杨孔庆,罗明秋,李幼铭.地震波传播的黎曼几何描述[J].石油物探,2018,57(5):647-651
YANG Kongqing,LUO Mingqiu,LI Youming.Riemann geometric description of seismic wave propagation[J].Geophysical Prospecting for Petroleum,2018,57(5):647-651

地震波传播的黎曼几何描述

杨孔庆[1,2],罗明秋[3],李幼铭[4]

(1.兰州大学,甘肃兰州 730000;2.集美大学,福建厦门 361021;3.中石化休斯顿研发中心,休斯顿 77056;4.中科院地质与地球物理研究所,北京 100029)

摘要:黎曼流形是对弯曲空间的一种几何描述。地震波在复杂介质中传播的弯曲特性,符合黎曼流形的几何特性。以复杂介质中地震波的走时函数为基础,构造地震波在复杂介质中传播的黎曼几何描述,然后根据黎曼几何中协变的标量场波动方程建立了地震波在复杂介质中传播的标量场波动方程;最后讨论了该几何描述在射线追踪、波场模拟等方面的应用。

关键词:地震波传播;黎曼流形;黎曼度量;测地线;协变方程;射线方程

中图分类号:P631　　**文献标识码**:A

文章编号:1000-1441(2018)05-0647-05　　**DOI**:10.3969/j.issn.1000-1441.2018.05.002

Riemann geometric description of seismic wave propagation

YANG Kongqing[1,2],LUO Mingqiu[3],LI Youming[4]

(1.*Lanzhou University*,*Lanzhou* 730000,*China*;2.*Jimei University*,*Xiamen* 361021,*China*;3.*Sinopec Houston R&D Center*,*Houston* 77056,*China*;4.*Institute of Geology & Geophysics*,*Chinese academy of Sciences*,*Beijing* 100029,*China*)

Abstract: The Riemannian manifold is a geometric description of curved space.Seismic propagation in complex media with a curved ray-path has similar geometric characters to the Riemannian manifold.In this paper,based on the minimized travel time in wave propagation,we propose a seismic wave propagation formulation with Riemannian geometry.The covariant scalar field equation,which complies with the acoustic wave equation in constant media,is used to describe the wave propagation in complex media with complex curved-space properties.Further,we discuss the application of Riemann geometric description in ray-tracing and seismic simulation.

Keywords: seismic wave propagation,Riemann manifold,Riemannian metric,geodesic,covariant equation,ray-tracing equation

地震波的传播是一种非常复杂的波动现象,对其描述非常困难。目前数学上对地震波描述得最好的方程是粘弹性各向异性波动方程。但由于该方程的模拟计算量巨大,因而在油气勘探工业中未能广泛使用。地震波近似声波方程和高频近似方程计算量小,在地震波场模拟、偏移成像和反演中得到了广泛应用。

在均匀介质中,以费马原理为基础的程函方程和标量波动方程数学形式简洁,相应物理概念清晰。油气勘探中的很多技术,如射线追踪、走时场的计算和地震波场模拟,都以此为基础[1]。然而,地震波在复杂构造、各向异性等介质中传播时,基于欧氏几何的传统表述方法就不再简洁。寻找简单统一的地震波传播表述,有助于我们正确理解地震波现象和精确模拟地震波。

基于现代微分几何流形理论的微分几何已成为物理学、数学及力学领域不可缺少的数学工具[2-3]。人们将它用于描述光在复杂介质中的传播[4-5]。本文利用微分几何方法来描述地震波的传播。

从描述弯曲空间的黎曼几何出发,建立复杂介质中波场走时的黎曼流形,复杂介质中的地震波沿黎曼流形中的测地线传播;同时,复杂介质中的标量波动方程亦可由黎曼流形中协变的标量波动方

收稿日期:2018-01-31;**改回日期**:2018-04-24。
作者简介:杨孔庆(1945—),男,教授,博导,主要从事数学物理教学和研究工作。Email:yangkqjmu@163.com
通讯作者:罗明秋(1972—),男,博士,主要从事地震波模拟、成像和反演方法研究工作。

程来描述。采用黎曼几何方法描述地震波在复杂介质中传播的问题，可以深化对几何射线和波动方程的认识，提高对射线追踪和地震波场的计算能力，同时也为复杂介质中的波场变换提供了一种可能的研究途径。

1 黎曼几何中的基本概念

黎曼几何是描述弯曲空间的几何。以原点为圆心，以 R 为半径的球面是一个二维曲面，在三维空间中可以利用三个独立变量的方程来描述。假设不在三维空间中来观察这个二维球面，而是在这个二维球面(即二维流形，只有两个独立变量)上来审视这个球面，采用两个独立变量来描述这个曲面上两点的距离及其它的几何量，首先需要选取球面上任何一点的邻域，当此邻域选取得足够小，我们可以将此邻域看成一个二维的小平面，即这个小邻域与一个二维平面(二维的平直空间)同构，接着就可以用二维平面上的自然坐标系作为球面一点的小邻域坐标来描述这个邻域，构成这个邻域的局域坐标。而球面上相邻两点的小邻域用两个不同的平面坐标即两套局域坐标来描述，我们可得到这两套坐标间的坐标变换，即转换函数(雅可比函数)，因为所研究的曲面是光滑的，所以转换函数是非奇异的。将整个曲面(球面)看成由无穷多个小平面拼接而成，转换函数是由曲面的性质所决定的。在此基础上，我们可以定义曲面上相邻两点的距离。

黎曼几何就是建立在这种思想框架上描述弯曲空间的几何学，本文只给出三维弯曲空间(三维流形)的黎曼几何描述，其它维数的黎曼几何只需改变空间坐标的维数即可。

三维黎曼流形上任意相邻很近两点的距离 $\mathrm{d}s$ 的平方(简称距离)可用局域坐标(x_1,x_2,x_3)来描述：

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\mathrm{d}x_3)\cdot\begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x)\\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x)\\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \mathrm{d}x_3\end{pmatrix} \tag{1}$$

式中：$g_{ij}(x)\equiv g_{ij}(x_1,x_2,x_3)$称为黎曼度量函数，是描述空间弯曲的势函数，它是 3×3 的度量矩阵的矩阵元，也简称为黎曼度量或度量；x 是坐标(x_1,x_2,x_3)的缩写。根据爱因斯坦求和规则可简单写成如下形式：

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j=1}^{3}g_{ij}(x)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j=g_{ij}(x)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{2}$$

$$i,j=1,2,3$$

为简洁起见，我们以 g_{ij} 代替 $g_{ij}(x)$，根据爱因斯坦求和规则，(2)式中两个坐标的指标 i 和 j 都自动从1到3进行求和。(1)式和(2)式完全相同，但利用爱因斯坦求和规则写出更简洁。以下公式都采用爱因斯坦求和规则。

黎曼度量是个对称矩阵，即 $\boldsymbol{g}_{ij}=\boldsymbol{g}_{ji}$。黎曼度量 $\boldsymbol{g}_{ij}$ 的逆为 $\boldsymbol{g}^{ij}$，有：

$$\boldsymbol{g}_{ik}\boldsymbol{g}^{kj}=\boldsymbol{\delta}_i^j \tag{3}$$

度量矩阵的行列式记为$|\boldsymbol{g}_{ij}|=\boldsymbol{g}$，且 $\boldsymbol{g}$ 是正定的。

在三维欧氏空间中，由欧氏几何的第五公设可知，一个向量在此空间中的平行移动有明确的定义，且不依赖于移动路径的选择。设在欧氏空间中有一个向量 $\boldsymbol{A}=A_1(x)\boldsymbol{e}_1+A_2(x)\boldsymbol{e}_2+A_3(x)\boldsymbol{e}_3$，$A_1,A_2,A_3$ 分别为该向量在三个空间方向 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 上的分量。当该向量沿任意路径做平行移动时，其每个分量都是保持不变的，故有：

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}=0 \tag{4}$$

$$i,j=1,2,3$$

但在黎曼流形中，欧氏几何的第五公设失效，定义一个弯曲空间中一个向量的平行移动，就必须引入联络的概念，即弯曲空间中两点间的联系。有多种方法可用来定义空间两点间的联络，不同的联络定义了不同的向量在空间的平行移动。在黎曼流形中，黎曼给出了与黎曼度量唯一相容的黎曼联络，由黎曼联络定义了黎曼流形中唯一的向量平行移动，进而定义了黎曼流形中的“直线”，即黎曼流形中两点间距离最短的连线，称为黎曼流形中的“测地线”，或称为“短程线”。

在三维黎曼流形中，与黎曼度量 $\boldsymbol{g}_{ij}$ 相容的黎曼联络为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_{jk}^{i}(x)&=\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{im}\left(\frac{\partial\boldsymbol{g}_{km}}{\partial x_j}+\frac{\partial\boldsymbol{g}_{jm}}{\partial x_k}-\frac{\partial\boldsymbol{g}_{jk}}{\partial x_m}\right)\\&\equiv\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{im}(\partial_j\boldsymbol{g}_{km}+\partial_k\boldsymbol{g}_{jm}-\partial_m\boldsymbol{g}_{jk})\end{aligned} \tag{5}$$

$$i,j,k,m=1,2,3$$

由(5)式可以看出，黎曼联络 $\boldsymbol{\Gamma}_{jk}^{i}$ 有一个重要的性质，即两个下标具有交换对称性：

$$\boldsymbol{\Gamma}_{jk}^{i}=\boldsymbol{\Gamma}_{kj}^{i} \tag{6}$$

我们根据黎曼联络，定义黎曼流形上的协变微商 ∇_j 来代替平直的欧氏空间中的普通微商∂_j。对于黎曼流形上的一个向量场 $\boldsymbol{X}$(是流形上每一点的切空间

所构成的向量场),其分量为 $\boldsymbol{X}^i$(切空间的向量的分量用上指标表示),则黎曼流形上的协变微商∇_j的定义如下:

$$\nabla_j \boldsymbol{X}^i \equiv \partial_j \boldsymbol{X}^i + \boldsymbol{\Gamma}^i_{jk}\boldsymbol{X}^k \tag{7}$$

根据爱因斯坦求和规则有:$\boldsymbol{\Gamma}^i_{jk}\boldsymbol{X}^k = \boldsymbol{\Gamma}^i_{j1}\boldsymbol{X}^1 + \boldsymbol{\Gamma}^i_{j2}\boldsymbol{X}^2 + \boldsymbol{\Gamma}^i_{j3}\boldsymbol{X}^3$。

对于黎曼流形上的一个向量场 $\boldsymbol{X}$,如果有:

$$\nabla_j \boldsymbol{X}^i = 0 \tag{8}$$

则此向量场是黎曼流形上的平行向量场,即由向量 $\boldsymbol{X}$ 在黎曼流形中的任意平行移动所构成,(8)式定义了黎曼流形中向量场的平行移动。

黎曼流形上的"直线",即流形上两点间最短距离的连线由测地线方程来描述:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}s^2} + \boldsymbol{\Gamma}^k_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{9}$$

$$i,j,k = 1,2,3$$

式中:$\mathrm{d}s$,$\mathrm{d}x^i$,$\mathrm{d}x^j$,$\mathrm{d}x^k$ 分别为沿测地线和三个方向的微分。

由费马原理可知,一个不受力的"自由粒子"或光线在黎曼流形上的运动或传播,是沿测地线进行的。有了协变微商的定义,我们可以给出黎曼流形上的拉普拉斯算子,它作用于黎曼流形的标量函数 f 上,有:

$$\nabla^2 f \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}\,g^{ij}\partial_j f) \tag{10}$$

黎曼流形的弯曲程度则由黎曼曲率张量 $\boldsymbol{R}^k_{ijm}$ 描述如下:

$$\boldsymbol{R}^k_{ijm} = \partial_i\boldsymbol{\Gamma}^k_{jm} - \partial_j\boldsymbol{\Gamma}^k_{im} + \boldsymbol{\Gamma}^k_{in}\boldsymbol{\Gamma}^n_{jm} - \boldsymbol{\Gamma}^k_{jn}\boldsymbol{\Gamma}^n_{im} \tag{11}$$

黎曼流形的弯曲程度也可以用里希(Ricci)张量描述如下:

$$\boldsymbol{R}_{ij} \equiv \boldsymbol{R}^k_{kij} \tag{12}$$

等式右边黎曼曲率张量的上、下指标 k 进行 1→3 求和,此求和过程称为指标的缩并求和,此指标完成计算任务后自动消失。

同时,我们还可以用标曲率 R 来描述黎曼流形的弯曲程度,标曲率 R 定义如下:

$$R \equiv g^{ij}R_{ij} \tag{13}$$

标曲率在某些情况下更容易看出整个流形的弯曲状况。

2　地震波传播波场的走时场的黎曼流形

对于平直的三维欧氏空间,相邻两点间的距离为:

$$\mathrm{d}s^2 = \delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 \tag{14}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$,即平直空间的度量矩阵为:

$$\boldsymbol{g}_{ij} = \boldsymbol{\delta}_{ij} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{15}$$

地震波的载体是三维平直空间中的介质,这个平直空间的性质是不变的。但在复杂介质中,地震波传播的速度随介质的不同而变化,即空间相邻两点间地震波传播的时间随介质的不同而变化。因此,在研究地震波在介质中的传播和波场变换时,人们常用地震波的走时场来讨论。

2.1　复杂的局域各向异性介质中走时场的黎曼几何描述

在复杂的各向异性介质中,介质可以看成走时场的黎曼流形,即相邻两点间的走时间隔 $\mathrm{d}T$ 的平方为:

$$\mathrm{d}T^2 = g_{ij}(x)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{16}$$

由量纲分析可知,度量函数 g_{ij} 的量纲是速度量纲的倒数平方,这是对最复杂介质走时流形的描述。由此得到的测地线方程是高度非线性方程。

2.2　局域 x,y,z 三轴各向异性介质中走时场的黎曼几何描述

如果我们不考虑度量矩阵的交叉项,即不考虑介质的复杂性使得波在局域范围内传播时具有的旋转效应,而只考虑(x_1,x_2,x_3)在 x,y,z 三轴上传播速度的不同,则走时间隔 $\mathrm{d}T$ 有:

$$\mathrm{d}T^2 = \frac{1}{v_1^2}\mathrm{d}x_1^2 + \frac{1}{v_2^2}\mathrm{d}x_2^2 + \frac{1}{v_3^2}\mathrm{d}x_3^2 \tag{17}$$

式中:v_1,v_2,v_3 分别表示地震波沿 x,y,z 轴传播的速度。

此时的度量函数为:

$$g_{11} = \frac{1}{v_1^2},\quad g_{22} = \frac{1}{v_2^2},\quad g_{33} = \frac{1}{v_3^2} \tag{18}$$

度量矩阵为:

$$\boldsymbol{g}_{ij} = \begin{pmatrix}\frac{1}{v_1^2}&0&0\\0&\frac{1}{v_2^2}&0\\0&0&\frac{1}{v_3^2}\end{pmatrix} \tag{19}$$

由此可根据(5)式计算其联络系数函数,进而计算此流形中较为复杂的测地线方程和波动方程。

2.3　局域各向同性介质中走时场的黎曼几何描述

我们现在考虑复杂介质中最简单的一种情况,即

在局域范围内，介质是各向同性的，即：

$$v_1(x)=v_2(x)=v_3(x)=v(x)\equiv v \tag{20}$$

此时地震波传播的速度 $v(x)$ 是随着不同介质(或相同介质不同密度)的空间点而变化的。走时流形的时间间隔为：

$$\mathrm{d}T^2=\frac{1}{v^2}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i \tag{21}$$

该度量函数为：

$$g_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{v^2} & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{22}$$

其逆为：

$$g^{ij}=\begin{cases}v^2 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{23}$$

比较(22)式与(15)式得到：

$$v^2 g_{ij}=\delta_{ij} \tag{24}$$

可以通过标量函数 v^2 的变换，将度量函数 g_{ij} 变为平直空间中的度量函数 δ_{ij}，我们称此走时流形是共形平坦的流形。

根据(5)式，(22)式和(23)式计算出此三维走时场的黎曼流形中的27个黎曼联络系数：

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^1=-\partial_1\ln v\quad \Gamma_{22}^1=\partial_1\ln v\quad \Gamma_{33}^1=\partial_1\ln v\\
&\Gamma_{21}^1=\Gamma_{12}^1=-\partial_2\ln v\quad \Gamma_{31}^1=\Gamma_{13}^1=-\partial_3\ln v\\
&\Gamma_{23}^1=\Gamma_{32}^1=0\quad \Gamma_{22}^2=-\partial_2\ln v\quad \Gamma_{11}^2=\partial_2\ln v\\
&\Gamma_{33}^2=\partial_2\ln v\quad \Gamma_{21}^2=\Gamma_{12}^2=-\partial_1\ln v\\
&\Gamma_{32}^2=\Gamma_{23}^2=-\partial_3\ln v\quad \Gamma_{13}^2=\Gamma_{31}^2=0\\
&\Gamma_{33}^3=-\partial_3\ln v\quad \Gamma_{11}^3=\partial_3\ln v\quad \Gamma_{22}^3=\partial_3\ln v\\
&\Gamma_{31}^3=\Gamma_{13}^3=-\partial_1\ln v\quad \Gamma_{32}^3=\Gamma_{23}^3=-\partial_2\ln v\\
&\Gamma_{21}^3=\Gamma_{12}^3=0
\end{aligned} \tag{25}$$

2.4 共形平坦的走时场黎曼流形中的测地线方程

下面我们可计算此三维走时场的黎曼流形中测地线方程。由测地线方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}T^2}+\Gamma_{jk}^i\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}T}\frac{\mathrm{d}x^k}{dT}=0 \tag{26}$$

可得：

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}T^2}-\partial_1\ln v\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}T}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}T}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}T}\right)^2\right]-\\
2\partial_2\ln v\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}T}\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}T}-2\partial_3\ln v\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}T}\dfrac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}T}=0\\
\dfrac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}T^2}-\partial_2\ln v\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}T}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}T}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}T}\right)^2\right]-\\
2\partial_1\ln v\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}T}\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}T}-2\partial_3\ln v\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}T}\dfrac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}T}=0\\
\dfrac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}T^2}-\partial_3\ln v\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}T}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}T}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}T}\right)^2\right]-\\
2\partial_1\ln v\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}T}\dfrac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}T}-2\partial_2\ln v\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}T}\dfrac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}T}=0
\end{cases} \tag{27}$$

此测地线方程，表示地震波在三维走时场的黎曼流形中，沿走时最小的路径传播。

2.5 共形平坦的走时场黎曼流形中地震波传播的标量波动方程

在欧氏空间中，均匀介质中地震波传播满足如下的标量波动方程：

$$\overline{\nabla}^2u-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0 \tag{28}$$

式中：为了区别与黎曼流形上的协变微商符号∇，欧氏空间中的拉普拉斯算子记为$\overline{\nabla}^2$；$u\equiv u(x,y,z,t)$为地震波场；v 为地震波在均匀介质中传播的速度。

在黎曼流形中，将拉普拉斯算子$\overline{\nabla}^2$ 换成(10)式中协变的拉普拉斯算子，因此在共形平坦的走时场黎曼流形中地震波传播的标量波动方程为：

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_ju)-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0 \tag{29}$$

该方程是在走时场中的波动方程，其速度关系(即度量系数函数)包含在协变的拉普拉斯算子中，故(29)式左边的第二项与(28)式左边第二项的系数差 $1/v^2$ 的因子，从量纲分析可知，(28)式和(29)式的量纲是平衡的。

由(22)式，(23)式和 $g=|g_{ij}|=\dfrac{1}{v^6}$可知，(29)式可表示为：

$$v^3\partial_i\left(\frac{1}{v}\partial_iu\right)-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0 \tag{30}$$

即：

$$v^2\partial_i\partial_iu-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-v\partial_iv\partial_iu=0 \tag{31}$$

地震波在局域各向同性复杂介质中传播的方程为：

$$\overline{\nabla}^2u-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\partial_i\ln v\partial_iu=0 \tag{32}$$

方程(32)左端前两项正是欧氏空间中波动方程(28)式的左端，因此我们所得到的方程是对欧氏空间波动方程的修正，其修正项为$-\partial_i\ln v\partial_iu$。修正项是对波动方程中振幅梯度的修正。从修正项函数的特性可知，它随着速度 v 的增加而以对数的形式增加，而修正项前面的负号说明它是对梯度减小的修正。我们也可由介质密度与波速的关系，给出此修正与介质密度的关系。由于在方程(32)中我们把地震波的振幅 $u(x,t)$近似等同于欧氏空间中的振幅，故在分析修正项时必须把这种近似考虑进去。

3　地震波在复杂介质中传播的黎曼几何描述的应用

我们研究共形平坦的走时场黎曼流形中地震波传播的射线参数方程及其应用。本节只讨论二维空间坐标下的射线方程。在二维空间坐标中，x，z 分别表示距离和深度，走时流形上任意一条曲线的测地曲率 K_g 有如下的刘维尔表述：

$$K_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}T} - \frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\theta \tag{33}$$

式中：θ 为该曲线切向与 x 轴正向的夹角。x 轴的测地曲率 K_{g1} 和 z 轴的测地曲率 K_{g2} 分别为：$K_{g1}=\frac{\partial v}{\partial x}$，$K_{g2}=\frac{\partial v}{\partial z}$。

因为该共形平坦的走时场黎曼流形中满足测地曲率为零的条件，故二维空间坐标系中的射线方程具有如下形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial T} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\sin\theta - \dfrac{\partial v}{\partial z}\cos\theta \\ \dfrac{\partial x}{\partial T} = \sin\theta \\ \dfrac{\partial z}{\partial T} = -\cos\theta \end{cases} \tag{34}$$

射线方程是以 θ 为参数的方程，θ 为射线切向与 x 轴正向的夹角，其物理意义十分明确。在传统理论中，均匀介质中的地震波前沿直射线传播，θ 是恒量，它不能也没有必要作为射线参数引入，对射线的描述用 x，z 就足够了。而在共形平坦的走时场的黎曼几何描述中，因走时场的速度及其梯度与 θ 有关，故有必要用 x，z，θ 来描述弯曲射线。对于传统的射线方程，在其求解时往往要引入其它辅助参数，否则难以对射线轨迹进行直观的描述。因(34)式较容易求解，故它在射线追踪的解析表达、数值计算以及波场变换中也是很有价值的表达式。

4　结论和讨论

利用速度模型建立走时场的黎曼流形，实质上就是把复杂介质的特性转换成空间特性，由速度分布函数描述了走时场空间的弯曲特性。在这一弯曲空间中，波前射线即为测地线(弯曲空间中的“直线”)，波动方程即为黎曼流形中的标量波动方程。这样黎曼几何对黎曼流形上曲线、曲面及波动的描述都可以应用到对复杂介质中地震波前射线和波动方程的讨论中，由此得到的许多结论对射线追踪的走时计算和反演问题的处理有重要价值。在欧氏空间中，人们总是在笛卡尔坐标系或极坐标系中讨论射线追踪的问题。对均匀介质，这两类坐标系的应用非常方便，但对复杂介质，其描述就不很简洁。引入黎曼几何描述之后，可在黎曼流形上建立射线坐标系(测地平行坐标系)和射线极坐标系(测地极坐标系)，复杂介质中的射线及波阵面的表述就有较简洁的形式。例如，在射线极坐标系中，θ＝常数，就描述了复杂介质中从原点出发的射线。

黎曼几何是描述弯曲空间(即流形)的一种强有力的数学工具。本文给出了地震波传播的黎曼几何的基本理论框架，由介质的速度分布函数引入了走时场的黎曼流形及描述此黎曼流形的多种特性函数，还给出了局域各向同性、各向异性及更为复杂介质中的射线方程在走时黎曼流形上的测地线方程及协变的波动方程，并用测地曲率的刘维尔表述，导出了二维空间坐标系内的射线参数方程。我们只给出了最简单的共形平坦的走时场的黎曼流形的计算，可看出黎曼几何在描述射线追踪、波场变换等方面的应用前景。对于地震波在更为复杂的介质中传播的走时黎曼流形及其各种特性函数，如度量、联络等表现为复杂的形式，而黎曼流形上的测地线方程和协变的波动方程是高度非线性的复杂的微分方程，其数值解将给出研究复杂介质中地震波传播的另一种途径。接下来我们还需要进一步分析比较它与现有各种声波各向异性方程的异同。

参　考　文　献

[1] WORELEY S C. The geometry of reflection[J]. Geophysics, 1993, 58(2): 293-297

[2] EGUCHI T, GILKEY P B, HANSON A J. Gravitation guage theories and differential geometry[J]. Physics Report, 1980, 66(6): 213-393

[3] ARNOLD V I. Mathematical methods of classical mechanics[M]. New York: Springer-Verlag, 1978: 4

[4] 郭弘，邓锡铭. Fermat 原理及稳态光束传输的微分几何描述[J]. 中国科学(A 辑)，1995，25(3)：273-279
GUO H, DENG X M. Differential geometry description of Fermat Theory and static optical transmission[J]. Science in China (Series A), 1995, 25(3): 273-279

[5] 郭弘，邓锡铭. 非稳态光传输的微分几何描述[J]. 中国科学(A 辑)，1995，25(4)：385-389
GUO H, DENG X M. Differential geometry description of no-static optical transmission[J]. Science in China (Series A), 1995, 25(4): 385-389

(编辑：朱　珠)