中国科学: 数学 2025 年 第 55 卷 第 1 期: 115～130
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

综 述

鸟瞰 Kähler 势空间中的测地线问题

献给彭家贵教授 80 寿辰

陈秀雄[1*], 程经睿[2], 徐钰伦[2]

1. 中国科学技术大学几何与物理研究中心, 合肥 230026;
2. Department of Mathematics, Stony Brook University, Stony Brook, NY 11794, USA
E-mail: xiuxiong.chen@gmail.com, jingrui.cheng@stonybrook.edu, yulun.xu@stonybrook.edu

收稿日期: 2024-04-02; 接受日期: 2024-05-24; 网络出版日期: 2024-09-29; * 通信作者

摘要 本文讨论 Kähler 势空间中的测地线问题及其在常标量曲率问题中的应用. 本文从 Mabuchi (1987)、Donaldson (1999) 和 Semmes (1992) 发现的几何图景出发, 讲述测地线问题产生的背景, 然后讨论关于测地线问题的最新进展, 最后讨论测地线在常标量曲率的唯一性和存在性问题当中的应用.

关键词 Kähler 势空间 测地线 常标量曲率 Kähler 度量

MSC (2020) 主题分类 32W20, 32Q15, 58E11

1 引言

本综述讨论自 Donaldson [30] 二十多年前提出宏伟的纲领以来, 对 Kähler 度量空间的几何结构的研究最新进展, 重点关注测地线问题的进展及其在经典 Kähler 几何问题中的应用. 这是一个极其活跃的研究领域. 关于这个主题有大量的文献, 这里按照本文作者的研究兴趣提供一个对这一重要主题的鸟瞰. 感兴趣的读者可参见文献 [28, 33, 40, 51] 以更全面地了解这个主题.

设 (V, ω_0) 是一个紧 Kähler 流形, 则可以定义 Kähler 势的空间为

$$\mathcal{H} = \{\varphi \in C^\infty(V) : \omega_\varphi = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi > 0 \text{ 在 } V \text{ 上}\}.$$

在任意 $\varphi \in \mathcal{H}$ 处, 切空间 $T_\varphi\mathcal{H}$ 是 $C^\infty(V)$. 在全纯坐标中, Kähler 形式为

$$\omega_\varphi = g_{\varphi,\alpha\bar{\beta}}\frac{\sqrt{-1}}{2}dz^\alpha \wedge \overline{dz^\beta} = \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\alpha \bar{\partial} z_\beta}\right)\frac{\sqrt{-1}}{2}dz^\alpha \wedge \overline{dz^\beta}.$$

其标量曲率 R_φ 有如下表达式:

$$R_\varphi = -g_\varphi^{\alpha\bar{\beta}}\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\log\det(g_{\varphi,i\bar{j}}).$$

英文引用格式: Chen X X, Cheng J R, Xu Y L. A bird's eye view on geodesic problems in the space of Kähler potentials (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 115–130, doi: 10.1360/SSM-2024-0098

Calabi [8,9] 提出了一个宏伟的纲领, 即理解常标量曲率 Kähler (constant scalar curvature Kähler, cscK) 度量的存在性和唯一性问题. 这一问题现已经成为 Kähler 几何中的中心问题. 按照定义, cscK 度量满足以下方程:

$$R_\varphi = \underline{R} = \frac{[\mathrm{Ric}(\omega_0)] \cdot [\omega_0]^{[n-1]}}{[\omega_0]^{[n]}}.$$

这是一个 4 阶完全非线性偏微分方程. 在典范 Kähler 类中, cscK 度量简化为 Kähler-Einstein (KE) 度量, 后者是 cscK 度量的更著名的 "表亲". Yau [52] 解决了关于具有零或负第一 Chern 类的流形上 KE 度量的著名 Calabi 猜想, 并因此获得了菲尔兹奖. 然而, Calabi 关于 cscK 度量更一般的存在性问题遇到了极大困难. 一个原因可能是, 对应的偏微分方程是 4 阶的. 虽然在一些特殊情形下取得了很多进展, 如直纹流形 [29,43,44]、齐性 Kähler 流形 [45] 或 cohomogeneity one 的 Kähler 流形 [37], 但在一般的情形下进展甚微. 在这种背景下, Donaldson [30] 在 Kähler 几何中发起了一项雄心勃勃的计划, 在这个计划中, 他将 cscK 问题和 moment map 相结合: Donaldson 认为 Kähler 度量的空间在形式上是一个非紧对称空间, 而标量曲率函数是从与固定辛形式兼容的近复结构空间到某个无穷维辛结构群的 Lie 代数的 moment map, 后者恰好是流形中的所有实值光滑函数的空间. 有了这个想法, Calabi 的寻找 cscK 度量的问题被归结为在无穷维空间中寻找这个 moment map 的零点. 这种新的观点提供了一系列相关的、几何上有意义的问题, 这些问题在这个视角下激发了很多的研究. 20 多年后, Donaldson 的方案显然取得了巨大的成功, 我们在本文中作一个回顾.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节描述 Kähler 势空间的直观几何图像, 以及如何将 cscK 度量问题构造为这样一个空间上的变分问题. 求解测地方程的可解性和正则性对于严格建立这个几何图像至关重要. 第 3 节总结了解决测地方程所取得的进展 (可以简化为在具有边界的流形上解齐次复 Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 问题). 第 4 节解释关于 cscK 度量的唯一性和存在性所取得的进展, 其中 Kähler 势空间中的测地线起着至关重要的作用.

2 Mabuchi、Semmes 和 Donaldson 引入的 Riemann 结构

在经典微分几何中, 有一个有限维 Lie 群的显著对偶特征: 设 L 是一个具有正的截面曲率的 Lie 群. 在其双不变度量下, 其截面曲率可以写作

$$K(\sigma) = \frac{1}{4}\|[X, Y]\|^2,$$

其中 X 和 Y 是 L 的单位切向量且彼此正交, σ 是 X 和 Y 生成的 2 维子空间. 假设 l 是 L 的 Lie 代数. 对这个 Lie 代数进行复化得到 $l + \sqrt{-1}l$. 对这个新的 Lie 代数进行积分得到新的 Lie 群 $L^{\mathbb{C}}$. 考虑它关于 L 的商作为 $H = L^{\mathbb{C}}/L$. 这是一个非紧对称空间, 其非正曲率为

$$K(\sigma) = -\frac{1}{4}\|[X, Y]\|^2,$$

其中 X 和 Y 是 L 的单位切向量且彼此正交, σ 是 X 和 Y 生成的 2 维子空间. Donaldson [30] 指出了这个对偶图景可以扩展到无穷维空间, 但 Lie 代数的 "复化" 不能再被积分为一个 Lie 群. 令 $\mathcal{L}$ 为 (V, ω) 的辛微分同胚群, 它保持辛形式 ω 并且具有非负的截面曲率. 这对应于有限维中非负曲率的 "非紧型 Lie 群". 令 $\mathcal{L}^c$ 为 $\mathcal{L}$ 的形式上的复化, 则 $\mathcal{L}^c/\mathcal{L} = \mathcal{H}$ 恰好是 Kähler 势的空间. 因此, 它自然地具有非正曲率 (参见下面的猜想 2.3).

Mabuchi [49] 在 $\mathcal{H}$ 中引入了一个 Riemann 度量 (后来被 Semmes [50] 和 Donaldson [30] 以不同的视角重新发现): 对于任意的 $\psi \in T_\varphi \mathcal{H}$, 可以定义

$$\|\psi\|_\varphi^2 = \int_V \psi^2 d\mu_\varphi.$$

对于任意路径 $\varphi : [0,1] \ni t \to \varphi(t) \in \mathcal{H}$, 其长度由以下公式给出:

$$\int_0^1 \sqrt{\int_V \varphi'(t)^2 d\mu_{\varphi(t)}} dt.$$

Donaldson 提出了以下猜想:

猜想 2.1 [30] 空间 $\mathcal{H}$ 是一个度量空间, 其路径距离由上述 L^2 内积定义.

可以 (形式上) 计算连接两个 Kähler 势的测地方程. 对于任意两个 Kähler 势 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$, 如果曲线 $\varphi : [0,1] \to \mathcal{H}$ 满足方程

$$\varphi''(t) - \frac{1}{2}|\nabla \varphi'(t)|_{\varphi(t)}^2 = 0, \quad \varphi(i) = \varphi_i, \quad \text{对于 } i = 0, 1, \tag{2.1}$$

则称其为连接 φ_0 和 φ_1 的测地线. 这里的协变导数和 $|\cdot|_{\varphi(t)}$ 都是使用度量 $\omega_{\varphi(t)}$ 定义的. 测地方程表明可以定义一个 Levi-Civita 联络 ∇ 为

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} v = \frac{\partial v}{\partial t} - (\nabla \varphi'(t), \nabla v(t))_{\varphi(t)}, \quad \forall\, v \in T_{\varphi(t)}\mathcal{H}.$$

有了这些信息, Donaldson [30] 证明了在微分几何意义上, Kähler 度量的空间是一个对称空间. 更重要的是, Donaldson 提出了一系列相互关联的猜想, 在 Kähler 几何学的最新发展中起着至关重要的作用.

猜想 2.2 [30] Kähler 势空间 $\mathcal{H}$ 是测地线凸的, 即对于任意两个 Kähler 势 $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{H}$, 方程 (2.1) 有一个光滑解.

值得注意的是, 它的对偶空间, 即恰当辛变换群的空间, 不是测地线凸的.

猜想 2.3 [30] 在由 L^2 内积定义的路径距离下, 空间 $\mathcal{H}$ 具有非正曲率.

这在形式上已被 Donaldson [30] 所给出 (参见下面的定理 3.1).

在模去一个常数的意义下, Kähler 势的空间与该类中的 Kähler 度量的空间等价. 更准确地, 可以定义

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} : I(\varphi) = \sum_{p=0}^n \frac{1}{(p+1)!(n-p)!} \int_V \varphi \omega_0^{n-p} \wedge (\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^p = 0 \right\}.$$

容易验证, 当 I 限制在一个测地线段上时是一个常数. 因此 $\mathcal{H}_0$ 恰好是 $I^{-1}(0)$, 是 $\mathcal{H}$ 的完全测地子流形. 可以将 cscK 度量问题表述为在空间 $\mathcal{H}$ 上的一个变分问题, 这一问题的解是通过 Mabuchi 定义的 K- 能量的临界点来得到的. K- 能量通过如下的微分表达式定义:

$$dK(\varphi, v) = -\int_V v(R_\varphi - \underline{R})\omega_\varphi^n, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{H}, \quad v \in T_\varphi \mathcal{H}.$$

通过沿着连接 0 到 φ 的任意曲线积分, 可得到 K- 能量的一个显式表达式 (参见文献 [11]). Mabuchi [49] 发现了 K- 能量沿着光滑测地线是凸的. 因此, 至少在形式上, cscK 度量不仅是 K- 能量的临界点, 而

且是它的极小值点. 此外, 除非测地线是由一族全纯变换的一参数族引起的, 否则 K- 能量是严格凸的. 这使人们期望在全纯变换的作用下唯一确定 cscK 度量. 对于存在性问题, 由于凸性, 我们应该能够从 Mabuchi 能量在 "无穷远处" 的行为中推断出来, 而 Donaldson [30] 提出了以下直观的猜想, 将 cscK 度量不存在性与测地线上的 K- 能量的行为联系起来:

猜想 2.4 [30] 假设 $\mathrm{Aut}_0(M,J)=0$, 则以下陈述是等价的:

(1) $\mathcal{H}$ 中不存在 cscK 度量;

(2) 存在一个 Kähler 势 $\varphi_0\in\mathcal{H}_0$, 并且存在一个从 φ_0 起始的 $\mathcal{H}_0$ 中的测地射线 $\rho(t)$ $(t\in[0,+\infty))$, 使得 K- 能量是非递增的;

(3) 对于任意的 Kähler 势 $\psi\in\mathcal{H}_0$, 存在一个从 ψ 起始的 $\mathcal{H}_0$ 中的测地射线 $\rho(t)$ $(t\in[0,+\infty))$, 使得 K- 能量是非递增的.

K- 能量的梯度流, 在文献中被称为 Calabi 流, 是由 Calabi [8] 在 1982 年引入的:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=R_\varphi-\underline{R}.$$

当 Calabi 在 20 世纪 50 年代启动他的雄心勃勃的计划时, 他梦想着在每个 Calabi 类中找到一个规范度量, 并打算使用上述流方程来找到它. 由于 Levine [47] 的反例的出现, 原始的设想必须适当地修改. 随后, cscK 的存在性的一个障碍 (现在称为 Calabi-Futaki 不变量) 被 Futaki [34] 和 Calabi [9] 发现. 接下来描述已经建立的严格结果. 这些结果比上述猜想所设想的要复杂得多, 这一复杂性与测地方程 (2.1) 的正则性有关.

3 解测地方程的进展

首先, 可以将方程 (2.1) 重新写为一个复 Monge-Ampère 方程, 这是基于 Semmes [50] 的观察. 可以将 $\boldsymbol{R}$ 表示为一个带边界的 Riemann 面. 特别地, 可以取圆柱面

$$\boldsymbol{R}=\{w\in\mathbb{C}:0\leqslant\mathrm{Re}w\leqslant1\}/\Gamma,$$

这里 $\Gamma=\{\phi_k:w\to w+k\mathrm{i}\mid k\in\mathbb{Z}\}$. 这是主要感兴趣的情形. 将 π 表示为从 $V\times\boldsymbol{R}$ 到 V 的投影. 那么 $\Omega_0=\pi^*\omega_0+\sqrt{-1}dw\wedge\overline{dw}$ 是 $V\times\boldsymbol{R}$ 上的 Kähler 度量, 其中 $(w=t+\sqrt{-1}s)$ 是圆柱面 $\boldsymbol{R}$ 的标准坐标. 记 $z'=(z_1,z_2,\dots,z_n)$, $z_{n+1}=w$, $z=(z',z_{n+1})$. 令 $\varphi(z)=\varphi(z',w)$ 是 $V\times\boldsymbol{R}$ 上关于 Ω_0 的多重次调和函数. 然后为了解测地方程 (2.1), 只需要解以下退化 Monge-Ampère 方程:

$$\begin{aligned}&\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial\varphi}{\partial z_\alpha\bar\partial z_\beta}\right)_{(n+1)(n+1)}=0\ \text{在 } V\times\boldsymbol{R}\ \text{中成立},\\&\varphi(z,w)|_{t=i}=\varphi_i(z')\ \text{对于 } i=0,1\ \text{以及任意的 } z'\in V\ \text{成立},\end{aligned}\tag{3.1}$$

这里 g 是与 ω 对应的度量.

3.1 具有有界复 Hessian 的解

3.1.1 解的存在性

Chen [12] 首先通过求解 (3.1) 的方式, 迈出了建立猜想 2.2 的第一步. (3.1) 可以表述为以下的 Dirichlet 问题. 具体地, 令 ϕ_0 是 $V\times\boldsymbol{R}$ 上的一个光滑函数, 满足关于 $\pi^*\omega_0+\sqrt{-1}dw\wedge d\bar w$ 是多重次

调和的, 并且令 $0<\epsilon\leqslant 1$. 令 φ_0 是 $\partial(V\times\boldsymbol{R})$ 上的一个光滑函数, 我们希望解出下式:

$$\begin{aligned}&\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\alpha\partial\bar z_\beta}\right)_{(n+1)(n+1)}=0 \text{ 在 } V\times\boldsymbol{R} \text{ 上成立},\\&\varphi=\varphi_0 \text{ 在 } \partial(V\times\boldsymbol{R}) \text{ 上成立}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

为了求解 (3.2), 我们考虑 (3.2) 的如下非退化逼近:

$$\begin{aligned}&\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\alpha\partial\bar z_\beta}\right)_{(n+1)(n+1)}=\epsilon\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z_\alpha\partial\bar z_\beta}\right)_{(n+1)(n+1)} \text{ 在 } V\times\boldsymbol{R} \text{ 中成立},\\&\varphi=\varphi_0 \text{ 在 } \partial(V\times\boldsymbol{R}) \text{ 上成立}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

文献 [12] 证明了以下结果:

定理 3.1 对于每个 $\epsilon>0$, (3.3) 有唯一解. 存在一个与 ϵ 无关的常数 C, 使得以下成立:

$$\begin{gathered}\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\alpha\partial\bar z_\beta}\right)_{(n+1)(n+1)}\geqslant 0,\\\|\varphi\|_{C^0}+\|\nabla\varphi\|_{C^0}+\|\Delta\varphi\|_{C^0}\leqslant C.\end{gathered}$$

在上述中, ∇ 和 $\Delta\varphi$ 与乘积空间上的度量 $\pi^*\omega_0+\sqrt{-1}dw\wedge d\bar w$ 相关. 因此, 当 $\epsilon\to 0$ 时, 可以得到 (3.2) 的弱解.

为了得到一致的 (与 ϵ 无关的) 估计, 首先需要通过构造一个下解来获得 C^0 估计. 然后, Chen [12] 利用了 Yau 在文献 [52] 中的著名工作, 以及 Guan 和 Spruck [36] 和 Guan [35] 发展的技巧, 推导出了 $\Delta\varphi$ 的估计 (取决于 φ 和 $\nabla\varphi$), 包括内部和边界上的估计. 然后通过爆破分析获得了梯度估计, 这里用到了 $n+\Delta\varphi$ 的界被 $1+|\nabla\varphi|^2$ 所控制的重要估计 (参见文献 [12]).

3.1.2 几何意义

有了这些估计, Chen [12] 能够严格证明 Donaldson [30] 的许多形式化论证.

定理 3.2 [12] 以下结论成立:

(1) Kähler 势的空间 $\mathcal{H}$ 可以通过 $C^{1,\bar 1}$ 测地线段路径连通, 这里 $C^{1,\bar 1}$ 表示具有有界复 Hessian 的函数空间;

(2) Kähler 势的空间 $\mathcal{H}$ 是一个真正的度量空间;

(3) 如果第一 Chern 类是非正的, 则在任何 Kähler 类中 cscK 度量是唯一的.

注 3.1 定理 3.2(1) 证实了猜想 2.1. 定理 3.2(2) 证实了猜想 2.2. 这令人惊讶, 因为相应的 Hofer 度量 [42] (使用 L^∞ 范数) 众所周知不是度量空间. 定理 3.2(3) 是自文献 [49] 以来在唯一性问题上的第一次重大进展, 当第一 Chern 类为正时, KE 度量在差一个全纯变换的意义下是唯一的. 第一 Chern 类为负的情形是在 20 世纪 50 年代由 Calabi 证明的.

Calabi 和 Chen [10] 共同利用上述的一致估计证明了以下结果.

定理 3.3 [10] 以下结论成立:

(1) 空间 $\mathcal{H}$ 在 Alexandrov 意义上是非正曲率空间;

(2) Calabi 流是 $\mathcal{H}$ 中距离收缩的流.

一个简要的说明如下:

注 3.2 定理 3.3(1) 证实了猜想 2.3, 而定理 3.3(2) 表明 Calabi 流应该有长时间存在性. Calabi 流的短时存在性由 Chen 和 He [19] 证明.

基于定理 3.3, Calabi 和 Chen [10] 提出了以下猜想:

猜想 3.1 如果两个度量不是通过某个全纯等距变换等价的, 则 $\mathcal{H}$ 中的距离函数在 Calabi 流下严格减.

关于 Calabi 流, Calabi 和 Chen 提出了以下猜想, 直到现在仍然是一个悬而未决的问题.

猜想 3.2 [10] 对于任何光滑的初始数据, Calabi 流都是存在的.

文献 [15] 证明了如下结论:

定理 3.4 [15] 只要标量曲率保持有界, Calabi 流就可以延伸下去.

关于 Calabi 流已经取得了许多重要进展. 首先, Chen 和 He [19] 对于 $C^{3,\alpha}$ 初始数据建立了短时间存在性, 然后 Chen 等 [17] 和 Li 等 [48] 研究了在不同假设下 Calabi 流收敛到 cscK 度量的问题.

最后我们介绍如下定理, 以向 Calabi 教授致敬, 这个定理与他最初的 "梦想", 即 "在每个 Kähler 类中找到一个规范度量" 非常接近.

定理 3.5 [15] 在第一 Chern 类小于 0 的紧 Kähler 曲面上, 如果没有负自交的全纯曲线, 则在每个 Kähler 类中存在常数标量曲率 Kähler 度量.

3.1.3 测地线的推广

考虑带有奇点的 Kähler 度量下的测地线是一个自然的问题, 即是否可以在具有锥形或尖点型 (cusp) 奇点的 Kähler 度量空间中定义测地线. 关键是为具有锥形或尖点型奇点的 Kähler 度量定义适当的范数, 并推导出类似的测地线方程的先验估计.

首先考虑锥形情形. 设 (V,ω_0) 是一个紧 Kähler 流形, 其中 ω_0 是一个光滑的 Kähler 度量. 设 $D=\sum_{i=1}^m(1-\beta_i)V_i$ 是 V 上的一个正则相交、有效的光滑除子, 其中 $0<\beta_i\leqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant m$, $V_i\subset X$ 是不可约的超曲面. 如果 $z^1,\dots,z^k$ 是 V_i 的局部定义函数, 则局部坐标 (U,z^i) 称为一个锥坐标. 沿着 V_i 的锥形角度为 $2\pi\beta_i$ 的 Kähler 锥度量 ω, 是一个闭的正 $(1,1)$ 型流, 并且在正则部分 $V\setminus D$ 上是一个光滑的 Kähler 度量. 在局部的锥坐标 U 中, 它的 Kähler 形式拟等距于锥形平坦度量:

$$\omega_{\text{cone}}\triangleq\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^k\beta_i^2|z^i|^{2(\beta_i-1)}dz^i\wedge dz^{\bar{i}}+\sum_{k+1\leqslant j\leqslant n}dz^j\wedge dz^{\bar{j}}.$$

在一个锥坐标中, 可以定义一个映射 $W:U\setminus D\to U\setminus D$:

$$W(z^1,\dots,z^n)\triangleq(w^1=|z^1|^{\beta_1-1}z^1,\dots,w^k=|z^k|^{\beta_k-1}z^k,z^{k+1},\dots,z^n).$$

记 $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_k)$. 根据文献 [32], Hölder 空间 C_α^β 被定义为每个锥坐标中 $W^*\phi\in C^\alpha$ 的函数集, 其中 C^α 是常规定义中的 Hölder 空间. 然后可以定义空间 $C_\beta^{2,\alpha}$ 为

$$C_\beta^{2,\alpha}=\{f:f,\partial f,\partial\bar{\partial}f\in C_\beta^\alpha\}.$$

Aleyasin 和 Chen [1] 证明了关于远离奇点的测地线的 $C^{1,1}$ 估计:

定理 3.6 [1] 设 φ_0 和 φ_1 是两个势函数, 其对应的度量 ω_{φ_0} 和 ω_{φ_1} 在光滑除子 V 上具有角度为 β 的锥形奇点. 则存在一条连接它们的唯一弱测地线 $\varphi(t)$, 它是处处 Hölder 连续的, 并且在远离奇点的紧集上, 其空间方向的复 Hessian 是一致有界的.

推导锥测地线的全局估计是一个自然的问题. 固定 V 上的一个 Kähler 锥度量 ω. 考虑圆柱面

$$\boldsymbol{R} = \{w \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \mathrm{Re} w \leqslant 1\}/\Gamma,$$

这里 $\Gamma = \{\phi_k : w \to w + k\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 在 $V \times \boldsymbol{R}$ 上定义一个背景度量:

$$\Omega \triangleq \pi^*\omega + \sqrt{-1}dw \wedge d\bar{w},$$

这里 w 是 $\boldsymbol{R}$ 上的一个坐标. 然后可以在 $V \times \boldsymbol{R}$ 上定义 $C_\beta^{1,\bar{1}}$ 范数:

$$\|\Phi\|_{C_\beta^{1,\bar{1}}} = \sup_{V \times \boldsymbol{R}} \{|\Phi| + |\partial\Phi|_\Omega + |\partial\bar{\partial}\Phi|_\Omega\}.$$

Zheng [54] 定义了广义锥测地线:

定义 3.1 如果 $\{\varphi(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 是下述逼近方程的解的极限, 则称其为广义锥测地线:

$$\begin{cases} \Omega_\varphi^{n+1} = \tau\Omega_b^{n+1} & \text{在 } V \times \boldsymbol{R} \text{ 上}, \\ \varphi(z', i) = \varphi_i(z') & \text{对于 } i = 0, 1 \text{ 和任意 } z' \in V, \end{cases}$$

其中 $\tau \to 0$, $\Omega_\varphi = \Omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$, 且使用以下范数:

$$\|\varphi\|_{C_\Delta^\beta} = \sup_{(z', z_{n+1}) \in V \times \boldsymbol{R}} \{|\varphi| + |\partial_t\varphi| + |\partial_{z'}\varphi|_\omega + |\partial_{z'}\partial_{\bar{z}'}\varphi|_\omega\},$$

这里 Ω_b 是在文献 [54] 的第 2 节中构造的背景度量.

文献 [54] 证明了以下定理:

定理 3.7 假设 $\{\varphi_\sigma : \sigma = 0, 1\}$ 是两个 Kähler 锥度量. 令 Ω_b 是文献 [54] 中定义的背景度量, 满足曲率条件: 对于一些固定的常数 C_2 和 C_3, 有

$$\begin{aligned} &R_{i\bar{j}k\bar{l}}(\omega_b) \geqslant -(\widetilde{g}_b)_{i\bar{j}}(g_b)_{k\bar{l}}, \\ &\widetilde{\omega}_b = C_2\omega_b + \mathrm{i}\partial\bar{\partial}\Phi_b, \\ &|\Phi_b|_\infty \leqslant C_3. \end{aligned} \tag{3.4}$$

那么存在一个唯一的 C_Δ^β 广义锥测地线连接 φ_σ, 并且存在一个与 τ 无关的常数 C, 使得

$$\|\varphi\|_{C_\Delta^\beta} \leqslant C.$$

常数 C 依赖于方程 (3.4) 中的常数以及 $\sup_V \mathrm{Tr}_{\omega_0}\omega_{\varphi_\sigma}$ 和 $\sup_V |\varphi_\sigma|$.

在文献 [54] 中引入了比 2 阶更高的新加权 Hölder 空间后, 锥测地线的更高正则性可以被得到.

接下来讨论尖点 Kähler 度量. 我们从尖点度量的定义开始. 设 D 是一个具有简单正则交叉的除子. 将其分解为光滑的不可约分量, 记作 $D = \sum_{j=1}^N V_j$. 为每个线丛 $[D_j]$ 赋予一个光滑的 Hermitian 度量 $|\cdot|_j$. $\sigma_j \in \mathcal{O}([V_j])$ 表示一个全纯截面, 使得 $D_j = \{\sigma_j = 0\}$, $j = 1, \dots, N$. 通过将 $|\cdot|_j$ 乘以一个正常数, 可以假设 $|\sigma_j|_j \leqslant \mathrm{e}^{-1}$, 以便在 D_j 外部 $\rho_j \triangleq -\log(|\sigma_j|_j^2) \geqslant 1$.

如果 z^i 是 V_j 的定义函数, 其中 $j = 1, \dots, k$, 称 (U, z^i) 是一个尖点坐标. 标准尖点度量为

$$\omega' = \sum_{j=1}^k \frac{\sqrt{-1}dz^j \wedge dz^{\bar{j}}}{|z_j|^2 \log^2(|z_j|^2)} + \sum_{j=k+1}^m \sqrt{-1}dz^j \wedge dz^{\bar{j}}.$$

Auvray 定义了以下具有尖点奇异性的 Kähler 度量, 称为 Poincaré 类型的 Kähler 度量:

定义 3.2 [2]　设 ω 是 $V \setminus D$ 上局部光滑的闭实 $(1,1)$- 形式. 如果在每个尖点图中,

(1) ω 是 C^{∞}- 拟等距于 ω', 即存在某个 $c>0$, 使得在 $V \setminus D$ 上满足 $c\omega' \leqslant \omega \leqslant c^{-1}\omega'$, 并且对于任意 $j \geqslant 1$, $|\nabla^{j}_{\omega'}\omega|_{\omega'}$ 有界;

(2) 存在某个局部光滑函数 v, 使得 $\omega = \omega_0 + \mathrm{i}\partial\bar{\partial}v$, 其中 $v = O(\sum_{j=1}^{k}\log(-\log|z_j|^2))$ 临近 D, 并且对于任意 $j \geqslant 1$, $|\nabla^{j}_{\omega'}v|$ 在 $V \setminus D$ 上有界,

则称 ω 是 Poincaré 类型的 $[\omega_0]$ 类中的 Kähler 度量, 记为 $\omega \in \mathcal{PM}_{[\omega_0]}$.

对于尖点 Kähler 度量, Auvray 展示了测地线的存在性:

定理 3.8 [2]　设 X 是一个紧 Kähler 流形, D 是 X 中具有简单正则交叉的除子. 考虑相对于 X 上某个 Kähler 类的 Poincaré 类型 Kähler 度量的空间 $\mathcal{PM}_{\Omega}$, 其上有 Mabuchi 度量. 那么这个空间中的任意两个度量的势可以通过一个连续测地线连接起来. 在 $C^{1,\bar{1}}$- 范数中, 它可以被这个测地线的光滑形变在弱意义下逼近.

这里的 $C^{1,\bar{1}}$ 范数定义为

$$\begin{aligned}\|w\|_{C^{1,\bar{1}}} \sup_{(x,t)\in(V\setminus D)\times[0,1]} &(|w(x,t)-(tw(x,1)+(1-t)w(x,0))| \\ &+ |\partial_t w(x,t)| + |d_V w(x,t)| + |d_V\partial_t w| + |dd^c_V w(x,t)|).\end{aligned}$$

3.2　测地问题与多重势理论

3.2.1　d_p- 距离下的度量完备化

借助多重势理论 (pluripotential theory) 的发展, 可以推广 Kähler 度量空间. 对于任意 Kähler 度量 ω_0, 我们称一个函数 $\varphi \in L^1$ 是 ω_0- 多重次调和函数 (记作 ω_0-PSH), 如果 φ 在分布意义下满足 $\omega_0 + dd^c\varphi \geqslant 0$, 即对于任意光滑的 $(0,1)$ 形式 $\alpha_i, i=1,2,\ldots,n-1$, 有下列不等式成立:

$$\int_V \omega_0 \wedge \alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1} \wedge \bar{\alpha}_{n-1} + \int_V \varphi dd^c(\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1} \wedge \bar{\alpha}_{n-1}) \geqslant 0.$$

Berndtsson [6] 证明了对于有界的 ω_0-PSH 函数 φ_0 和 φ_1, 存在一条有界测地线连接 φ_0 和 φ_1. 更一般地, 可以定义全能量类:

$$\mathcal{E}(V,\omega_0) = \left\{u \in \mathrm{PSH}(V,\omega_0) : \int_V \omega_0^n = \int_V \omega_u^n\right\}.$$

文献 [39] 针对任意 $p \geqslant 1$ 引入了以下空间:

$$\mathcal{E}^p(V,\omega_0) = \left\{u \in \mathcal{E}(V,\omega_0) : E_p(u) \triangleq \int_V |u|^p \omega_u^n < +\infty\right\}. \tag{3.5}$$

一个有趣且重要的问题是刻画在 (3.5) 中定义的空间 $\mathcal{E}^p$. 我们有以下由 Guedj [38] 提出的猜想:

猜想 3.3 [38]　设 $p \geqslant 1$. 空间 $\mathcal{E}^p(V,\omega_0)$ 正是 $\mathcal{H}$ 在 d_p 距离下的度量完备化, 其中 d_p 是连接两个端点的路径在 $\mathcal{H}$ 中的 L^p 长度的下确界.

关于这个主题, 我们推荐读者阅读最近由 Demailly 撰写的一篇综述文献 [28] 以更深入地了解. Guedj 的上述猜想被 Darvas [23, 24] 解决了:

定理 3.9 [23, 24]　Guedj 的猜想成立.

这一发展后来被证明是至关重要的, 我们将看到在 Donaldson 的测地稳定性猜想 2.4 中使用 d_1 距离是正确的距离. 此外, Darvas 还证明了 d_p 距离的以下刻画:

定理 3.10 [23] 设 $p \geqslant 1$, 定义

$$I_p(u,v)=\left(\int_V |u-v|^p \frac{\omega_u^n}{n!}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_V |u-v|^p \frac{\omega_v^n}{n!}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u,v\in\mathcal{H}.$$

则存在一个常数 $C(p)>0$, 使得

$$\frac{1}{C}I_p(u,v)\leqslant d_p(u,v)\leqslant CI_p(u,v), \quad \text{对于任意 } u,v\in\mathcal{H}.$$

3.2.2 Big cohomology class

另一个推广的方向是考虑 big cohomology class 而不是 Kähler 类. 假设 (V,ω_0) 是一个 Hermitian 流形. 称 $[\theta]$ 是一个 big cohomology class, 如果存在一个闭的 $(1,1)$-current $T\in[\theta]$ (可以是非光滑的), 使得对于某个正常数 ϵ, 有 $T\geqslant \epsilon\omega_0$. Big cohomology class 的困难在于背景度量的全纯双截曲率上没有统一的界. 因此很难推导出方程 (3.1) 的解的高阶估计. 但仍然可以尝试推导低阶估计, 或者在 $[\theta]$ 上假设额外的条件, 例如是 nef 的 (参见文献 [7]).

假设 $[\theta]$ 是一个 big cohomology class. Boucksom 等 [7] 定义了一族函数如下: 称一个 θ-PSH 函数 φ 具有最小奇异性, 如果对于任意 θ-PSH 函数 v, 存在常数 C 使得 $v\leqslant\varphi+C$. 记 $\varphi_{\min}=\sup\{\varphi\in \mathrm{PSH}(X,\theta):\varphi\leqslant 0\}$. 设 χ 是一个满足以下条件的光滑递增函数:

$$\chi(-\infty)=-\infty \quad \text{且} \quad \chi(t)=t, \quad \text{对于 } t\geqslant 0.$$

他们定义了以下加权能量泛函:

$$E_\chi(\varphi)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\int_V(-\chi)(\varphi-\varphi_{\min})T^j\wedge T_{\min}^{n-j},$$

其中

$$T=\theta+dd^c\varphi, \quad T_{\min}=\theta+dd^c\varphi_{\min}.$$

对于任意的 θ-PSH 函数, 他们定义了其 χ- 能量为

$$E_\chi(\varphi)=\sup_{\psi\geqslant\varphi}E_\chi(\psi).$$

上述 sup 是对所有具有最小奇异性的 $\psi\geqslant\varphi$ 而言的. 然后可以定义 $\mathcal{E}_\chi([\theta])$ 为函数 φ 的集合, 使得 $T=\theta+dd^c\varphi\in[\theta]$ 是一个具有有限 χ- 能量的正 current. 如果取 $\chi(t)=\chi_1(t)\triangleq|t|$, 将相应的集合记为 $\mathcal{E}^1(X,\theta)$. Darvas 等 [25] 证明了以下定理:

定理 3.11 [25] 假定 $[\theta]$ 是一个 big cohomology class, 则 $(\mathcal{E}^1(V,\theta),d_1)$ 是一个完备的测地度量空间.

他们定义了在 $\mathcal{E}^1(X,\theta)$ 中的距离:

$$d_1(u,v)=E_{\chi_1}(u)+E_{\chi_1}(v)-2I(P(u,v)).$$

3.3 唯一性

两个 Kähler 势之间测地线段的唯一性直观上可以通过 $\mathcal{H}$ 形式上是一个 "非正曲率流形" 看出来. 为了证明测地线段的唯一性, Chen [12] 定义了退化 Monge-Ampère 方程 (3.1) 的弱解的概念:

定义 3.3 [12] 称 $V\times \boldsymbol{R}$ 中的连续函数 φ 为退化 Monge-Ampère 方程 (3.1) 的弱 C^0 解, 如果对于任意 $\epsilon>0$, 存在 ω_0-PSH 函数 $\widetilde{\varphi}$ 在 $V\times\boldsymbol{R}$ 中满足 $|\varphi-\widetilde{\varphi}|<\epsilon$, 且存在某个正函数 $0<f<\epsilon$, 使得 $\widetilde{\varphi}$ 在 $t=1$ 处满足方程 (3.3), 并且具有与 φ 相同的边值.

需要指出的是, 由文献 [12] 得到的 $C^{1,1}$ 弱解也是按照上述意义下退化 Monge-Ampère 方程 (3.1) 的弱 C^0 解, 因为 $C^{1,1}$ 弱解的存在证明是通过连续性方法得到的, 直接给出了当 $\epsilon>0$ 时在弱 C^0 解的定义中的 $\widetilde{\varphi}$. 然后陈秀雄证明了退化 Monge-Ampère 方程的 C^0 弱解的唯一性:

定理 3.12 [12] 一旦边值固定, 退化 Monge-Ampère 方程的解就是唯一的.

此外, Calabi 和 Chen [10] 证明了测地线的以下稳定性结果:

定理 3.13 [10] 设 $\varphi_i\in\mathcal{H}$ $(i=0,1)$ 是两个 Kähler 势, 在 V 中生成两个相应的 Kähler 度量. 设 $\{C_i\}$ 是从 φ_0 到 φ_1 的 $\mathcal{H}$ 中的任意一列路径, 使得它们的长度收敛到所有这种路径的长度的下确界. 则 $\{C_i\}$ 在 Hausdorff 距离的拓扑下收敛到从 φ_0 到 φ_1 的唯一的 $C^{1,1}$ 测地线.

对于在第 3.2.1 小节中定义的 $\mathcal{E}^p(V,\omega_0)$ 中测地线的唯一性, Darvas 和 Lu [27] 展示了以下结果:

定理 3.14 [27] 设 $p\in(1,\infty)$, 假设 $[0,1]\ni t\to v_t\in\mathcal{E}^p(V,\omega_0)$ 是连接 $v_0,v_1\in\mathcal{E}^p(V,\omega_0)$ 的 L^p 有限能量测地线. 则 $t\to v_t$ 是连接 v_0 和 v_1 的唯一 d_p- 测地线, 即 $(\mathcal{E}^p(V,\omega_0),d_p)$ 是一个唯一测地的度量空间.

3.4 测地问题的最佳正则性

根据定理 3.1, 测地线的复 Hessian 是有界的. 这个正则性是否可以改进是非常有意思的问题, 特别是是否可以控制全部二阶导数甚至更高阶导数.

首先, 我们陈述正面的结果: Chu 等 [21] 证明了测地线的实 Hessian 也是有界的:

定理 3.15 [21] 给定任意紧 Kähler 流形 (V,ω_0) 和其上的任意两个 Kähler 势, 连接它们的弱测地线 φ 满足在 $V\times\boldsymbol{R}$ 上 $|D^2\varphi|$ 是有界的, 这里 D^2 是由 ω_0 和复结构 J 诱导的 Riemann 度量下的实 Hessian.

他们将这个结果推广到了背景度量是退化的情形. 假设 V 是一个紧 Kähler 流形, 其边界 ∂V 非空且光滑. 令 ω_0 是 V 上的一个光滑闭半正定的实 $(1,1)$ 形式. 此外, 他们假设在 V 上存在一个有效除子 E, 与 ∂V 不相交, 以及一个定义截面 $s\in H^0(V,\mathcal{O}(E))$ 和一个带有曲率形式 $R_h=-\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log h$ 的 Hermitian 度量 h, 使得对于所有足够小的 $\delta>0$,

$$\omega_\delta\triangleq\omega_0-\delta R_h$$

是 V 上的一个 Kähler 形式.

定理 3.16 [21] 在上述的 V, E 和 ω_0 下, 另外假设 ∂V 是弱拟凸的. 令 φ_0 是 V 上的一个光滑函数, 满足 $\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_0\geqslant 0$, 并且令 $\varphi\in\mathrm{PSH}(V,\omega_0)$ 是齐次复 Monge-Ampère 方程的解:

$$\begin{aligned}&(\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n=0 \text{ 在 } V \text{ 上成立},\\&\varphi=\varphi_0 \text{ 在 } \partial V \text{ 上成立}.\end{aligned}$$

则在 $V\setminus E$ 上, $|D^2\varphi|$ 是局部有界的.

现在我们来陈述负面的结果: 一般情形下, 我们不能期望测地线的正则性比 $C^{1,1}$ 更好. 考虑测地线的以下表述: 设 $S=\{s\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Im}s<1\}$. 令 (V,ω_0) 是一个 m 维的 Kähler 流形. 令 $v\in\mathcal{H}$. 作为

连接 0 和 v 的函数, 在 $V\times S$ 上看到的测地线 u 满足以下条件:

$$\begin{aligned}&(\omega_0+\mathrm{i}\partial\bar{\partial}u)^{m+1}=0,\\&u(s+\delta,x)=u(s,x),\quad \delta\in\mathbb{R},\quad (s,x)\in V\times S,\\&u(s,x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } \mathrm{Im}(s)=0,\\ v(x), & \text{如果 } \mathrm{Im}(s)=1.\end{cases}\end{aligned}\tag{3.6}$$

Darvas 和 Lempert 证明了如下定理:

定理 3.17 [26] 假设一个连通的紧 Kähler 流形 (V,ω_0) 上存在一个具有孤立不动点的全纯等距同构 $g:V\to V$, 且 $g^2=\mathrm{id}_X$. 则存在一个 $v\in\mathcal{H}$, 使得 (3.6) 没有 ω- 多重次调和的解 $u\in C^{\partial\bar{\partial}}(V\times\bar{S})$. 并且可以找到这样的 v, 满足 $g^*v=v$.

在这里,

$$C^{\partial\bar{\partial}}(\bar{Z})=\{w\in C(\bar{Z}):\partial\bar{\partial}(w|_Z)\ \text{在}\ \bar{Z}\ \text{上是连续的}\},$$

这比 $C^{1,1}$ 的正则性稍微高一些. 其他关于弱测地线正则性的反例的相关结果详见文献 [22,46]. 然而, 如果两个 Kähler 势足够接近, 连接它们的测地线的正则性可以得到改进 (参见文献 [18]):

定理 3.18 对于任意光滑 Kähler 势函数 $\psi_0\in\mathcal{H}$, 以及 $0<\alpha<1$, 存在 ψ_0 在 $C^{4,\alpha}$ 范数下的一个小邻域, 使得对于该邻域中的任何势函数 ψ, 存在一个 C^4 测地线段连接 ψ_0 和 ψ.

这实际上是测地法邻域定理的存在性. 在有限维情形下, 这相当于测地问题的初值问题存在性. 然而, 在无限维时, 一般情形下并不成立. 事实上, Donaldson [30] 给出了初值问题的反例.

4 测地线在 cscK 度量问题上的应用

4.1 cscK 的唯一性

显然, 这是一个非常困难的问题, 因为 cscK 方程是关于 Kähler 势的 4 阶方程, 所以最大值原理不适用. 在这里, 使用测地线确实是必不可少的, 因为几乎所有关于 cscK 度量唯一性的论证都基于沿着测地线的 K- 能量的凸性.

第 1 节已经评论过, 沿着光滑的测地线, K- 能量是凸的验证起来并不困难. 然而, 从第 3 节的讨论可以看出, 连接两个 Kähler 势的光滑测地线并不总是存在的, 一般来说可以期待的最佳正则性是 $C^{1,1}$. 因此, 一个关键的问题是 K- 能量是否沿着 $C^{1,1}$ 测地线是凸的? 此外, 能否基于此证明 cscK 度量的唯一性? 在此之前, 有许多部分性结果.

Chen [12] 首先在某些情形下证明了 cscK 度量的唯一性:

定理 4.1 [12] 如果 $C_1(V)<0$ 或 $C_1(V)=0$, 则在任意 Kähler 类中, cscK 度量 (如果存在) 必须是唯一的.

Donaldson [31] 在自同构群上作了一些假设, 并证明了 cscK 度量的唯一性.

定理 4.2 [31] 假设 $\mathrm{Aut}(V,L)$ 是离散的, 则在上同调类 $2\pi c_1(L)$ 中最多存在一个 cscK 度量.

在一般情形下, Berman 和 Berndtsson [3] 证明了 cscK 度量的唯一性问题, 并且还获得了极值 Kähler 度量在全纯变换意义下的唯一性:

定理 4.3 [3] 给定 V 上任意两个同调的极值 Kähler 度量 ω_0 和 ω_1, 存在 $\mathrm{Aut}_0(V)$ 中单位元所在连通分支中的元素 g, 使得 $\omega_0=g^*\omega_1$.

Berman 和 Berndtsson 的方法更多的是基于多重势理论, 而 Chen 等 [20] 发现了这个问题的一个偏微分方程方法, 接下来将进一步解释.

他们的论证利用了 Chen [11] 提出的连续路径以及能量函数 J_χ 的凸性, 该函数由 Chen [11] 引入. 令 χ 是 V 上的一个闭的实 $(1,1)$ 形式, 定义

$$\begin{aligned} J_\chi(\varphi) &= \int_0^1 \int_V \varphi\left(\chi \wedge \frac{\omega_{\lambda\varphi}^{n-1}}{(n-1)!} - \underline{\chi}\frac{\omega_{\lambda\varphi}^{n}}{n!}\right)d\lambda \\ &= \frac{1}{n!}\int_V \varphi \sum_{k=0}^{n-1} \chi \wedge \omega_0^k \wedge \omega_\varphi^{n-1-k} - \frac{1}{(n+1)!}\int_V \underline{\chi}\varphi \sum_{k=0}^{n} \omega_0^k \wedge \omega_\varphi^{n-k}, \end{aligned}$$

其中

$$\underline{\chi} = \frac{\int_V \chi \wedge \frac{\omega_0^{n-1}}{(n-1)!}}{\int_V \frac{\omega_0^n}{n!}}.$$

Chen [11] 证明了泛函 J_χ 的凸性:

定理 4.4 (参见文献 [11, 命题 2]) 设 $\chi \geqslant 0$ 是一个闭的 $(1,1)$ 形式. 设 $u_0, u_1 \in \mathcal{H}$. 令 $\{u_t\}_{t\in[0,1]}$ 是连接 u_0 和 u_1 的 $C^{1,1}$ 测地线. 则 $[0,1] \ni t \to J_\chi(u_t)$ 是凸的.

考虑到 cscK 的唯一性问题, 可以考虑 twisted K- 能量

$$K_{\chi,t} = tK + (1-t)J_\chi,$$

它是严格凸的. 根据文献 [11], 可以写出 twisted K- 能量的 Euler-Lagrange 方程:

$$t(R_\varphi - \underline{R}) = (1-t)(\mathrm{tr}_\varphi \chi - \underline{\chi}), \quad t \in [0,1]. \tag{4.1}$$

根据文献 [14], 可以将上述方程重写为两个耦合方程:

$$\begin{aligned} &\det(g_{i\bar{j}} + \varphi_{i\bar{j}}) = \mathrm{e}^F \det g_{i\bar{j}}, \\ &\Delta_\varphi F = -\left(\underline{R} - \frac{1-t}{t}\underline{\chi}\right) + \mathrm{tr}_\varphi\left(\mathrm{Ric} - \frac{1-t}{t}\chi\right). \end{aligned}$$

首先需要确保 (4.1) 可以求解的 t 的集合是开的.

引理 4.1 [14, 41, 53] 假设对于某个 $0 \leqslant t_0 < 1$, (4.1) 在 $t = t_0$ 处有解 $\varphi \in C^{4,\alpha}(V)$, 则存在某个 $\delta > 0$, 使得对于任意 $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0,1)$, (4.1) 在 $C^{4,\alpha}$ 中有解.

Chen 等 [20] 展示了在 $t = 1$ 附近求解 twisted 常标量曲率度量的开性:

定理 4.5 [20] 设 (V, ω_0) 是一个紧致 Kähler 流形, 使得存在 cscK 度量 $\omega_{\varphi_0} \in [\omega]$. 则存在 $\epsilon > 0$ 和一个光滑函数 $\phi : (1-\epsilon, 1] \times V \to \mathbb{R}$, 使得 $\varphi_t \triangleq \phi(t,.) \in \mathcal{H}^\infty(V)$, 并且相应的度量满足方程

$$R_{\varphi_t} - \underline{R} - (1-t)(\mathrm{tr}_{\varphi_t}\omega - n) = 0.$$

此外, 存在 V 的全纯自同构 f, 使得 $\omega_{\varphi_1} = f^*\omega_{\varphi_0}$.

Chen 等 [20] 展示了极值度量是唯一的.

定理 4.6 [20] 设 (V, ω_0) 是一个紧 Kähler 流形. 给定两个极值度量 $(\omega_j)_{j=1,2} \subset [\omega_0]$, 存在 V 的全纯自同构 f, 使得 $f^*\omega_2 = \omega_1$.

4.2　cscK 度量的存在性与测地线稳定性

回顾第 2 节中的猜想 2.4:

猜想 4.1[30]　假设 $\mathrm{Aut}_0(V,J)=0$. 则以下命题是等价的:

(1) 在 $\mathcal{H}$ 中不存在常标量曲率 Kähler 度量;

(2) 存在一个势函数 $\varphi_0\in\mathcal{H}_0$ 以及一条测地线射线 $\rho(t)$ $(t\in[0,+\infty))$, 使得 $\rho(0)=\varphi_0$, 并且 K- 能量沿着 $\rho(t)$ 是非增的;

(3) 对于任意 Kähler 势函数 $\psi\in\mathcal{H}_0$, 存在一条测地线, 使得 $\rho(0)=\psi(0)$, 并且 K- 能量沿着 $\rho(t)$ 是非增的.

在上述中, $\mathcal{H}_0=\mathcal{H}\cap\{\phi:I(\phi)=0\}$, 这里

$$I(\varphi)=\frac{1}{(n+1)!}\int_V\varphi\sum_{k=0}^{n}\omega_0^k\wedge\omega_\varphi^{n-k}.$$

本小节讨论了解决这个猜想以及 Calabi 关于 cscK 度量存在性的计划, 使用的是 Kähler 度量空间的测地线. 首先, K- 能量和函数 J_χ 可以延拓到空间 $(\mathcal{E}^1,d^1)$ 上, 并且沿有限能量测地线是凸的. 更确切地, 有如下定理:

定理 4.7 (参见文献 [5, 定理 4.7])　K- 能量可以延拓为一个泛函 $K:\mathcal{E}^1\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. 此外, 扩展的泛函 $K|_{\mathcal{E}^1}$ 是 $K|_{\mathcal{H}}$ 的最大的 d_1- 下半连续延拓. 此外, $K|_{\mathcal{E}^1}$ 沿 $\mathcal{E}^1$ 的任何有限能量测地线都是凸的.

定理 4.8 (参见文献 [5, 命题 4.4 和 4.5])　函数 J_χ 可以扩展为 $\mathcal{E}^1$ 上的一个 d_1- 连续泛函. 此外, J_χ 沿有限能量测地线也是凸的.

接下来讨论使用上述定义的泛函和测地线来证明 cscK 度量的存在性. 由于 K- 能量沿测地线是凸的, Chen[13] 定义了以下测地线稳定性的概念:

定义 4.1 (参见文献 [13, 定义 (3.10)])　设 $\rho(t):[0,\infty)\to\mathcal{E}_0^1$ 是一个局部有限能量的测地线射线, 其速度为 1. 可以定义一个不变量 $\yen([\rho])$ 如下:

$$\yen([\rho])=\lim_{k\to\infty}(K(\rho(k+1))-K(\rho(k))).$$

定义 4.2 (参见文献 [13, 定义 (3.14)])　设 $\varphi_0\in\mathcal{E}_0^1$, 且 $K(\varphi_0)<\infty$, $(M,[\omega])$ 在 φ_0 处称为测地线稳定的 (测地线半稳定的), 如果对于从 φ_0 发起的所有局部有限的测地线射线, 它们的 $\yen$ 不变量始终严格为正 (非负). 如果在 $\mathcal{E}_0^1$ 中的任意 φ 处都是测地线稳定的 (测地线半稳定的), 则 $(M,[\omega])$ 称为测地线稳定 (测地线半稳定) 的.

这里 $\mathcal{E}_0^1=\mathcal{E}^1\cap\{\phi:I(\phi)=0\}$. 首先记录一下关于 $\mathcal{E}^1$ 上定义的 d_1 距离和首次由文献 [4,5] 证明的 K- 能量的紧性定理:

定理 4.9　设 $\{u_i\}_i\subset\mathcal{E}^1$ 是一个序列, 满足以下条件:

$$\sup_i d_1(0,u_i)<\infty,\quad \sup_i K(u_i)<\infty.$$

则 $\{u_i\}_i$ 包含一个 d_1- 收敛的子序列.

Chen 和 Cheng[16] 证明了一个与猜想 4.1 类似的版本, 其中使用了文献 [4] 中定义的弱测地线. 使用弱测地线的优势在于可以利用定理 4.9 提供的良好的紧性性质.

定理 4.10 [16] 假设 $\mathrm{Aut}_0(V,J)=0$. 以下陈述是等价的:

(1) 在 $\mathcal{H}$ 中不存在常数标量曲率 Kähler 度量;

(2) 存在一个位势 $\varphi_0\in\mathcal{E}_0^1$, 并且存在一个局部有限能量的测地线射线 $\rho(t)$ $(t\in[0,+\infty))$ 使得 $\rho(0)=\varphi_0$ 且沿着 $\rho(t)$ K- 能量非增;

(3) 对于任意的 Kähler 位势 $\psi\in\mathcal{E}_0^1$, 存在一个从 ψ 发起的测地线射线 $\rho(t)$ $(t\in[0,+\infty))$ 使得 $\rho(0)=\psi_0$ 且沿着 $\rho(t)$ K- 能量非增.

利用测地稳定性的概念, Chen 和 Cheng [16] 重新表述了上述定理:

定理 4.11 [16] 假设 $\mathrm{Aut}_0(V,J)=0$. 则 $(V,[\omega])$ 存在一个常数标量曲率 Kähler 度量当且仅当它是测地稳定的.

他们还证明了如下定理:

定理 4.12 [15] 假设 $\mathrm{Aut}_0(V,J)=0$. 常数标量曲率 Kähler 度量的存在等价于 L^1 测地距离下 K-能量的强制性.

值得注意的是, 定理 4.10 后来被 Darvas 和 Lu [27] 改进为如下定理:

定理 4.13 [27] 如果假设射线属于类 $C^{1,\bar{1}}$, 则定理 4.10 仍然成立.

考虑到 $C^{1,\bar{1}}$ 几乎是连接两个光滑 Kähler 位势的测地线的最优正则性, 而一般情形下无法期望光滑的测地线, 定理 4.13 可能是猜想 4.1 的最佳版本.

致谢 本文作者之一—陈秀雄—第一次接触现代微分几何是在陈省身数学研究所 (现名) 举办的 1986–1987 几何拓扑年上. 这个由彭家贵先生和姜伯驹先生担任组委会共同主席以及由国内外名家授课的整年研讨会是面向青年教师和研究生的, 作为中国科学技术大学本科生的陈秀雄能得到参加资格全因彭先生的抬爱. 那次经历发蒙启蔽, 他心怀感恩. 彭先生后来这些年来的教诲和鞭策, 及其智慧和为人更使他受益匪浅. 在彭先生八十寿辰之际, 作者谨以此文, 献于夫子, 以表敬仰.

参考文献

1 Aleyasin S A, Chen X X. On the geodesics in the space of Kähler metrics with prescribed singularities. arXiv:1306.1867, 2013

2 Auvray H. The space of Poincaré type Kähler metrics on the complement of a divisor. J Reine Angew Math, 2017, 722: 1–64

3 Berman R J, Berndtsson B. Convexity of the K-energy on the space of Kähler metrics and uniqueness of extremal metrics. J Amer Math Soc, 2017, 30: 1165–1196

4 Berman R J, Boucksom S, Eyssidieux P, et al. Kähler-Einstein metrics and the Kähler-Ricci flow on log Fano varieties. J Reine Angew Math, 2019, 751: 27–89

5 Berman R J, Darvas T, Lu C H. Convexity of the extended K-energy and the large time behavior of the weak Calabi flow. Geom Topol, 2017, 21: 2945–2988

6 Berndtsson B. A Brunn-Minkowski type inequality for Fano manifolds and some uniqueness theorems in Kähler geometry. Invent Math, 2015, 200: 149–200

7 Boucksom S, Eyssidieux P, Guedj V, et al. Monge-Ampère equations in big cohomology classes. Acta Math, 2010, 205: 199–262

8 Calabi E. Extremal Kähler metrics. In: Seminar on Differential Geometry. Annals of Mathematics Studies, vol. 102. Princeton: Princeton Univ Press, 1982, 259–290

9 Calabi E. Extremal Kähler metrics II. In: Differential Geometry and Complex Analysis: A Volume Dedicated to the Memory of Harry Ernest Rauch. Berlin-Heidelberg: Springer, 1985, 95–114

10 Calabi E, Chen X X. The space of Kähler metrics II. J Differential Geom, 2002, 61: 173–193

11 Chen X X. On the lower bound of the Mabuchi energy and its application. Int Math Res Not IMRN, 2000, 2000: 607–623

12 Chen X X. The space of Kähler metrics. J Differential Geom, 2000, 56: 189–234

13 Chen X X. Space of Kähler metrics III—on the lower bound of the Calabi energy and geodesic distance. Invent Math, 2009, 175: 453–503

14 Chen X X. On the existence of constant scalar curvature Kähler metric: A new perspective. Ann Math Qué, 2018, 42: 169–189

15 Chen X X, Cheng J. On the constant scalar curvature Kähler metrics (I)—*a priori* estimates. J Amer Math Soc, 2021, 34: 909–936

16 Chen X X, Cheng J. On the constant scalar curvature Kähler metrics (II)—existence results. J Amer Math Soc, 2021, 34: 937–1009

17 Chen X X, Darvas T, He W Y. Compactness of Kähler metrics with bounds on Ricci curvature and $\mathcal{I}$ functional. Calc Var Partial Differential Equations, 2019, 58: 139

18 Chen X X, Feldman M, Hu J. Geodesic convexity of small neighborhood in the space of Kähler potentials. J Funct Anal, 2020, 279: 108603

19 Chen X X, He W Y. On the Calabi flow. Amer J Math, 2008, 130: 539–570

20 Chen X X, Paun M, Zeng Y. On deformation of extremal metrics. arXiv:1506.01290, 2015

21 Chu J, Tosatti V, Weinkove B. $C^{1,1}$ regularity for degenerate complex Monge-Ampère equations and geodesic rays. Comm Partial Differential Equations, 2018, 43: 292–312

22 Darvas T. Morse theory and geodesics in the space of Kähler metrics. Proc Amer Math Soc, 2014, 142: 2775–2782

23 Darvas T. The Mabuchi geometry of finite energy classes. Adv Math, 2015, 285: 182–219

24 Darvas T. The Mabuchi completion of the space of Kähler potentials. Amer J Math, 2017, 139: 1275–1313

25 Darvas T, Di Nezza E, Lu C H. L^1 metric geometry of big cohomology classes. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2018, 68: 3053–3086

26 Darvas T, Lempert L. Weak geodesics in the space of Kähler metrics. Math Res Lett, 2012, 19: 1127–1135

27 Darvas T, Lu C H. Geodesic stability, the space of rays and uniform convexity in Mabuchi geometry. Geom Topol, 2020, 24: 1907–1967

28 Demailly J P. Variational approach for complex Monge-Ampère equations and geometric applications. Astérisque, 2017, 390: 245–275

29 Dervan R, Sektnan L M. Optimal symplectic connections on holomorphic submersions. Comm Pure Appl Math, 2021, 74: 2132–2184

30 Donaldson S K. Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics. In: Northern California Symplectic Geometry Seminar. Providence: Amer Math Soc, 1999, 13–33

31 Donaldson S K. Scalar curvature and projective embeddings, I. J Differential Geom, 2001, 59: 479–522

32 Donaldson S K. Kähler metrics with cone singularities along a divisor. In: Essays in Mathematics and Its Applications. Berlin-Heidelberg: Springer, 2012, 49–79

33 Fine J. Canonical metrics in Kähler geometry—a biased overview. Gaz Math, 2018, 155: 38–51

34 Futaki A. An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics. Invent Math, 1983, 73: 437–444

35 Guan B. The Dirichlet problem for complex Monge-Ampère equations and regularity of the pluri-complex Green function. Comm Anal Geom, 1998, 6: 687–703

36 Guan B, Spruck J. Boundary-value problems on $\mathbb{S}^n$ for surfaces of constant Gauss curvature. Ann of Math (2), 1993, 138: 601–624

37 Guan D, Chen X X. Existence of extremal metrics on almost homogeneous manifolds of cohomogeneity one. Asian J Math, 2000, 4: 817–830

38 Guedj V. The metric completion of the Riemannian space of Kähler metrics. arXiv:1401.7857, 2014

39 Guedj V, Zeriahi A. The weighted Monge-Ampère energy of quasiplurisubharmonic functions. J Funct Anal, 2007, 250: 442–482

40 Guedj V, Zeriahi A. Degenerate Complex Monge-Ampère Equations. EMS Tracts in Mathematics, vol. 26. Berlin: EMS Press, 2017

41 Hashimoto Y. Existence of twisted constant scalar curvature Kähler metrics with a large twist. Math Z, 2019, 292: 791–803

42 Hofer H. On the topological properties of symplectic maps. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1990, 115: 25–38

43 Hong Y J. Constant Hermitian scalar curvature equations on ruled manifolds. J Differential Geom, 1999, 53: 465–516

44 Hong Y J. Gauge-fixing constant scalar curvature equations on ruled manifolds and the Futaki invariants. J Differential Geom, 2002, 60: 389–453

45 Hwang A D. On existence of Kähler metrics with constant scalar curvature. Osaka J Math, 1994, 31: 561–595

46 Lempert L, Vivas L. Geodesics in the space of Kähler metrics. Duke Math J, 2013, 162: 1369–1381

47 Levine M. A remark on extremal Kähler metrics. J Differential Geom, 1985, 21: 73–77

48 Li H, Wang B, Zheng K. Regularity scales and convergence of the Calabi flow. J Geom Anal, 2018, 28: 2050–2101

49 Mabuchi T. Some symplectic geometry on compact Kähler manifolds. I. Osaka J Math, 1987, 24: 227–252

50 Semmes S. Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds. Amer J Math, 1992, 114: 495–550
51 Székelyhidi G. An Introduction to Extremal Kähler Metrics. Graduate Studies in Mathematics, vol. 152. Providence: Amer Math Soc, 2014
52 Yau S-T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I. Comm Pure Appl Math, 1978, 31: 339–411
53 Zeng Y. Deformations from a given Kähler metric to a twisted cscK metric. Asian J Math, 2019, 23: 985–1000
54 Zheng K. Geodesics in the space of Kähler cone metrics II: Uniqueness of constant scalar curvature Kähler cone metrics. Comm Pure Appl Math, 2019, 72: 2621–2701

A bird's eye view on geodesic problems in the space of Kähler potentials

Xiuxiong Chen, Jingrui Cheng & Yulun Xu

Abstract In this survey, we discuss the geodesic problem in the space of Kähler potentials and its applications to constant scalar curvature Kähler (cscK) metrics. We start with the geometrical picture discovered by Mabuchi (1987), Donaldson (1999) and Semmes (1992), and then discuss the background and recent progress on the geodesic problem. Finally, we discuss the application of the geodesics to the existence and uniqueness of cscK metrics.

Keywords space of Kähler potentials, geodesic, constant scalar curvature Kähler metric

MSC(2020) 32W20, 32Q15, 58E11

doi: 10.1360/SSM-2024-0098