仅给保险公司带来巨额且无法分散的农作物损失理赔, 还会导致这些公司高度相关, 相关讨论参见 [34].

本文采用多元正则变化结构建模所有个体的潜在损失变量, 以此刻画重尾潜在损失变量之间全范围的尾部相依特征. 同时, 我们还充分考虑了由冲击引发且具有任意相依结构的宏观经济因素. 本文旨在探讨当系统累积实际损失处于极端水平时, 潜在损失变量间的尾部相依结构及宏观经济因素对条件混合矩的影响. 与文献 [29] 的研究发现相比, 我们的结果给出了条件混合矩的精确渐近速度, 并揭示了潜在损失变量间的强关联结构能够显著增大该速度. 另外, 我们的研究部分涵盖了 [29] 所讨论的情况. 作为应用, 在节 5 中, 我们利用条件混合矩的渐近结果, 估计单个体的条件高阶矩、两个体的条件协方差和条件协偏度等风险测度, 进而研究个体的资本分配问题. 此外, 条件混合矩还可以应用于信用风险管理领域. 在此框架下, 条件混合矩可以刻画累积信用违约损失处于极端水平时, 不同资产的违约损失之间的关联程度.

本文的剩余部分组织如下. 节 2 介绍了在静态单期模型中的条件混合矩. 节 3 概述了多元正则变换结构及其性质. 节 4 阐述了本文的主要结果并且进行了数值模拟研究. 节 5 将条件混合矩的渐近结果应用于两种准则下的资本分配问题, 包括基于预期短缺测度的 Euler 准则和尾部均值 - 方差准则. 最后, 节 6 给出了若干引理和主要结果的证明.

2 条件混合矩

考虑一个静态单期投资组合模型, 其中, 系统由 d 个个体组成, 并且个体的实际损失为 $Z_1,\dots,Z_d$, 则系统的累积实际投资损失可以表示为

$$S=\sum_{k=1}^{d} Z_k.$$

为定量分析由冲击引发的宏观经济因素对系统极端损失的作用, 本文将采用更为精细的框架建模所有实际损失变量. 具体地, 对于 $k=1,\dots,d$, 我们将实际损失变量分解为

$$Z_k=\theta_k X_k, \tag{2.1}$$

其中, X_k 表示个体 k 在终端时间的潜在损失变量; θ_k 表示该时期内对应的宏观经济因素, 用于量化冲击的影响程度. 通常情况下, 宏观经济因素 $\theta_1,\dots,\theta_d$ 在 0 处非退化且允许任意相依, 但独立于潜在损失变量 $X_1,\dots,X_d$. 在该结构下, 累积实际投资损失可以重新表述为

$$S=\sum_{k=1}^{d} \theta_k X_k. \tag{2.2}$$

在具体解释中, 如果 X_k 表示第 k 支债券的潜在损失估计, θ_k 表示利率波动导致的宏观经济因素, 则 (2.2) 中 S 可以视为投资组合对利率波动的总风险敞口. 在信用投资组合模型中, 如果基于历史数据估计银行贷款在经济衰退期的潜在损失, 并且将宏观经济因素视为经济衰退的概率, 则 S 可以用于度量银行的累积期望损失值.

下面两个案例进一步给出了式 (2.2) 在保险和风险管理领域的应用, 更多的解释参见 [9]. 首先, 考虑一个离散时保险风险模型. 在每个时期 $k \in \mathbb{N}$ 内, 保险风险量化为保险公司的净损失 X_k, 其等于该时期内总理赔额加上成本费用再减去保费收入; 金融风险量化为随机现值因子 Y_k, 其等于同期内投资总收益计算的随机累积因子的倒数. 令 $\theta_k = \prod_{i=1}^{k} Y_i$, 则 S 表示前 d 个时期累积保险净损失的随机现值, 其可以用于研究破产概率和相关风险测度; 相关讨论参见 [41]. 其次, 在信用风险管理中, 考虑包含 d 个可违约资产的投资组合, 其中 X_k 表示第 k 个资产违约时的损失, 其等于违约损失百分比乘以风险敞口; Y_k 表示量化信用质量的潜变量 (如果 Y_k 超过高阈值 y_k, 则第 k 个资产违约). 记 $\theta_k = 1_{(Y_k > y_k)}$, 其中 1_A 表示集合 A 的示性函数, 则 (2.2) 中 S 表示整个投资组合因违约造成的累积损失. 关于信用投资组合累积违约损失的渐近行为研究, 参见文献 [8, 38, 40].

在 (2.1) 的框架下, 回顾 Chen 和 Liu [9] 提出的 MES 风险测度. 对于高阈值 $t > 0$ 和个体 $k = 1, \ldots, d$, 系统的 MES 测度定义为

$$\mathrm{MES}_k(t) = \mathrm{E}[\theta_k X_k | S > t]. \tag{2.3}$$

该测度量化了在系统性风险处于极端水平时个体 k 的风险贡献. 在金融系统性风险研究领域, MES 已成为当前研究者关注的重要风险测度之一. 关于其在 $t \to \infty$ 时的渐近行为, 文献 [21] 在多元正态个体损失的条件下, 得到了一个基础性研究成果. 进一步地, [9] 考虑了重尾且两两强拟渐近独立的个体潜在损失变量, 建立了 MES 测度的显式渐近公式. [6] 则从统计学的视角研究了 MES 的渐近行为. 他们利用尾部相依系数建模渐近独立结构, 并证明了构建的 MES 估计量的渐近正态性. 与 (2.3) 类似的 SES 风险测度的相关研究参见文献 [9].

一般地, Li [28] 引入了一类条件高阶矩 (conditional higher-order moment, CHM) 风险测度

$$\mathrm{CHM}_k^{(n)}(t) = \mathrm{E}[(\theta_k X_k)^n | S > t], \tag{2.4}$$

其中, 个体 $k = 1, \ldots, d$, $n \in \mathbb{N}$ 表示条件高阶矩的阶数. 易见 $\mathrm{CHM}_k^{(1)}(t)$ 和 $\mathrm{CHM}_k^{(2)}(t) - \left(\mathrm{CHM}_k^{(1)}(t)\right)^2$ 分别表示个体 k 的 MES 和条件方差. 类似地, 式 (2.4) 也可以用于研究条件偏度和条件峰度. 注意到条件高阶矩度量了系统危机时单一个体的风险贡献. 为了探究多个体间的相互作用程度指标, 我们采用文献 [29] 的方式, 推广了条件高阶矩 (2.4) 的概念, 定义条件混合矩 (conditional mixed moment, CMM) 为

$$\mathrm{CMM}^{(\boldsymbol{n})}(t) = \mathrm{E}\left[\prod_{k=1}^{d} (\theta_k X_k)^{n_k} \middle| S > t\right], \tag{2.5}$$

其中, 条件混合矩的阶向量 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d)^\top$ 是非负整值向量, 并且记 $n = \sum_{k=1}^{d} n_k$. 值得注意的是, 条件高阶矩可以表示为 $\mathrm{CHM}_k^{(n)}(t) = \mathrm{CMM}^{(n\mathbf{1}_k)}(t)$, 其中, $\mathbf{1}_k$ 表示第 k 个分量为 1、其余分量均为 0 的 d 维向量. 进一步地, 式 (2.5) 还可以捕捉系统性危机时期多个体间的相互关联程度. 例如, 对于 $i \neq j = 1, \ldots, d$, 个体 i 与个体 j 的条件协方差可以表示为

$$\mathrm{Cov}(\theta_i X_i, \theta_j X_j | S > t) = \mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_i + \mathbf{1}_j)}(t) - \mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_i)}(t) \cdot \mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_j)}(t). \tag{2.6}$$

式 (2.5) 也适用于计算多个体的条件协偏度和条件协峰度, 相关的概念可以参见文献 [12]. 关于条件混合矩渐近行为的研究, [29] 考虑了两两渐近独立的损失变量, 并且在 $n_1, \ldots, n_d$ 中至少存在两个正值的条件下, 建立了粗略渐近关系 $\mathrm{CMM}^{(\boldsymbol{n})}(t) = o(1)t^n$, $t \to \infty$, 其中 $o(1)$ 表示高阶无穷小量. 该结果仅给

出了条件混合矩的渐近上界. 不同于 [29], 本文考虑潜在损失变量 $X_1,\ldots,X_d$ 服从多元正则变换结构. 在大部分情况下, 多元正则变换结构刻画了一类渐近相依结构, 其反映了个体间的强关联性. 此时, 我们推断, 对于充分大的 t 值, $\mathrm{CMM}^{(\boldsymbol{n})}(t)$ 可以由幂函数精确近似. 同时, 我们的结果涵盖了某些特殊的渐近独立情况, 这与文献 [29] 建立的结果一致. 在该情况下, 应用本文结果对条件高阶矩渐近行为的估计也部分包含了 [28] 的结果.

3 多元正则变换结构

首先介绍主要的符号约定. 若无特殊说明, 本文所有的极限关系均在阈值 $t\to\infty$ 或置信水平 $q\uparrow 1$ 下成立. 对于两个正函数 f 和 g, 记 $f\sim g$, 如果 $\lim f/g=1$; 记 $f=o(1)g$, 如果 $\lim f/g=0$. 对任意的 $x\in\mathbb{R}=[-\infty,\infty]$, $x^+=\max\{x,0\}$ 和 $x^-=-\min\{x,0\}$ 分别表示 x 的正部和负部. 1_A 表示集合 A 的示性函数. 记 $\mathbf{1}=(1,\ldots,1)^\top$, $\mathbf{1}_i$ 表示第 i 个分量为 1 且其余分量均为 0 的 d 维向量. 记 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 表示向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_d)^\top$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_d)^\top$ 的 Hadamard 积, 即 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(x_1y_1,\ldots,x_dy_d)^\top$. 对于分布为 V 的一般风险变量 ξ, 定义其置信水平 $q\in(0,1)$ 的在险价值量 (value at risk, VaR) 和预期短缺 (expected shortfall, ES) 分别为

$$\mathrm{VaR}_q(\xi)=V^{\leftarrow}(q)=\inf\{t\in\mathbb{R}:V(t)\geqslant q\}\quad 和\quad \mathrm{ES}_q(\xi)=\frac{1}{1-q}\int_q^1\mathrm{VaR}_p(\xi)dp.$$

对于支撑为 $\mathbb{R}$ 的分布 V, 记其尾分布为 $\overline{V}(t)=1-V(t)$. 称分布为 V 的实值随机变量 ξ 服从一元正则变换 (univariate regular variation) 结构, 记作 $\xi\in\mathrm{RV}_{-\alpha}$ 或 $\overline{V}\in\mathrm{RV}_{-\alpha}$, 其中, $\alpha\geqslant 0$ 表示正则指数, 如果对所有的 $t\in\mathbb{R}$ 有 $\overline{V}(t)>0$, 并且对任意的 $y>0$ 有

$$\overline{V}(yt)\sim y^{-\alpha}\overline{V}(t). \tag{3.1}$$

专著 [5] 中定理 1.5.6 给出了著名的 Potter 定理: 若 $\overline{V}\in\mathrm{RV}_{-\alpha}$, $\alpha\geqslant 0$, 则对任意充分小的 $0<\epsilon<1$, 存在充分大的 $t_0>0$, 使得对所有的 $t>t_0$ 和所有的 $yt>t_0$ 有

$$(1-\epsilon)\min\left\{y^{-(\alpha-\epsilon)},y^{-(\alpha+\epsilon)}\right\}\leqslant\frac{\overline{V}(yt)}{\overline{V}(t)}\leqslant(1+\epsilon)\max\left\{y^{-(\alpha-\epsilon)},y^{-(\alpha+\epsilon)}\right\}. \tag{3.2}$$

值得注意的是, 具有正则变换结构的随机变量表现出重尾的特征, 即其右尾的衰减速度比任意指数尾分布都慢, 例如 Pareto 尾分布、t 尾分布和 log-gamma 尾分布. 正则变换结构常用于建模金融和保险领域内的显著价格波动和严重损失. 正则变换的专著参见 [5,35].

作为一元正则变换的自然拓展, 多元正则变换结构将单变量的重尾特征与多变量间灵活的上尾相依性相结合, 因而构成了建模多元损失变量或多元风险变量的重要工具. 称实值随机向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_d)^\top$ 服从多元正则变换 (multivariate regular variation, MRV) 结构, 如果存在参考尾分布 $\overline{V}$ 和定义在 $[-\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{\infty}]\backslash\{\mathbf{0}\}$ 上的非退化极限测度 μ, 使得对于任意远离 $\mathbf{0}$ 且 μ- 连续的 Borel 集 $B\subset[-\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{\infty}]$ 有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{P}(\boldsymbol{\xi}\in tB)}{\overline{V}(t)}=\mu(B). \tag{3.3}$$

易见, $\overline{V}$ 服从一元正则变换. 因此存在某个 $\alpha>0$ 使得 $\overline{V}\in\mathrm{RV}_{-\alpha}$, 此时, 记 $\boldsymbol{\xi}\in\mathrm{MRV}_{-\alpha}(\overline{V},\mu)$. 注意到式 (3.3) 中的极限测度 μ 具有齐次性, 即对任意的 $s>0$ 和任意远离 $\mathbf{0}$ 的 Borel 集 B, 有

$$\mu(sB)=s^{-\alpha}\mu(B). \tag{3.4}$$

进一步地, 若 $\mu((\mathbf{1},\boldsymbol{\infty}])>0$, 则 $\boldsymbol{\xi}$ 呈现出显著的联合尾部变化特征, 因此 MRV 结构常用于建模受共同市场环境影响的多元损失变量. 在此条件下, 对于 $k=1,\ldots,d$, 第 k 个边缘尾分布 $\overline{V_k}$ 与 $\overline{V}$ 渐近成比例, 即

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{V_k}(t)}{\overline{V}(t)}=\mu\big(\mathbb{R}^{k-1}\times(1,\infty]\times\mathbb{R}^{d-k}\big)>0,$$

其表明 $\overline{V_k}\in\mathrm{RV}_{-\alpha}$. 由 (3.3) 可知, 极限测度 μ 包含了 $\boldsymbol{\xi}$ 的上尾相依信息, 并且涵盖了 $\boldsymbol{\xi}$ 从尾独立到不同程度的尾相依, 直至完全尾相依的所有情况. 更多关于 MRV 的性质参见专著 [36].

自 de Haan 和 Resnick [14] 提出 MRV 的概念以来, 其已经广泛应用于金融、保险和风险管理等领域, 特别是涉及极端风险的领域. 例如, 文献 [41] 采用条件二元正则变换结构建模每对保险风险和金融风险; [8,38] 利用 MRV 结构建模信用风险; [26] 则将其应用于操作风险管理. 其它领域内的相关应用参见文献 [23,31].

4 主要结果和数值模拟

首先, 在潜在损失变量服从 MRV 结构的条件下, 本文将建立条件混合矩 $\mathrm{CMM}^{(\boldsymbol{n})}(t)$ 的精确渐近公式. 其次, 我们将通过比较条件混合矩的模拟值和渐近值, 验证所得渐近公式的精确性, 并且对条件混合矩的关键参数进行敏感性分析.

4.1 主要结果

定理4.1 假设实值潜在损失向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_d)^\top\in\mathrm{MRV}_{-\alpha}(\overline{F},\nu)$, 其中, $\alpha>0$ 为正则指数, $\overline{F}$ 为参考尾分布, ν 为极限测度; 非负宏观经济因素向量 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_d)^\top$ 的所有分量在 0 处非退化且任意相依, 并且 $\boldsymbol{\theta}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 独立. 对 $k=1,\ldots,d$, 若 $\nu((\mathbf{1}_k,\boldsymbol{\infty}])>0$, X_k 的分布 F_k 满足 $F_k(-t)=o(1)\overline{F_k}(t)$, 并且存在某个 $\delta>0$ 使得 $\mathrm{E}[\theta_k^{\alpha+\delta}]<\infty$, 则对任意满足 $1\leqslant n=\sum_{k=1}^d n_k<\alpha$ 的阶向量 $\boldsymbol{n}=(n_1,\ldots,n_d)^\top$, 我们有

$$\mathrm{CMM}^{(\boldsymbol{n})}(t)\sim\frac{t^n}{\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0)}\left(\int_{(0,1)}\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B(y;\boldsymbol{n}))dy+\frac{n\nu(B(\boldsymbol{n}))}{\alpha-n}\mathrm{E}\left[\prod_{k=1}^d\theta_k^{\frac{n_k}{n}\alpha}\right]\right),\tag{4.1}$$

其中, 三个集合分别定义为

$$\begin{cases}B_0=\Big\{\boldsymbol{x}\in[\mathbf{0},\boldsymbol{\infty}]:\sum_{k=1}^d x_k>1\Big\},\\ B(\boldsymbol{n})=\Big\{\boldsymbol{x}\in[\mathbf{0},\boldsymbol{\infty}]:\prod_{k=1}^d x_k^{n_k}>1\Big\},\\ B(y;\boldsymbol{n})=\Big\{\boldsymbol{x}\in[\mathbf{0},\boldsymbol{\infty}]:\prod_{k=1}^d x_k^{n_k}>y,\sum_{k=1}^d x_k>1\Big\},\end{cases}\tag{4.2}$$

极限测度 $\nu_{\boldsymbol{\theta}}$ 定义为: 对远离 $\mathbf{0}$ 的 Borel 集 $B\subset[-\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{\infty}]$,

$$\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B)=\mathrm{E}\big[\nu(\{\boldsymbol{x}\in[-\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{\infty}]:\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}\in B\})\big].$$

注4.1 定理 4.1 允许测度 ν 只集中在坐标轴上, 该情况意味着 $X_1,\ldots,X_d$ 是两两渐近独立的. 此时, 如果 $n_1,\ldots,n_d$ 中至少有两个正值, 则 (4.1) 可以简化为 $\mathrm{CMM}^{(\boldsymbol{n})}(t)=o(1)t^n$. 进而, 当 $\theta_1=\cdots=\theta_d=1$ 时, 我们的结果与文献 [29] 的推论 4.1(a) 一致.

注4.2 在定理 4.1 的条件下, 若进一步假设 $\nu((\mathbf{1},\boldsymbol{\infty}])>0$ (此时, $\boldsymbol{X}$ 的所有分量渐近相依), 则式 (4.1) 表明 $\mathrm{CMM}^{(\boldsymbol{n})}(t)$ 可以近似为 n 阶幂函数, 并且潜在损失变量的重尾程度及其相依性和宏观经济因素的信息均包含在系数中. 对比注 4.1, 我们注意到潜在损失变量的相依结构对条件混合矩有着显著的影响. 在后续的节 4.2 中, 我们将通过数值模拟研究进一步直观地显示该影响.

在应用中, 通常选取高阈值 t 为累积实际损失在高置信水平 $q\in(0,1)$ 下的分位数, 即 $t=\mathrm{VaR}_q(S)=F_S^{\leftarrow}(q)$, 其中 F_S 为累积实际损失 S 的分布函数. 此时, 下面的推论重述了定理 4.1.

推论4.1 在定理 4.1 的条件下, 当 $q\uparrow 1$ 时, 我们有

$$\mathrm{CMM}^{(\boldsymbol{n})}(F_S^{\leftarrow}(q))\sim\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0)^{\frac{n}{\alpha}-1}(F^{\leftarrow}(q))^n\left(\int_{(0,1)}\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B(y;\boldsymbol{n}))dy+\frac{n\nu(B(\boldsymbol{n}))}{\alpha-n}\mathrm{E}\left[\prod_{k=1}^d\theta_k^{\frac{n_k}{n}\alpha}\right]\right). \tag{4.3}$$

事实上, 根据引理 6.1 和专著 [35] 的命题 0.8(vi), 我们有, 当 $q\uparrow 1$ 时, $F_S^{\leftarrow}(q)\sim(\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0))^{\frac{1}{\alpha}}F^{\leftarrow}(q)$. 再结合 (4.1) 可以得到 (4.3).

通过直接计算 (4.3), 我们可以建立条件高阶矩的渐近公式.

推论4.2 在定理 4.1 的条件下, 对于 $k=1,\ldots,d$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{CHM}_k^{(n)}(F_S^{\leftarrow}(q))&=\mathrm{CMM}^{(n\mathbf{1}_k)}(F_S^{\leftarrow}(q))\\&\sim\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0)^{\frac{n}{\alpha}-1}(F^{\leftarrow}(q))^n\left(\int_{(0,1)}\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B(y;n\mathbf{1}_k))dy+\frac{n\mathrm{E}[\theta_k^\alpha]\nu((\mathbf{1}_k,\boldsymbol{\infty}])}{\alpha-n}\right).\end{aligned}$$

最后一个推论考虑了两个个体的条件协方差.

推论4.3 在定理 4.1 的条件下, 对于 $i,j=1,\ldots,d$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\theta_iX_i,\theta_jX_j|S>F_S^{\leftarrow}(q))&\sim\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0)^{\frac{2}{\alpha}-1}(F^{\leftarrow}(q))^2\\&\quad\times\left(\int_{(0,1)}\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B(y;\mathbf{1}_i+\mathbf{1}_j))dy+\frac{2\nu(B(\mathbf{1}_i+\mathbf{1}_j))}{\alpha-2}\mathrm{E}\big[(\theta_i\theta_j)^{\frac{\alpha}{2}}\big]\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0)}\prod_{k=i,j}\left(\int_{(0,1)}\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B(y;\mathbf{1}_k))dy+\frac{\mathrm{E}[\theta_k^\alpha]\nu((\mathbf{1}_k,\boldsymbol{\infty}])}{\alpha-1}\right)\right).\end{aligned}$$

容易验证, 由式 (2.6) 和推论 4.1, 4.2 可以直接得到推论 4.3.

4.2 数值模拟

在金融、保险和银行领域, 通常使用 Copula 函数建模损失变量的相依结构. 本节首先介绍两种 Copula 函数, 其分别刻画损失变量间的上尾强关联性和上尾弱关联性. Copula 的系统研究参见专著 [33]. Gumbel copula 函数具有如下形式

$$C_{\mathrm{Gu}}(\boldsymbol{u};\rho)=\exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^d(-\ln u_i)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}\right\},\quad \boldsymbol{u}\in(0,1)^d, \tag{4.4}$$

其中 $\rho\geqslant 1$ 表示相依参数. 可以验证, Gumbel copula 的上尾相依系数为 $2-2^{\frac{1}{\rho}}$, 因此 ρ 的值越大, 边缘分量的尾部相依性越强. 特别地, 当 $\rho=1$ 时, 边缘分量相互独立. Clayton copula 函数具有如下形式

$$C_{\mathrm{Cl}}(\boldsymbol{u};\varrho)=\left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\varrho}-d+1\right)^{-\frac{1}{\varrho}},\quad \boldsymbol{u}\in[0,1]^d, \tag{4.5}$$

其参数为 $\varrho > 0$. 与 Gumbel copula 不同的是, Clayton copula 的上尾相依系数为 0, 这表明边缘分量是上尾渐近独立的.

为了验证式 (4.3) 的精确性, 并且根据推论 4.1 对条件混合矩 $\mathrm{CMM}^{(\boldsymbol{n})}(F_S^{\leftarrow}(q))$ 进行敏感性分析, 我们给出以下基本假设, 其将用于本文的剩余部分.

• 对于 $k = 1, \ldots, d$, 假设潜在损失变量 X_k 服从广义 Pareto 分布

$$F_k(t) = \big(1 - (a_k t + b)^{-\alpha}\big) 1_{\left(t \geqslant \frac{1-b}{a_k}\right)}, \tag{4.6}$$

其中参数 $a_k > 0$, $b \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha > 0$. 假设由参数为 $\rho_{\boldsymbol{X}} \geqslant 1$ 的 Gumbel copula 函数 (4.4) 建模 $\boldsymbol{X}$ 内部的相依结构.

• 假设宏观经济因素 $\boldsymbol{\theta}$ 的边缘分量服从相同的指数分布

$$F_{\boldsymbol{\theta}}(t) = \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\big) 1_{(t \geqslant 0)}, \tag{4.7}$$

其中参数 $\lambda > 0$. 本文采用两种不同的 Copula 函数建模 $\boldsymbol{\theta}$ 内部的相依结构, 即参数为 $\rho_{\boldsymbol{\theta}} \geqslant 1$ 的 Gumbel copula 函数 (4.4) 和参数为 $\varrho_{\boldsymbol{\theta}} > 0$ 的 Clayton copula 函数 (4.5).

当 Gumbel copula 参数 $\rho_{\boldsymbol{X}} = 1$ 时, $\boldsymbol{X}$ 的各分量相互独立, 进而 $\boldsymbol{X}$ 显然服从 MRV 结构. 接下来, 我们验证当 $\rho_{\boldsymbol{X}} > 1$ 时, 满足上述假设的 $\boldsymbol{X}$ 依然服从 MRV 结构. 由 (4.6) 知, 对于 $k = 1, \ldots, d$ 有

$$F_k(-t) = o(1)\overline{F_k}(t), \quad \overline{F_k}(t) \sim \left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{\alpha} \overline{F_1}(t) \quad \text{和} \quad \overline{F_k} \in \mathrm{RV}_{-\alpha}. \tag{4.8}$$

进一步地, 如果 $\rho_{\boldsymbol{X}} > 1$, 我们可以得到 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{MRV}_{-\alpha}(\overline{F_1}, \nu)$, 其中 ν 集中在 $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\infty}] \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ 上, 并且定义如下:

$$\nu([\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]^c) = \left(\sum_{k=1}^{d} \left(\frac{a_1}{a_k t_k}\right)^{\alpha \rho_{\boldsymbol{X}}}\right)^{\frac{1}{\rho_{\boldsymbol{X}}}}, \quad \boldsymbol{t} > \boldsymbol{0}.$$

事实上, 对任意远离 $\boldsymbol{0}$ 的 Borel 集 $B \subset [-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{\infty}]$ 和任意的 $t > 0$, 我们有

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in tB) = \mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in t(B \cap [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\infty}])) + \mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in t(B \cap [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\infty}]^c)). \tag{4.9}$$

由 Borel 集 B 远离 $\boldsymbol{0}$ 知, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $B \subset (-\varepsilon_0 \boldsymbol{1}, \varepsilon_0 \boldsymbol{1})^c$. 进而, 可以得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in t(B \cap [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\infty}]^c)) &\leqslant \mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in t((-\varepsilon_0 \boldsymbol{1}, \varepsilon_0 \boldsymbol{1})^c \cap [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\infty}]^c)) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{d} (|X_i| \geqslant \varepsilon_0 t), \bigcup_{j=1}^{d} (X_j < 0)\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \mathrm{P}(X_i \leqslant -\varepsilon_0 t, X_j < 0) + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \mathrm{P}(X_i \geqslant \varepsilon_0 t, X_j < 0) \\
&\leqslant d\left(\sum_{i=1}^{d} \mathrm{P}(X_i \leqslant -\varepsilon_0 t)\right) + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1, j \neq i}^{d} \mathrm{P}(X_i \geqslant \varepsilon_0 t, X_j < 0).
\end{aligned}$$

注意到, 当 t 足够大时, 由 $\boldsymbol{X}$ 的边际分布满足 (4.6) 知 $\sum_{i=1}^{d} \mathrm{P}(X_i \leqslant -\varepsilon_0 t) = 0$. 对于 $i \neq j = 1, \ldots, d$, 我们有

$$\mathrm{P}(X_i \geqslant \varepsilon_0 t, X_j < 0) = \mathrm{P}(X_j < 0) - \mathrm{P}(X_j < 0, X_i < \varepsilon_0 t) = o(1)\overline{F_1}(t),$$

其中, 最后一步成立是根据 $\boldsymbol{X}$ 的具体结构, 计算得到, 此时, X 具有广义 Pareto 边际分布 (4.6), 并且服从 Gumbel copula (4.4), 参数 $\rho_{\boldsymbol{X}} > 1$. 因此, 我们有 $\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in t(B \cap [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\infty}]^c)) = o(1)\overline{F_1}(t)$. 最后, 将文献 [42] 的引理 5.2 应用于 (4.9) 右侧的第一个概率, 可以得到 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{MRV}_{-\alpha}(\overline{F_1}, \nu)$.

表 1 总结了模型设置和参数设定.

表 1 模型设置和参数设定.

关于潜在损失 $\boldsymbol{X}$:
$\boldsymbol{X}$ 的边缘分量服从广义 Pareto 分布 (4.6), 其中 $\alpha = 4.1$, $b = 1.1$, $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.11$, $a_3 = 0.12$;
$\boldsymbol{X}$ 内部的相依结构由参数为 $\rho_{\boldsymbol{X}} = 1.2$ 或 1 的 Gumbel copula 函数 (4.4) 建模.
关于宏观经济因素 $\boldsymbol{\theta}$:
$\boldsymbol{\theta}$ 的边缘分量服从相同的指数分布 (4.7), 其中 $\lambda = 1.5$;
$\boldsymbol{\theta}$ 内部的相依结构由参数为 $\rho_{\boldsymbol{\theta}} = 1.2$ 的 Gumbel copula 函数 (4.4) 建模, 或者由参数为 $\varrho_{\boldsymbol{\theta}} = 0.5$ 的 Clayton copula 函数 (4.5) 建模.
个体数量 $d = 3$;
条件混合矩的阶向量 $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_2 = (1, 1, 0)^\top$.

本文采用 Monte Carlo 方法模拟条件混合矩 $\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q))$. 我们选取样本量 $N = 10^8$, 并且令 $\boldsymbol{X}^{(i)} = \left(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, X_3^{(i)}\right)^\top$ 和 $\boldsymbol{\theta}^{(i)} = \left(\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}, \theta_3^{(i)}\right)^\top$, $i = 1, \ldots, N$, 分别为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的独立复制. 用 $S^{(1:N)} \leqslant \cdots \leqslant S^{(N:N)}$ 表示 $S^{(i)} = \sum_{k=1}^3 \theta_k^{(i)} X_k^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$ 的次序统计量, 则 $F_S^{\leftarrow}(q)$ 的经验估计量为 $\widehat{F_S^{\leftarrow}}(q) = S^{(\lfloor Nq \rfloor:N)}$, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数. 对于接近 1 的置信水平 q, $\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q))$ 的模拟值为

$$\widehat{\mathrm{CMM}}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q)) = \frac{\sum_{i=1}^N \theta_1^{(i)} X_1^{(i)} \theta_2^{(i)} X_2^{(i)} 1_{\left(S^{(i)} > S^{(\lfloor Nq \rfloor:N)}\right)}}{\sum_{i=1}^N 1_{\left(S^{(i)} > S^{(\lfloor Nq \rfloor:N)}\right)}}.$$

根据推论 4.1, $\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q))$ 的渐近值需要计算式 (4.3) 右侧的三个测度 $\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0)$、$\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B(y; \mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_2))$ 和 $\nu(B(\mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_2))$. 在实际处理高维积分 (尤其是六维及以上积分) 时, 积分估计的精确性会显著下降. 因此, 我们采用专著 [36] 中节 9.2 的方法计算 (4.3) 中的三个测度. 回顾参考分布 F_1, 并根据样本量 N 选择合适的 K, 使得 K 和 N 均充分大, 则对任意的 Borel 集合 B, $\nu(B)$ 和 $\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B)$ 的估计量分别为

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^N \epsilon_{\frac{\boldsymbol{X}^{(i)}}{F_1^{\leftarrow}(1-K/N)}}(B) \qquad \text{和} \qquad \frac{1}{K} \sum_{i=1}^N \epsilon_{\frac{\boldsymbol{\theta}^{(i)} \cdot \boldsymbol{X}^{(i)}}{F_1^{\leftarrow}(1-K/N)}}(B), \tag{4.10}$$

其中 ϵ 是 Dirac 测度. 通过 Stărică 图, 我们选择 $K = 10^4$, 关于 Stărică 图的更多细节参见文献 [39].

图 1(a) 绘制了 $\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q))$ 的模拟值和由式 (4.3) 得到的渐近值, 并且图 1(b) 作出了模拟值和对应渐近值的比值, 其中置信水平 q 以步长 0.0001 从 0.998 增至 0.9999. Gumbel copula 参数 $\rho_{\boldsymbol{X}} = 1.2$ 对应 $\boldsymbol{X}$ 的所有分量是上尾渐近相依的情形, 而 $\rho_{\boldsymbol{X}} = 1$ 对应独立的情形; 类似地, Gumbel copula 参数 $\rho_{\boldsymbol{\theta}} = 1.2$ 表明 $\boldsymbol{\theta}$ 的所有分量是上尾渐近相依的, 而 Clayton copula 参数 $\varrho_{\boldsymbol{\theta}} = 0.5$ 表明 $\boldsymbol{\theta}$ 的所有分量是上尾渐近独立的. 在各类情形中, $\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q))$ 的渐近值与其对应的模拟值均极

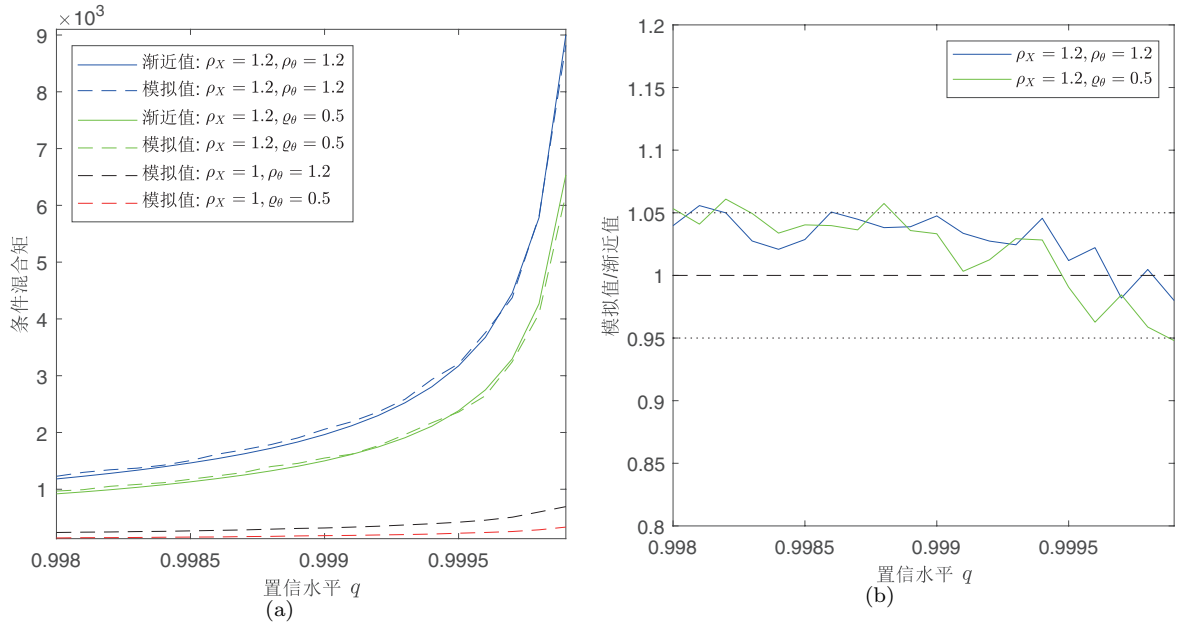

图 1　$\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q))$ 的模拟值和渐近值 (a) 及其比值 (b).

为接近. 值得注意的是, 图 1(a) 显示, 在潜在损失变量渐近相依的情形下, $\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q))$ 的值显著高于独立的情形. 这强调了潜在损失变量的相依性是决定条件混合矩大小的额外驱动因素. 同时, 研究发现, 宏观经济因素的相依结构也会影响条件混合矩, 但与潜在损失变量的相依结构相比, 其影响相对较弱.

本节的最后利用条件混合矩的渐近值对关键的模型参数进行敏感性测试. 该测试主要探究多种因素对条件混合矩的影响机制, 包括潜在损失变量的重尾程度及其相依结构和宏观经济因素的相关参数. 表 2 归纳了 $\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q))$ 相对于关键模型参数的百分比变化情况, 其中, 关键参数包括了与 $\boldsymbol{X}$ 相关的正则变换指数 α 和 Gumbel copula 参数 $\rho_{\boldsymbol{X}}$, 以及与 $\boldsymbol{\theta}$ 相关的指数参数 λ 和 Gumbel copula 参数 $\rho_{\boldsymbol{\theta}}$.

如表 2 所示, $\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q))$ 关于 α (或 λ) 单调递减. 这是因为 α (或 λ) 的值越小, 所有潜在损失变量 (或宏观经济因素) 的尾部越重. 因此, 当系统处于危机时, 条件混合矩越大. 相比之下, $\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q))$ 关于 $\rho_{\boldsymbol{X}}$ (或 $\rho_{\boldsymbol{\theta}}$) 单调递增, 这表明随着潜在损失变量 (或宏观经济因素) 的相依性增强, 系统性危机时期的尾部混合风险也会随之上升. 注意到, 表 2 表明, 相对于宏观经济因素的参数, 条件混合矩对潜在损失变量的参数更为敏感. 进一步地, 我们发现, 潜在损失变量的重尾程度对条件混合矩具有最为关键的作用, 而它们的相依性次重要.

5　资本分配中的应用

作为系统的基础性工具, 资本分配能够使系统的投资组合绩效最大化, 并且使所有个体的累积风险最小化. 作为主要结果的应用, 本节关注如何将资本合理地分配给个体. 广泛使用的分配准则其一是基于某种特定风险测度的 Euler 准则, 常用的风险测度包括标准差、VaR 和 ES. 该准则依据单个个体的风险贡献来分配风险资本, 同时能为绩效评估提供正确的信号. 此外, 如果特定的风险测度是一致的, 则该准则也是一致的, 参见文献 [24]. 专著 [32] 的节 8.5.3 从风险调整后资本回报率衡量的投资组

表 2　$\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_2)}(F_S^{\leftarrow}(q))$ 中关键模型参数的敏感性分析.

模型参数		渐近估计值		
		$q=0.999$	$q=0.9995$	$q=0.9999$
	$+5\%$	-18.51%	-19.10%	-21.02%
	$+3\%$	-12.18%	-12.66%	-13.14%
α 的变化 (%)	$(\alpha=4.1)$	(1963.54)	(3172.53)	(9000.06)
	-3%	$+14.11\%$	$+15.16\%$	$+17.36\%$
	-5%	$+24.40\%$	$+26.11\%$	$+28.50\%$
	$+5\%$	$+13.94\%$	$+14.39\%$	$+16.32\%$
	$+3\%$	$+8.54\%$	$+9.10\%$	$+10.86\%$
$\rho_{\boldsymbol{X}}$ 的变化 (%)	$(\rho_{\boldsymbol{X}}=1.2)$	(1963.54)	(3172.53)	(9000.06)
	-3%	-10.69%	-10.70%	-11.65%
	-5%	-17.46%	-17.96%	-18.53%
	$+5\%$	-9.74%	-9.59%	-9.17%
	$+3\%$	-5.50%	-5.18%	-4.52%
λ 的变化 (%)	$(\lambda=1)$	(1963.54)	(3172.53)	(9000.06)
	-3%	$+6.50\%$	$+7.24\%$	$+8.01\%$
	-5%	$+11.07\%$	$+11.01\%$	$+11.91\%$
	$+5\%$	$+8.05\%$	$+8.85\%$	$+9.31\%$
	$+3\%$	$+3.99\%$	$+4.47\%$	$+5.26\%$
$\rho_{\boldsymbol{\theta}}$ 的变化 (%)	$(\rho_{\boldsymbol{\theta}}=1.2)$	(1963.54)	(3172.53)	(9000.06)
	-3%	-4.83%	-4.36%	-4.27%
	-5%	-8.55%	-8.65%	-8.82%

合绩效最大化的角度，对一致的资本分配准则进行了阐释. Euler 资本分配准则的最新研究, 参见 [9].

另一种分配准则是基于各种损失函数的最小化. 例如, 文献 [19] 使用尾方差风险测度最小化损失函数, 而 [45] 研究了尾部均值 - 方差 (tail mean-variance, TMV) 测度. 近来, [7] 考虑了平衡短缺风险和盈余风险的一般损失函数. 更多的资本分配准则, 参见 [20] 及相关文献.

本节将推论 4.1–4.3 应用于两种方案下的资本分配问题. 具体地, 我们采用两种资本分配准则: Kalkbrener [24] 提出的基于 ES 测度的 Euler 资本分配准则, 以及 Xu 和 Mao [45] 提出的 TMV 资本分配准则. 在这两种准则下, 我们将综合考虑潜在损失的尾部信息及其相依性, 计算分配给所有个体资本的渐近值. 此外, TMV 方法还考虑了波动性这一重要因素, 使决策者能够调整波动性的权重.

5.1 基于 ES 测度的 Euler 资本分配准则

考虑系统采用基于 ES 测度的 Euler 准则作为偿付能力资本要求和资本分配的基础. 在该准则下, 系统根据个体的风险贡献来分配资本. 假设系统将资本 $C_k(q)$ 分配给个体 k, 其中 $q \in (0,1)$ 是一个较高的水平, 且总分配资本 $C(q)$ 满足 $C(q) = \sum_{k=1}^{d} C_k(q)$. 回顾在 (2.2) 中定义的 $S = \sum_{k=1}^{d} \theta_k X_k$. 对于水平 $q \in (0,1)$, 根据文献 [24] 的节 5.2 , 基于 ES 测度的 Euler 准则将

$$C_k(q) = \frac{\overline{F_S}\big(F_S^{\leftarrow}(q)\big)}{1-q}\mathrm{E}\big[\theta_k X_k | S > F_S^{\leftarrow}(q)\big] + \frac{F_S\big(F_S^{\leftarrow}(q)\big) - q}{1-q}\mathrm{E}\big[\theta_k X_k | S = F_S^{\leftarrow}(q)\big] \tag{5.1}$$

分配给第 k 个个体, $k = 1, \ldots, d$. 根据式 (5.1) 和专著 [32] 的命题 8.13, 总分配资本 $C(q)$ 等于 $\mathrm{ES}_q(S) = \frac{1}{1-q}\int_q^1 \mathrm{VaR}_p(S)dp$.

在基于 ES 测度的 Euler 准则下, 分配资本的渐近结果表述如下.

命题5.1 在定理 4.1 的条件和基于 ES 测度的 Euler 资本分配准则下, 对个体 $k = 1, \ldots, d$, 当 $q \uparrow 1$ 时, 我们有

$$C_k(q) \sim (\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0))^{\frac{1}{\alpha}-1} F^{\leftarrow}(q)\bigg(\int_{(0,1)} \nu_{\boldsymbol{\theta}}(B(y;\mathbf{1}_k))dy + \frac{\mathrm{E}[\theta_k^{\alpha}]\nu((\mathbf{1}_k,\boldsymbol{\infty}])}{\alpha-1}\bigg). \tag{5.2}$$

Chen 和 Liu [10] 研究了一类基于高阶矩风险测度的资本分配准则. 该文献中, 当矩的阶数为 1 时, 其研究的资本分配准则即为本文的基于 ES 测度的 Euler 准则. 在此情况下, 本文建立的资本分配渐近公式 (5.2) 与文献 [10] 的定理 2.1(ii) 是一致的. 然而, 文献 [10] 要求 S 在 $F_S^{\leftarrow}(q)$ 处无质量 (参见该文献的式 (2.5)), 即分配的个体资本只含有式 (5.1) 右侧的第一项. 因此, [10] 中的定理 2.1(ii) 无法直接推导出我们的结果, 因为命题 5.1 的假设条件更为一般.

基于命题 5.1 和 Stărică 方法 (4.10), 我们计算得到各个体分配的资本. 模型设置和参数设定见表 1, 其中仅考虑 $\rho_{\boldsymbol{X}} = \rho_{\boldsymbol{\theta}} = 1.2$ 的情形. 表 3 给出了分配资本的渐近值, 其记为 $\widehat{C}_k^{\mathrm{ES}}(q)$, $k = 1, 2, 3$. 在同一置信水平 q 下, 观察到 $\widehat{C}_1^{\mathrm{ES}}(q) > \widehat{C}_2^{\mathrm{ES}}(q) > \widehat{C}_3^{\mathrm{ES}}(q)$. 这是因为 $a_1 < a_2 < a_3$, 从而个体 1 的潜在损失变量尾部最重. 因此, 它对系统贡献了最大的风险量. 此外, 对于同一个体, 随着置信水平的增加, 分配的资本大幅增加. 因此, 在审慎的监管框架内和系统危机时期, 所有个体应准备更多的资本.

表 3 基于 ES 测度的 Euler 准则下分配资本的渐近值.

q	$\widehat{C}_1^{\mathrm{ES}}(q)$	$\widehat{C}_2^{\mathrm{ES}}(q)$	$\widehat{C}_3^{\mathrm{ES}}(q)$
0.999	52.11	44.81	39.19
0.9995	66.33	57.02	49.82
0.9999	111.66	96.30	84.37

5.2 TMV 资本分配准则

考虑系统采用 TMV 准则分配资本, 其目标是最小化所有个体面临的总风险. 该准则基于最小化损失函数

$$\begin{cases} \min\limits_{(C_1(q),\ldots,C_d(q))^\top\in\mathbb{R}^d} \Big\{\mathrm{E}\Big[\sum_{k=1}^d(\theta_kX_k-C_k(q))^2\big|S>F_S^{\leftarrow}(q)\Big] \\ \qquad\qquad +\beta\mathrm{Var}\Big(\sum_{k=1}^d(\theta_kX_k-C_k(q))^2\big|S>F_S^{\leftarrow}(q)\Big)\Big\}, \\ \text{s.t. } C_1(q)+\cdots+C_d(q)=C(q), \end{cases} \tag{5.3}$$

其中, β 为正常数, 用于控制风险波动性的权重.

为了得到 (5.3) 的最优分配解, 我们引入若干关键量. 对于水平 $q\in(0,1)$, 在 $S>F_S^{\leftarrow}(q)$ 的条件下, 随机向量 $\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{X}=(\theta_1X_1,\ldots,\theta_dX_d)^\top$ 的条件协方差矩阵记作 $\boldsymbol{\Sigma}_d(q)=(\sigma_{i,j}(q))_{d\times d}$, 其中,

$$\sigma_{i,j}(q)=\mathrm{Cov}(\theta_iX_i,\theta_jX_j|S>F_S^{\leftarrow}(q)).$$

我们记 d 维矩阵

$$\mathbf{A}_d(q)=8\beta\boldsymbol{\Sigma}_d(q)+2\mathbf{I}_d,$$

其中 $\mathbf{I}_d$ 是 d 维单位矩阵. 由于 $\boldsymbol{\Sigma}_d(q)$ 是半正定的, $\mathbf{I}_d$ 是正定的, 所以 $\mathbf{A}_d(q)$ 是可逆的, 记其逆矩阵为 $\mathbf{A}_d^{-1}(q)=(a_{i,j}^{\mathrm{inv}})_{d\times d}$. 对于 $i,j=1,\ldots,d$, 在 $S>F_S^{\leftarrow}(q)$ 的条件下, θ_iX_i 与 $(\theta_jX_j)^2$ 的条件协方差表示为

$$\sigma_{i,j^2}(q)=\mathrm{Cov}(\theta_iX_i,(\theta_jX_j)^2|S>F_S^{\leftarrow}(q)),$$

并且记

$$\tau_i(q)=4\beta\sum_{j=1}^d\sigma_{i,j^2}(q)+2\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_i)}(F_S^{\leftarrow}(q)).$$

文献 [45] 的定理 2.2 提供了在 TMV 准则下最优资本分配的显式解. 我们略微推广了该结果, 使其适用于实值向量 $\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{X}$.

命题5.2 在 TMV 资本分配准则下, 假设 $\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{X}$ 为实值随机向量, 并且式 (5.3) 的最优资本分配解为 $\boldsymbol{C}^*(q)=(C_1^*(q),\ldots,C_d^*(q))^\top$, 则对任意的 $k=1,\ldots,d$, 我们有

$$C_k^*(q)=\frac{C(q)-\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d a_{i,j}^{\mathrm{inv}}(q)\tau_j(q)}{\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d a_{i,j}^{\mathrm{inv}}(q)}\sum_{j=1}^d a_{k,j}^{\mathrm{inv}}(q)+\sum_{j=1}^d a_{k,j}^{\mathrm{inv}}(q)\tau_j(q). \tag{5.4}$$

可以验证, 如果 TMV 准则中总资本设定为 $C(q)=\mathrm{E}[S|S>F_S^{\leftarrow}(q)]$, F_S 连续, 并且 $\beta=0$, 则在 TMV 准则与基于 ES 的 Euler 准则下, 个体分配的资本值是对应相等的.

注意到, 对任意的 $i,j=1,\ldots,d$, 有 $\sigma_{i,j^2}(q)=\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_i+2\mathbf{1}_j)}(F_S^{\leftarrow}(q))-\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_i)}(F_S^{\leftarrow}(q))\cdot\mathrm{CMM}^{(2\mathbf{1}_j)}(F_S^{\leftarrow}(q))$. 则应用推论 4.1–4.3 可以得到 $\mathrm{CMM}^{(\mathbf{1}_i)}(F_S^{\leftarrow}(q))$、$\sigma_{i,j}(q)$ 和 $\sigma_{i,j^2}(q)$ 的估计量, 分别记为 $\widehat{\mathrm{CMM}}^{(\mathbf{1}_i)}(F_S^{\leftarrow}(q))$、$\widehat{\sigma}_{i,j}(q)$ 和 $\widehat{\sigma}_{i,j^2}(q)$. 进一步地, 由 $\widehat{\sigma}_{i,j}(q), i,j=1,\ldots,d$, 可以计算逆矩阵 $\mathbf{A}_d^{-1}(q)$ 的估计量, 记作 $\widehat{\mathbf{A}_d^{-1}}(q)$. 将所有的估计量代入式 (5.4) 的右侧, 从而, 可以得到个体最优分配资本的渐近值.

表 4　TMV 准则下最优分配资本的渐近值 (置信水平 $q=0.9999$).

β	$\widehat{C}_1^{\mathrm{TMV}}(q)$	$\widehat{C}_2^{\mathrm{TMV}}(q)$	$\widehat{C}_3^{\mathrm{TMV}}(q)$
0	111.66	96.30	84.37
0.00001	118.44	94.98	78.91
1	120.19	94.90	77.24

表 4 给出了在 TMV 准则下最优分配资本的具体数值结果. 模型设置和参数设定见表 1, 其中仅考虑 $\rho_{\boldsymbol{X}}=\rho_{\boldsymbol{\theta}}=1.2$ 的情形. 在置信水平 $q=0.9999$ 下, 假设系统的总资本为 $C(q)=\mathrm{E}[S|S>F_S^{\leftarrow}(q)]\approx 292.33$. 在 TMV 准则和不同波动性参数 β 下, 表 4 列出了最优分配资本的渐近值, 记作 $\widehat{C}_k^{\mathrm{TMV}}(q)$, $k=1,2,3$. 与节 5.1 类似, 个体潜在损失变量的尾部越重, 意味着其风险越大, 则分配给该个体的资本就越多.

6　证明

在证明本文的主要结果之前, 我们首先建立一系列的引理. 第一个引理是对文献 [18] 中引理 1 的重述. 该引理证明了在适当的条件下, MRV 结构中的极限测度在包含负值的区域上不具有质量. 在后续讨论中, 我们将 d 个实值随机变量 $\xi_1,\ldots,\xi_d$ 的和记为 $S_{\boldsymbol{\xi}}=\sum_{k=1}^d\xi_k$.

引理6.1　假设实值随机向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_d)^\top\in\mathrm{MRV}_{-\alpha}(\overline{V},\mu)$, 其中, $\alpha>0$ 为正则指数, $\overline{V}$ 为参考尾分布, μ 为非退化的极限测度. 对于 $k=1,\ldots,d$, 如果 ξ_k 的分布 V_k 满足 $V_k(-t)=o(1)\overline{V_k}(t)$, 则测度 μ 集中在 $[\mathbf{0},\boldsymbol{\infty}]\backslash\{\mathbf{0}\}$ 上, 并且

$$\mathrm{P}(S_{\boldsymbol{\xi}}>t)\sim\mu(B_0)\overline{V}(t), \tag{6.1}$$

其中, B_0 是式 (4.2) 中定义的集合.

下面的引理表明两个随机向量的 Hadamard 积在一定的条件下, 继承了其中一个随机向量的 MRV 结构. 更一般的结果参见文献 [18] 中定理 1.

引理6.2　假设实值随机向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_d)^\top\in\mathrm{MRV}_{-\alpha}(\overline{V},\mu)$, 其中, $\alpha>0$ 为正则指数, $\overline{V}$ 为参考尾分布, μ 为非退化的极限测度; 非负随机向量 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\ldots,\eta_d)^\top$ 的所有分量任意相依, 但与 $\boldsymbol{\xi}$ 独立, 并且存在某个 $\delta>0$ 使得 $\mathrm{E}[\eta_k^{\alpha+\delta}]<\infty$, $k=1,\ldots,d$. 则 Hadamard 积 $\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}\in\mathrm{MRV}_{-\alpha}(\overline{V},\mu_{\boldsymbol{\eta}})$, 其中极限测度 $\mu_{\boldsymbol{\eta}}$ 定义为: 对远离 $\mathbf{0}$ 的 Borel 集 $B\subset[-\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{\infty}]$,

$$\mu_{\boldsymbol{\eta}}(B)=\mathrm{E}\Big[\mu\Big(\Big\{\boldsymbol{x}\in[-\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{\infty}]:(x_1\eta_1,\ldots,x_d\eta_d)^\top\in B\Big\}\Big)\Big].$$

接下来, 我们给出一个重要的引理, 其在定理 4.1 的证明中具有关键作用.

引理6.3 假设实值随机向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_d)^\top\in \mathrm{MRV}_{-\alpha}(\overline{V},\mu)$, 其中, $\alpha>0$ 为正则指数, $\overline{V}$ 为参考尾分布, μ 为非退化的极限测度. 如果对于 $k=1,\ldots,d$ 有 $\mu((\mathbf{1}_k,\boldsymbol{\infty}])>0$, 并且 ξ_k 的分布 V_k 满足 $V_k(-t)=o(1)\overline{V_k}(t)$, 则对任意满足 $1\leqslant n=\sum_{k=1}^d n_k<\alpha$ 的阶向量 $\boldsymbol{n}=(n_1,\ldots,n_d)^\top$, 我们有

$$\mathrm{E}\left[\prod_{k=1}^d \xi_k^{n_k}1_{(S_{\boldsymbol{\xi}}>t)}\right]\sim t^n\overline{V}(t)\left(\int_{(0,1)}\mu(B(y;\boldsymbol{n}))dy+\frac{n\mu(B(\boldsymbol{n}))}{\alpha-n}\right), \tag{6.2}$$

其中, $B(\boldsymbol{n})$ 和 $B(y;\boldsymbol{n})$ 是式 (4.2) 中定义的两个集合.

证明 对于 $k=1,\ldots,d$, 由引理的条件知 $\mathrm{E}[|\xi_k|^n]$ 有限. 因此, 利用 Hölder 不等式可得 (6.2) 左侧的期望有限, 并且可以分解为

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\prod_{k=1}^d \xi_k^{n_k}1_{(S_{\boldsymbol{\xi}}>t)}\right]&=\left(\int_{(-\infty,0]}+\int_{(0,\infty)}\right)x\mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^d \xi_k^{n_k}\in dx,S_{\boldsymbol{\xi}}>t\right)\\&=t^n\left(-\int_{[0,\infty)}\mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^d \xi_k^{n_k}\leqslant -t^ny,S_{\boldsymbol{\xi}}>t\right)dy\right.\\&\left.+\int_{(0,\infty)}\mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^d \xi_k^{n_k}>t^ny,S_{\boldsymbol{\xi}}>t\right)dy\right)\\&=I_1+I_2.\end{aligned} \tag{6.3}$$

在 (6.3) 的第二步中, 我们使用了分部积分法和变量替换.

首先考虑 I_1. 对于任意 $0<\varepsilon<1$, 我们进一步将 I_1 分解为

$$I_1=-t^n\left(\int_{[0,\varepsilon]}+\int_{(\varepsilon,\infty)}\right)\mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^d \xi_k^{n_k}\leqslant -t^ny,S_{\boldsymbol{\xi}}>t\right)dy=I_{11}+I_{12}. \tag{6.4}$$

简洁起见, 我们记 $g(y,t)=\frac{1}{\overline{V}(t)}\mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^d \xi_k^{n_k}\leqslant -t^ny,S_{\boldsymbol{\xi}}>t\right)$, $(y,t)\in[0,\infty)^2$. 当 $0\leqslant y\leqslant\varepsilon$ 时, 根据 (6.1), 对充分大的 t 有

$$g(y,t)\leqslant\frac{\mathrm{P}(S_{\boldsymbol{\xi}}>t)}{\overline{V}(t)}\leqslant 2\mu(B_0).$$

因此, 我们有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|I_{11}|}{t^n\overline{V}(t)}\leqslant 2\varepsilon\mu(B_0). \tag{6.5}$$

当 $y>\varepsilon$ 时, 对任意的 $0<\epsilon<\alpha-n$ 和充分大的 t, 我们有

$$\begin{aligned}g(y,t)&\leqslant\frac{1}{\overline{V}(t)}\mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^d|\xi_k|^{n_k}\geqslant t^ny\right)\\&\leqslant\frac{1}{\overline{V}(t)}\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^d\left(|\xi_k|\geqslant ty^{\frac{1}{n}}\right)\right)\\&\leqslant\frac{2}{\overline{V}(t)}\sum_{k=1}^d\mathrm{P}\left(\xi_k\geqslant ty^{\frac{1}{n}}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2(1+\epsilon)^2 \sum_{k=1}^{d} \mu([\mathbf{1}_k, \boldsymbol{\infty}]) \cdot \max\left\{ y^{\frac{-(\alpha-\epsilon)}{n}}, y^{\frac{-(\alpha+\epsilon)}{n}} \right\} \\
&= h(y). \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

在 (6.6) 的第三步中, 我们使用了 $V_k(-t) = o(1)\overline{V_k}(t)$; 第四步成立是因为 $\mu((\mathbf{1}_k, \boldsymbol{\infty}]) > 0$, (3.2) 和引理 6.1. 注意到 $h(y)$ 在 $y \in (\varepsilon, \infty)$ 上可积, 因此应用控制收敛定理可得

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{|I_{12}|}{t^n \overline{V}(t)} = \int_{(\varepsilon,\infty)} \mu\big(\widetilde{B}(y)\big) dy = 0, \qquad (6.7)
$$

其中集合 $\widetilde{B}(y) = \big\{\boldsymbol{x} \in [-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{\infty}] : \prod_{k=1}^{d} x_k^{n_k} \leqslant -y, \sum_{k=1}^{d} x_k > 1\big\}$, $y > \varepsilon$, 且该集合的边界满足 $\mu\big(\partial \widetilde{B}(y)\big) = 0$. 式 (6.7) 的最后一步成立是因为根据引理 6.1, 极限测度 μ 集中在 $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\infty}] \backslash \{\mathbf{0}\}$ 上. 将式 (6.5) 和式 (6.7) 代入式 (6.4), 再结合 ε 的任意性, 可以得出

$$
I_1 = o(1) t^n \overline{V}(t). \qquad (6.8)
$$

下面考虑 I_2. 同样地, 对上述的 $0 < \varepsilon < 1$, 将 I_2 进一步分解为

$$
I_2 = t^n \left(\int_{(0,\varepsilon]} + \int_{(\varepsilon,\infty)} \right) \mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^{d} \xi_k^{n_k} > t^n y, S_{\boldsymbol{\xi}} > t \right) dy = I_{21} + I_{22}. \qquad (6.9)
$$

类似于 I_{11} 的讨论, 我们有

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{I_{21}}{t^n \overline{V}(t)} \leqslant 2\varepsilon \mu(B_0). \qquad (6.10)
$$

对任意的 $0 < \epsilon < \alpha - n$ 和充分大的 t, 类似于 (6.6) 的讨论, 我们有二元函数 $\frac{1}{\overline{V}(t)} \mathrm{P}\Big(\prod_{k=1}^{d} \xi_k^{n_k} > t^n y, S_{\boldsymbol{\xi}} > t \Big)$, $(y,t) \in (\varepsilon, \infty) \times (0, \infty)$, 被可积函数 $h(y)$ 所控制. 因此, 应用控制收敛定理可得

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{I_{22}}{t^n \overline{V}(t)} = \int_{(\varepsilon,\infty)} \mu(B(y; \boldsymbol{n})) dy. \qquad (6.11)
$$

由 (6.9)–(6.11) 和 ε 的任意性, 我们有

$$
I_2 \sim t^n \overline{V}(t) \int_{(0,\infty)} \mu(B(y; \boldsymbol{n})) dy. \qquad (6.12)
$$

注意到, 当 $y > 1$ 时, 式 (4.2) 中的集合 $B(y; \boldsymbol{n})$ 可以简化为 $B(y; \boldsymbol{n}) = \big\{\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \boldsymbol{\infty}] : \prod_{k=1}^{d} x_k^{n_k} > y\big\}$. 此时, 利用 (3.4) 可得 $\mu(B(y; \boldsymbol{n})) = y^{-\frac{\alpha}{n}} \mu(B(\boldsymbol{n}))$. 将 (6.8) 和 (6.12) 代入 (6.3) 可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\prod_{k=1}^{d} \xi_k^{n_k} 1_{(S_{\boldsymbol{\xi}} > t)} \right] &\sim t^n \overline{V}(t) \int_{(0,\infty)} \mu(B(y; \boldsymbol{n})) dy \\
&= t^n \overline{V}(t) \left(\int_{(0,1)} + \int_{[1,\infty)} \right) \mu(B(y; \boldsymbol{n})) dy \\
&= t^n \overline{V}(t) \left(\int_{(0,1)} \mu(B(y; \boldsymbol{n})) dy + \frac{n\mu(B(\boldsymbol{n}))}{\alpha - n} \right).
\end{aligned}
$$

引理得证. □

现在给出本文主要结果的证明.

定理 4.1 的证明 在定理 4.1 的条件下, 由引理 6.2 易知 $\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{X}\in\mathrm{MRV}_{-\alpha}(\overline{F},\nu_{\boldsymbol{\theta}})$. 对于 $k=1,\ldots,d$, 我们记 $\xi_k=\theta_kX_k$, 其分布为 V_k, 则根据文献 [9] 的引理 A.1 有 $V_k(-t)=o(1)\overline{V_k}(t)$. 由 $\nu_{\boldsymbol{\theta}}$ 的定义和 (3.4) 可以验证 $\nu_{\boldsymbol{\theta}}((\mathbf{1}_k,\boldsymbol{\infty}])=\mathrm{E}[\theta_k^\alpha]\nu((\mathbf{1}_k,\boldsymbol{\infty}])$ 且 $\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B(\boldsymbol{n}))=\mathrm{E}\big[\big(\prod_{k=1}^d\theta_k^{n_k}\big)^{\frac{\alpha}{n}}\big]\nu(B(\boldsymbol{n}))$. 因为 $\nu((\mathbf{1}_k,\boldsymbol{\infty}])>0$ 且 θ_k 在 0 处非退化, 所以 $\nu_{\boldsymbol{\theta}}((\mathbf{1}_k,\boldsymbol{\infty}])>0$, 这也意味着 $\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0)>0$. 至此, 引理 6.3 的所有条件均满足. 因此, 由引理 6.1 和引理 6.3 可得渐近等价式 (4.1) 成立. □

命题 5.1 的证明 回顾式 (5.1), 我们将其右侧的两项分别记为 J_1 和 J_2.

当 F_S 在 $F_S^{\leftarrow}(q)$ 处连续时, $J_2=0$. 注意到, 引理 6.1 意味着 $\overline{F_S}\in\mathrm{RV}_{-\alpha}$, 进一步可得 $\overline{F_S}(F_S^{\leftarrow}(q))\sim 1-q$. 于是, 由推论 4.2 知

$$C_k(q)=J_1\sim(\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0))^{\frac{1}{\alpha}-1}F^{\leftarrow}(q)\bigg(\int_{(0,1)}\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B(y;\mathbf{1}_k))dy+\frac{\mathrm{E}[\theta_k^\alpha]\nu((\mathbf{1}_k,\boldsymbol{\infty}])}{\alpha-1}\bigg). \tag{6.13}$$

当 F_S 在 $F_S^{\leftarrow}(q)$ 处不连续时, 我们重写

$$J_2=\frac{F_S\big(F_S^{\leftarrow}(q)\big)-q}{(1-q)\mathrm{P}(S=F_S^{\leftarrow}(q))}\mathrm{E}\Big[\theta_kX_k1_{\left(S=F_S^{\leftarrow}(q)\right)}\Big].$$

由 $0\leqslant F_S\big(F_S^{\leftarrow}(q)\big)-q\leqslant\mathrm{P}(S=F_S^{\leftarrow}(q))$ 可知, 对任意的 $0<\varepsilon<1$ 有

$$\begin{aligned}(1-q)J_2&\leqslant\Big|\mathrm{E}\Big[\theta_kX_k1_{\left(S=F_S^{\leftarrow}(q)\right)}\Big]\Big|\\&\leqslant\mathrm{E}\Big[\theta_kX_k^+1_{\left(S=F_S^{\leftarrow}(q)\right)}\Big]+\mathrm{E}\Big[\theta_kX_k^-1_{\left(S=F_S^{\leftarrow}(q)\right)}\Big]\\&\leqslant\bigg(\mathrm{E}\Big[\theta_kX_k^+1_{\left(S>(1-\varepsilon)F_S^{\leftarrow}(q)\right)}\Big]-\mathrm{E}\Big[\theta_kX_k^+1_{\left(S>F_S^{\leftarrow}(q)\right)}\Big]\bigg)\\&\quad+\mathrm{E}\Big[\theta_kX_k^-1_{\left(S>(1-\varepsilon)F_S^{\leftarrow}(q)\right)}\Big].\end{aligned} \tag{6.14}$$

参见推论 4.1 下方的分析说明, 我们有 $F_S^{\leftarrow}(q)\sim(\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0))^{\frac{1}{\alpha}}F^{\leftarrow}(q)$, 进一步地有 $\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0)\overline{F}(F_S^{\leftarrow}(q))\sim 1-q$. 结合 (6.14), (6.8) 和 (6.12), 再由 $0<\varepsilon<1$ 的任意性, 我们有

$$J_2=o(1)(\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B_0))^{\frac{1}{\alpha}-1}F^{\leftarrow}(q)\bigg(\int_{(0,1)}\nu_{\boldsymbol{\theta}}(B(y;\mathbf{1}_k))dy+\frac{\mathrm{E}[\theta_k^\alpha]\nu((\mathbf{1}_k,\boldsymbol{\infty}])}{\alpha-1}\bigg).$$

最后结合 (6.13), 我们可以得到所需的式 (5.2). □

致谢 衷心感谢编委会和审稿专家的仔细审阅和宝贵意见.

参考文献

1 Acharya V V, Pedersen L H, Philippon T, et al. Measuring systemic risk. Rev Financ Stud, 2017, 30: 2-47, doi: 10.1093/rfs/hhw088

2 Adrian T, Brunnermeier M K. CoVaR. Am Econ Rev, 2016, 106: 1705-1741, doi: 10.1257/aer.20120555

3 Asimit A V, Li J Z. Systemic risk: An asymptotic evaluation. ASTIN Bull, 2018, 48: 673-698, doi: 10.1017/asb.2017.38

4 Bartram S M, Bodnar G M. No place to hide: The global crisis in equity markets in 2008/2009. J Int Money Finance, 2009, 28: 1246-1292, doi: 10.1016/j.jimonfin.2009.08.005

5 Bingham N H, Goldie C M, Teugels J L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge University Press, 1987, doi: 10.1017/CBO9780511721434

6 Cai J J, Musta E. Estimation of the marginal expected shortfall under asymptotic independence. Scand J Stat, 2020, 47: 56-83, doi: 10.1111/sjos.12397

7 Cai J, Wang Y. Optimal capital allocation principles considering capital shortfall and surplus risks in a hierarchical corporate structure. Insur Math Econ, 2021, 100: 329-349, doi: 10.1016/j.insmatheco.2021.06.005

8 Chen S Y, Tong Z W, Yang Y. Portfolio default losses driven by idiosyncratic risks. Eur J Oper Res, 2025, 320: 765-776, doi: 10.1016/j.ejor.2024.08.015

9 Chen Y Q, Liu J J. An asymptotic study of systemic expected shortfall and marginal expected shortfall. Insur Math Econ, 2022, 105: 238-251, doi: 10.1016/j.insmatheco.2022.04.009

10 Chen Y Q, Liu J J. Asymptotic capital allocation based on the higher moment risk measure. Eur Actuar J, 2024, 14: 657-684, doi: 10.1007/s13385-024-00378-4

11 Chen Y Q, Yuen K C. Sums of pairwise quasi-asymptotically independent random variables with consistent variation. Stoch Models, 2009, 25: 76-89, doi: 10.1080/15326340802641006

12 Cheng X, Chen H Y, Zhou Y G. Is the renminbi a safe-haven currency? Evidence from conditional coskewness and cokurtosis. J Int Money Finance, 2021, 113: 102359, doi: 10.1016/j.jimonfin.2021.102359

13 Das B, Fasen-Hartmann V. Risk contagion under regular variation and asymptotic tail independence. J Multivar Anal, 2018, 165: 194-215, doi: 10.1016/j.jmva.2017.12.004

14 de Haan L, Resnick S I. On the observation closest to the origin. Stoch Process Their Appl, 1981, 11: 301-308, doi: 10.1016/0304-4149(81)90032-6

15 Dhaene J, Laeven R J, Zhang Y Y. Systemic risk: Conditional distortion risk measures. Insur Math Econ, 2022, 102: 126-145, doi: 10.1016/j.insmatheco.2021.12.002

16 Diemont D, Moore K, Soppe A. The downside of being responsible: Corporate social responsibility and tail risk. J Bus Ethics, 2016, 137: 213-229, doi: 10.1007/s10551-015-2549-9

17 Duan J, Landsman Z, Yao J. Tail variance and confidence of using tail conditional expectation: Analytical representation, capital adequacy, and asymptotics. Adv Appl Probab, 2025, 57: 346-369, doi: 10.1017/apr.2024.34

18 Fougères A L, Mercadier C. Risk measures and multivariate extensions of Breiman's theorem. J Appl Probab, 2012, 49: 364-384, doi: 10.1239/jap/1339878792

19 Furman E, Landsman Z. Tail variance premium with applications for elliptical portfolio of risks. ASTIN Bull, 2006, 36: 433-462, doi: 10.2143/AST.36.2.2017929

20 Grechuk B. Extended gradient of convex function and capital allocation. Eur J Oper Res, 2023, 305: 429-437, doi: 10.1016/j.ejor.2022.05.025

21 Hashorva E. Approximation of some multivariate risk measures for Gaussian risks. J Multivar Anal, 2019, 169: 330-340, doi: 10.1016/j.jmva.2018.10.006

22 International Monetary Fund (IMF). Global Financial Stability Report: Bridge to Recovery. International Monetary Fund Technical Report, 2020. https://www.imf.org/en/Publications/GFSR/Issues/2020/10/13/global-financial-stability-report-October-2020

23 Janßen A, Neblung S, Stoev S. Tail-dependence, exceedance sets, and metric embeddings. Extremes, 2023, 26: 747-785, doi: 10.1007/s10687-023-00471-z

24 Kalkbrener M. An axiomatic approach to capital allocation. Math Financ, 2005, 15: 425-437, doi: 10.1111/j.1467-9965.2005.00227.x

25 Kelly B, Jiang H. Tail risk and asset prices. Rev Financ Stud, 2014, 27: 2841-2871, doi: 10.1093/rfs/hhu039

26 Kley O, Klüppelberg C, Paterlini S. Modeling extremal dependence for operational risk by a bipartite graph. J Bank Finance, 2020, 117: 105855, doi: 10.1016/j.jbankfin.2020.105855

27 Li J Z. Asymptotic results on marginal expected shortfalls for dependent risks. Insur Math Econ, 2022, 102: 146-168, doi: 10.1016/j.insmatheco.2021.12.003

28 Li J Z. Asymptotic results on tail moment and tail central moment for dependent risks. Adv Appl Probab, 2023, 55: 1116-1143, doi: doi:10.1017/apr.2022.74

29 Li J Z. The principle of a single big jump from the perspective of tail moment risk measure. Insur Math Econ, 2025, 124: 103118, doi: 10.1016/j.insmatheco.2025.103118

30 Liu J J, Yang Y. Asymptotics for systemic risk with dependent heavy-tailed losses. ASTIN Bull, 2021, 51: 571-605, doi: 10.1017/asb.2021.11

31 Mainik G, Rüschendorf L. On optimal portfolio diversification with respect to extreme risks. Finance Stoch, 2010, 14: 593-623, doi: 10.1007/s00780-010-0122-z

32 McNeil A J, Frey R, Embrechts P. Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton: Princeton University Press, 2015, doi: 10.1111/jtsa.12177

33 Nelsen R B. An Introduction to Copulas. New York: Springer, 2006, doi: 10.1007/0-387-28678-0

34 Okhrin O, Odening M, Xu W. Systemic weather risk and crop insurance: The case of China. J Risk Insur, 2013, 80: 351-372, doi: 10.1111/j.1539-6975.2012.01476.x
35 Resnick S I. Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes. New York: Springer, 1987, doi: 10.1007/978-0-387-75953-1
36 Resnick S I. Heavy-Tail Phenomena. Probabilistic and Statistical Modeling. New York: Springer, 2007, doi: 10.1007/978-0-387-45024-7
37 Roukny T, Battiston S, Stiglitz J E. Interconnectedness as a source of uncertainty in systemic risk. J Financ Stab, 2018, 35: 93-106, doi: 10.1016/j.jfs.2016.12.003
38 Shi X J, Tang Q H, Yuan Z Y. A limit distribution of credit portfolio losses with low default probabilities. Insur Math Econ, 2017, 73: 156-167, doi: 10.1016/j.insmatheco.2017.02.003
39 Stărică C. Multivariate extremes for models with constant conditional correlations. J Empir Financ, 1999, 6: 515-553, doi: 10.1016/S0927-5398(99)00018-3
40 Tang Q H, Tang Z F, Yang Y. Sharp asymptotics for large portfolio losses under extreme risks. Eur J Oper Res, 2019, 276: 710-722, doi: 10.1016/j.ejor.2019.01.025
41 Tang Q H, Yang Y. Interplay of insurance and financial risks in a stochastic environment. Scand Actuar J, 2019, 2019: 432-451, doi: 10.1080/03461238.2019.1573753
42 Tang Q H, Yuan Z Y. Asymptotic analysis of the loss given default in the presence of multivariate regular variation. N Am Actuar J, 2013, 17: 253-271, doi: 10.1080/10920277.2013.830557
43 Valizadeh P, Karali B, Ferreira S. Ripple effects of the 2011 Japan earthquake on international stock markets. Res Int Bus Finance, 2017, 41: 556-576, doi: 10.1016/j.ribaf.2017.05.002
44 Wang B J, Li J Z. Asymptotic results on tail moment for light-tailed risks. Insur Math Econ, 2024, 114: 43-55, doi: 10.1016/j.insmatheco.2023.11.001
45 Xu M C, Mao T T. Optimal capital allocation based on the Tail Mean-Variance model. Insur Math Econ, 2013, 53: 533-543, doi: 10.1016/j.insmatheco.2013.08.005

An asymptotic study of conditional mixed moments under multivariate regular variation

Yang Yang, Keya Zhang & Zhimin Zhang

Abstract Consider a financial or insurance system consisting of multiple individuals susceptible to investment failures and market shocks, in which each realized investment loss variable is modeled as the product of a potential loss arising from investment activities and a macroeconomic factor activated by external shocks. To quantify the contribution of one or more individuals to the system's crisis, we propose a general tail-based risk measure in terms of conditional mixed moments. It provides an integrated framework for examining a series of risk measures, including the conditional higher-order moments of each individual and the conditional correlations among multiple individuals. Under the multivariate regular variation structure for potential losses, an asymptotic study of conditional mixed moments is carried out. Our main results highlight the significance of potential losses and their interdependence during the system's crisis. Extensive numerical studies are conducted to verify the performance of our asymptotic formulas. Building upon two distinct rules, we also provide a comprehensive analysis of applications in the context of capital allocation.

Keywords **Conditional mixed moment, aggregate realized investment loss, multivariate regular variation, asymptotic analysis, capital allocation**

MSC(2020) **60E05, 62P05, 62E20**

doi: 10.1360/SSM-2024-XXXX