关于CL-空间和几乎CL-空间的一些性质

卢允照
(厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

摘要: 讨论具有"平坦性"凸性单位球结构的Banach空间的一些性质.首先根据CL-空间的定义证明了Banach空间l_1是CL-空间.通过证明l_1^3和l_∞^3具有非CL-子空间证明了维数大于2的CL空间不具继承性,即具有非CL-子空间,另外,总结了有限维CL-空间与其它一些Banach空间类的等价性.最后讨论了CL-空间和几乎CL-空间包含Banach空间c_0与l_1的一些性质以及实对偶空间成为几乎CL-空间的两个必要条件.

关键词: Banach空间;CL-空间和几乎CL-空间;单位球
中图分类号: O 177.2 文献标识码: A 文章编号: 0438-0479(2006)05-0617-04

1 介绍与记号

1960年,在研究函数空间$C(K)$和$L_1(u)$的几何特征的过程中,Fullerton介绍了CL-空间的概念[1]. 1978年,Lima A在他的文章中将CL-空间的概念做了推广,给出了几乎CL-空间的定义[2].

本文中记X为实Banach空间,B_X, S_X和X^*分别表示X的闭单位球,单位球面和对偶.给定X的子集A,用ext$A$和co$A$分别表示A的端点和凸包,A的均衡凸包和闭凸包分别记为$\mathrm{co}(A\cup -A)$和$\overline{\mathrm{co}}(A)$.

我们称X为CL-空间,如果$B_X=\mathrm{co}(H\cup -H)$,其中$H$是$S_X$的任意一个极大凸子集,而如果$B_X=\overline{\mathrm{co}}(H\cup -H)$,就称$X$是一个几乎CL-空间. CL-空间和Banach空间的端点相交性质(简记为E.P.I.P.)以及数值指标$n(X)$等于1的一类Banach空间有着密切联系.事实上,在有限维的情形X是CL-空间等价于X具有E.P.I.P.,也等价于$n(X)=1$.这一事实有助于我们研究有限维CL-空间的性质.

2 例 子

1960年,Fullerton证明了紧Hausdorff空间K上的实连续函数空间$C(K)$和可测空间上的实可积等价函数类空间$L_1(u)$是CL-空间. 2004年,Miguel Martin拓展了这些例子的数域范围:

性质1[3] (i) 复Banach空间$C(K)$是CL-空间;

(ii) 对每一个有限测度u,复的$L_1(u)$是一个几乎CL-空间;

(iii) 复的l_1和$L_1(0,1)$不是CL-空间.

在本文中只讨论实的情形.显然,c_0是CL-空间且由性质1可得l_∞也是CL-空间.我们将证明l_∞是CL-空间,而c_0是CL-空间的证明由c_0的单位球的结构易得,故略去.我们先介绍一个引理及记号.

从Krein-Milman定理和Hahn-Banach不难得到以下引理:

引理1[3] 若F为S_X的一个极大凸子集,则存在$x^*\in \mathrm{ext}(B_{X^*})$使得$F=\{x\in S_X, x^*(x)=1\}$.

我们记使得$\{x\in B_X, x^*(x)=1\}$为S_X的一个极大凸子集的所有$x^*\in \mathrm{ext}(B_{X^*})$为$\mathrm{mex}B_{X^*}$.

性质2 Banach空间l_1是CL-空间.

证 这里记l_1为X.我们将分两步证明.

(i) 令$H=\{\{x_n\}\in S_X$, 其中$x_n\geqslant 0\}$,显然H是S_X的一个极大凸子集.对每个$x=\{x_n\}\in B_X$,其中当$n\in N_1$时$x_n\geqslant 0$,当$n\in N_2$时$x_n<0$.令$x=x'+x''$,这里$x'=\{x'_n\}$满足当$n\in N_1$时$x'_n=x_n$, $n\in N_2$时$x'_n=0$; $x''=\{x''_n\}$满足当$n\in N_1$时$x''_n=0$, $n\in N_2$时$x''_n=x_n$,则$\|x\|=\|x'\|+\|x''\|$.令$y=\{y_n\}$使得$y_n\geqslant 0$, $\|y\|=1-\|x\|$.再令$z_1=x'+\frac{y}{2}$, $z_2=x''-\frac{y}{2}$,则$\|z_1\|+\|z_2\|=\|x'\|+\|x''\|+\|y\|=\|x\|+1-\|x\|=1$,进一步,有$x=z_1+z_2=\|z_1\|\frac{z_1}{\|z_1\|}+\|z_2\|\frac{z_2}{\|z_2\|}$.由$\frac{z_1}{\|z_1\|}\in H$和$\frac{z_2}{\|z_2\|}\in -H$,得$\|z_1\|\frac{z_1}{\|z_1\|}+\|z_2\|\frac{z_2}{\|z_2\|}\in \mathrm{co}(H\cup -H)$以及$B_X=\mathrm{co}(H\cup -H)$.

收稿日期: 2006-02-09
作者简介: 卢允照(1980-),男,硕士研究生.

(ii) 设 F 是 S_X 的任意极大凸子集, 由引理1, 存在 $f \in \mathrm{mex} B_{X^*}$, 其中 $f = \{f_i\} = \{\pm 1\}$, 满足 $F = \{x \in B_X: f(x) = 1\}$. 令 $N'_1 = \{i, f_i = 1\}$, $N'_2 = \{i, f_i = -1\}$, 则我们可记 F 为 $F = \{y = \{y_n\} \in S_X\}$, 其中当 $i \in N_1$ 时 $y_i \geqslant 0$, 当 $i \in N_2$ 时 $y_i \leqslant 0$. 对每一个 $y = \{y_n\} \in H$ 令 $y' = \{y'_n\}$, 其中当 $n \in N'_1$ 时 $y'_n = y_n$, 当 $n \in N'_2$ 时 $y'_n = 0$ 并令 $y'' = \{y''_n\}$, 其中当 $n \in N_2$ 时 $y''_n = y_n$, 当 $n \in N'_1$ 时 $y''_n = 0$. 设 $z_1 = \frac{y'}{\|y'\|}$, $z_2 = \frac{y''}{\|y''\|}$, 则有 $z_1 \in F$, $z_2 \in -F$ 和 $\|y'\| + \|y''\| = 1$, $y = \|y'\| z_1 + \|y''\| z_2 \in \mathrm{co}(F \cup -F)$. 同理, 对 $z \in -H$, 有 $z \in \mathrm{co}(F \cup -F)$, 则可得 $H, -H \subseteq \mathrm{co}(F \cup -F)$. 由 $B_X = \mathrm{co}(H \cup -H)$ 和 $\mathrm{co}(H \cup -H) \subseteq \mathrm{co}(F \cup -F)$, 得对 S_X 的任意极大凸子集 F 都有 $B_X = \mathrm{co}(F \cup -F)$, 所以 l_1 是个 CL- 空间.

3 有限维 CL- 空间

定义 1[4] 称一个 Banach 空间 X 的数值指标为 1, 记为 $n(X) = 1$, 当且仅当对每个 $T \in L(X)$, T 的范数可表为

$$\|T\| = \sup\{|x^*(Tx)|: x \in S_X, x^* \in S_{X^*}, x^*(x) = 1\}.$$

其中 $L(X)$ 是 X 上的所有有界线性算子的 Banach 代数.

如果 X 是几乎 CL- 空间, 则 $n(X) = 1$[5], 反之 $n(X) = 1$ 且 X 具有 RNP 则 X 是几乎 CL- 空间[6].

在有限维的情形 McGregot C 给出了如下定理刻画 $n(X) = 1$ 的空间.

定理 1[4] 有限维空间 X 满足 $n(X) = 1$ 当且仅当对每个 $x \in \mathrm{ext}(B_X)$ 和每个 $x^* \in \mathrm{ext}(B_{X^*})$ 有 $|x^*(x)| = 1$.

定义 2[2] 称空间 X 的球族 $\{B(a_i, r_i)\}_{i \in \Gamma}$ 具有弱交性质如果对每个 $f \in B_{X^*}$ 都有 $\bigcap_{i \in \Gamma} B(f(a_i), r_i)$ 非空.

定义 3[2] 称 X 具有 E. P. I. P. 如果对 X 的每个满足弱交性质以及 $\{B(a_1, r_1)\}$ 交 $\{B(a_2, r_2)\}$ 于一点 a 的球族 $\{B(a_i, r_i)\}_{i=1}^{3}$ 有 $a \in B(a_3, r_3)$.

由 X 具有 E. P. I. P. 当且仅当对所有 $x \in \mathrm{ext}(B_X)$ 和 S_X 的每个极大凸子集 F 都有 $x \in (F \cup -F)$[5], 我们可由 CL- 空间的定义, $B_X = \mathrm{co}(F \cup -F)$, 得到如果 X 是 CL- 空间且其单位球具有端点, 则 X 具有 E. P. I. P.

文献[5] 证明了 X 具有 E. P. I. P. 当且仅当对每个 $x \in \mathrm{ext}(B_X)$ 和每个 $x^* \in \mathrm{ext}(B_{X^*})$ 都有 $|x^*(x)| = 1$, 进一步阐明了 CL- 空间和具有 E. P. I. P. 性质的空间的关系, 即如下定理:

定理 2[4] 若 X 为 Banach 空间, 则有 (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii):

(i) X^* 是 CL- 空间;

(ii) X^* 具有 E. P. I. P.

(iii) X 是几乎 CL- 空间.

以上定理使得我们对 CL- 空间和几乎 CL- 空间的性质在对偶的情形下有了更清楚的了解.

有了以上结果就可得到以下关于有限维空间的推论:

推论 1 如果 $\dim(X) < \infty$, 则以下论述是等价的

(i) X 是 CL- 空间;

(ii) X 是几乎 CL- 空间;

(iii) $n(X) = 1$;

(iv) X 具有 E. P. I. P;

(v) X^* 是 CL- 空间.

文献[4] 还给出了有限维的数值指标为 1 的空间的几何刻画, 从推论 1 可将它应用于有限维的 CL- 空间:

定理 3 若 X 为有限维的 CL- 空间, 则对 $x, y \in \mathrm{ext} B_X$, $x \neq y$, 有 $\{(1-t)x + ty, 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subseteq S_X$.

由定理 3 不难得到若 X 是二维 CL- 空间, 则 B_X 是平行四边形, 而如果 X 是三维 CL- 空间, 则 B_X 是平行六面体或平行八面体.

至此我们对于 $\dim(X) \leqslant 3$ 的 CL- 空间的单位球 B_X 的几何结构已经完全清楚了. 事实上, 所有二维 CL 空间都等距同构于 l_1^2 或 l_∞^2; 所有三维 CL- 空间都等距同构于 l_1^3 或 l_∞^3.

如果 X 是 l_1^3 或 l_∞^3, 则由其单位球的结构可以证明存在 X 的子空间 Y 使得 Y 不是 CL- 空间. 接下来的我们给出详细证明:

定理 4 若 X 是 CL- 空间且 $\dim X \geqslant 3$, 则存在 X 的子空间 Y 不是 CL- 空间.

证 显然只需证明三维的情形. 由三维 CL- 空间的单位球是平行六面体或平行八面体知只需证明 l_1^3 和 l_∞^3 都有子空间不是 CL- 空间. 以下将分两部分证明:

(i) 如果 $X = l_\infty^3$, 则 $Y = \{(x, y, z) \in l_\infty^3, x + y + z = 0\} = \ker f$, 是 X 的二维子空间, 其中 $f = (1, 1, 1) \in X^*$, 并令 $H = \{(x, y, z) \in Y: z = 1\} \cap S_Y$. 首先证明 H 是 S_Y 的极大凸子集.

若 F 是 S_Y 的凸子集且 $H \subseteq F$, 则对每个 $(x_0, y_0,$

$z_0) \in F \subseteq S_Y$ 和 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \in H \subseteq F$, 有 $\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) + \frac{1}{2}(x_0, y_0, z_0) = (-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_0, -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}y_0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z_0) \in F$. 由 $|-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_0| \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < 1$ 和 $|-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}y_0| < 1$ 可得 $|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z_0| = 1$ 和 $z_0 = 1$, 则有 $(x_0, y_0, z_0) \in H$, 即 $F = H$, 这意味着 H 是 S_Y 的极大凸子集.

接下来证明 $B_Y \neq \mathrm{co}(H \cup -H)$. 对 $(-1, 1, 0) \in B_Y$, 如果 $(-1, 1, 0) \in \mathrm{co}(H \cup -H)$, 则存在 a_i 和 $(x_i, y_i, z_i) \in H$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant 1$ 使得 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = -1$, $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} a_i z_i = 0$. 由 $(x_i, y_i, z_i) \in H$, 有 $z_i = 1$ 和 $x_i + y_i = -1$, 另外从 $|x_i| \leqslant 1$, $|y_i| \leqslant 1$, 可得 $y_i \leqslant 0$. 现在, 利用 $z_i = 1$ 和 $\sum_{i=1}^{n} a_i z_i = 0$ 我们有 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$. 注意到 $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 1$, 则可得 $a_{i_0} > 0$. 从而有 $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \sum_{i \neq i_0} a_i y_i + a_{i_0} y_{i_0} \leqslant \sum_{i \neq i_0} a_i y_i \leqslant \sum_{i \neq i_0} |a_i| |y_i| \leqslant \sum_{i \neq i_0} |a_i| < \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant 1$, 矛盾, 所以 Y 不是 CL- 空间.

(ii) 如果 $X = l_1^3$, 则 $Y = \{(x, y, z) \in l_1^3, x + y + z = 0\} = \ker f$ 是 X 的子空间, 其中 $f = (1, 1, 1) \in X^*$, 并令 $H = \{(x, y, z) \in Y, z = -\frac{1}{2}\} \cap S_Y$. 首先说明 H 是 S_Y 的极大凸子集.

对于 $(x_i, y_i, -\frac{1}{2}) \in H$, $i = 1, 2$, 由 $|x_i| + |y_i| + |-\frac{1}{2}| = 1$ 和 $x_i + y_i - \frac{1}{2} = 0$, 有 $|x_i| + |y_i| = \frac{1}{2}$ 和 $x_i + y_i = \frac{1}{2}$, 这意味着 $x_i, y_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, 则对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 有 $|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| + |\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2| + |\lambda(-\frac{1}{2}) + (1-\lambda)(-\frac{1}{2})| = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 + \frac{1}{2} = 1$, 所以 H 是凸的.

若 F 是 S_Y 的凸子集且 $H \subseteq F$, 则对每个 $(x_0, y_0, z_0) \in F$ 和 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}) \in H$, 有 $\frac{1}{2}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{8} + \frac{1}{2}x_0, \frac{1}{8} + \frac{1}{2}y_0, -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z_0) \in F$. 由 $1 = |\frac{1}{8} + \frac{1}{2}x_0| + |\frac{1}{8} + \frac{1}{2}y_0| + |-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z_0| \leqslant \frac{1}{8} + \frac{1}{2}|x_0| + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}|y_0| + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}|z_0| = 1$, 可得 $|\frac{1}{8} + \frac{1}{2}x_0| = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}|x_0|$, 并且如果 $\frac{1}{8} + \frac{1}{2}x_0 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}|x_0|$ 则 $-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}|x_0| + \frac{1}{2}x_0 \geqslant 0$, 矛盾, 所以 $\frac{1}{8} + \frac{1}{2}x_0 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}|x_0|$, 既有 $x_0 \geqslant 0$; 同理可得 $y_0 \geqslant 0$. 又从 $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ 和 $|x_0| + |y_0| + |z_0| = 0$, 易得 $z_0 = -\frac{1}{2}$ 和 $(x_0, y_0, z_0) \in H$ 即 $F = H$, 所以 H 是 S_Y 的极大凸子集.

接下来证明 $B_Y \neq \mathrm{co}(H \cup -H)$. 取 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in B_Y$, 如果 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in \mathrm{co}(H \cup -H)$, 则存在 a_i 和 $(x_i, y_i, z_i) \in H$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 使得 $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant 1$ 和 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \frac{1}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \frac{1}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i z_i = 0$ 都成立. 由 $z_i = -\frac{1}{2}$ 和 $\sum_{i=1}^{n} a_i z_i = 0$ 可得 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$. 注意 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \frac{1}{2}$, 则至少存在一个 $a_{i_0} < 0$. 从 $x_i + y_i + z_i = 0$ 和 $|x_i| + |y_i| + |z_i| = 1$ 易得 $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{2}$. 又由 $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{2}$, 可得 $\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i \neq i_0} a_i x_i + a_{i_0} x_{i_0} \leqslant \sum_{i \neq i_0} a_i x_i \leqslant \sum_{i \neq i_0} |a_i| |x_i| < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant \frac{1}{2}$, 得到矛盾. 所以 $B_Y \neq \mathrm{co}(H \cup -H)$, 从而 Y 不是 CL- 空间.

4　一些关于同构的结果

既然几乎 CL- 空间和数值指标为 1 的 Banach 空间有着密切的联系, 并且已经知道一些关于数值指标为 1 的空间的同构结果, 我们将结合数值指标为 1 的空间讨论几乎 CL- 空间的同构性质.

定理 5[7]　令 X 为无限维的 Banach 空间, 且 $n(X) = 1$. 如果 X 具有 RNP, 则 X 包含 l_1. 如果 X 是 Asplund 空间, 则 X^* 包含 l_1.

已知的关于 CL- 空间的同构性质可在文献[3] 中查到, 我们将它列出:

定理 6[3]　若 X 是一个无限维几乎 CL- 空间, 则 X^* 包含 l_1. 进一步, 如果 X^* 是可分的, 则 X 包含 c_0.

现在可得到一些简单却有用的关于 CL- 空间和几何 CL- 空间的同构结论. 首先是关于对偶 CL- 空间的同构性质:

定理 7　如果 X 是一个无限维的对偶空间且 X 是 CL- 空间, 则 X 包含 l_1.

证　假设 X 是 Y 的对偶. 既然 X 是无限维的 CL- 空间, 则由定理 2, Y 是无限维几乎 CL- 空间, 又由定理 6 可得 X 包含 l_1.

接下来我们给出在一定条件下几乎 CL- 空间的同构性质.

定理 8　如果 X 是一个自反的几乎 CL- 空间, 则 X 一定是有限维的.

证　从 X 是自反的可得 X 具有 RNP. 又从 X 是自反的可得 X^* 也是自反空间, 从而 X^* 也具有 RNP, 这意味着 X 是 Asplund 空间. 假设 $\dim X = \infty$, 由 X 是 CL- 空间, 我们有 $n(X) = 1$, 又因为 X 具有 RNP, 由定理 5 可得 X 包含 l_1. 注意到 X 是个 Asplund 空间, 这与 Asplund 空间不能包含 l_1 这个事实矛盾, 所以 X 一定是有限维的.

事实上, 从定理 8 的证明可得到几个几乎 CL- 空间的同构性质的推论:

推论 2　若 X 是无限维的几乎 CL- 空间且 X 具有 RNP, 则 X 包含 l_1.

推论 3　若 X 是几乎 CL- 空间且 X 是具有 RNP 的 Asplund 空间, 则 X 一定是有限维的.

在本节的最后我们给出两个使得对偶空间成为几乎 CL- 空间的必要条件. 在这之前, 有必要介绍一个定义和引理.

引理 2[3]　若 X 是几乎 CL- 空间, 则对每个 $x^{**} \in \mathrm{ext} B_{X^{**}}$ 和每个 $x^* \in \mathrm{mex} B_{X^*}$ 都有 $|x^{**}(x^*)| = 1$.

定义 4[8]　若 K 是 X^* 一个 w^* - 紧凸子集, 称 K 的子集 B 为 K 的边界如果对每个 $x \in X$ 都有 $f \in B$ 使得 $f(x) = \sup\{g(x): g \in K\}$.

定理 9　若 X 是可分的 Asplund 空间且是几乎 CL- 空间, 则 X^* 是几乎 CL- 空间.

证　对 $x^{**} \in \mathrm{mex} B_{X^{**}}$, 令 $H = \{x^* \in B_{X^*} : |x^{**}(x^*)| = 1\}$, 由引理 2 有 $\mathrm{mex} B_{X^*} \subseteq H$, 又因为 $\mathrm{mex} B_{X^*}$ 是不包含 l_1 的可分空间的边界, 我们可利用文献[10, TheoremIII. I] 得到 $B_{X^*} = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{mex} B_{X^*})$, 则 $B_{X^*} = \overline{\mathrm{co}} H$

定理10　若 X 是几乎 CL- 空间且 X^* 是范数可分的, 则 X^* 是几乎 CL- 空间.

证　既然 X^* 是范数可分的, $\mathrm{mex} B_{X^*}$ 也是范数可分的. 又由 Kreirr Milman 定理不难得到 $\mathrm{mex} B_{X^*}$ 是 X 的边界, 则由文献[8] 可得 $B_{X^*} = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{mex} B_{X^*})$. 所以由定理 9 的证明可得 X^* 是几乎 CL- 空间.

参考文献:

[1] Fullerton R E. Geometrical Characterizations of Certain Function Spaces[C]. Jerusalem: Jeru Salem Academic Press, 1961: 227- 236.

[2] Lima A. Intersection properties of balls in spaces of compact operators[J]. Ann. Inst. Fourier, 1978, 28(3): 35- 65.

[3] Martin M, Rafael P R. On CL- spaces and almost CL- spaces[J]. Ark. Mat., 2004, 42: 107- 118.

[4] McGregor C M. Finite dimensional normed linear spaces with numerical index 1[J]. J. London Math. Soc., 1971, 3(2): 717- 721.

[5] Martin M. A survey on the numerical index of a Banach space[J]. Extracta Math., 1991, 15: 265- 276.

[6] Miguel Martin. Banach spaces having the RNP and numerical index 1[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2003, 131: 3407- 3410.

[7] Lopez G M, Martin M, Paya R. Real Banach space with numerical index 1[J]. Bull. London Math. Soc., 1999, 31: 207- 212.

[8] Fonf V P, Lindenstrauss J. Boundaries and generation of convex sets[J]. Israel Journal of Mathematics, 2003, 136: 173- 187.

Some Properties of CL- space and Almost CL- space

LU Yurr zhao

(School of Mathematical Science, Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: The purpose of this paper is to study the properties of Banach spaces whose unit ball have structure of extreme form of convexity. At first this article proves that the Banach spaces l_1 is a CL- space by definition of CL- space. The main results are that if X is a CL- space and $\dim X \geqslant 3$, then X has non CL- subspaces and this article shows it from the fact that l_1^3 and l_∞^3 have non CL- subspaces. At last it discusses the properties of CL- spaces and almost CL- spaces containing c_0 and l_1.

Key words: Banach space; CL- space and almost CL- space; unit ball