

基于直梁公式设计民用建筑曲梁

童根树

(浙江大学高性能结构研究所, 杭州 310058)

摘要: 对民用建筑中圆弧曲梁在均布荷载作用下的应力和挠度计算进行了分析, 提出了基于直梁公式稍加修改后的内力和挠度计算公式, 适用于圆心角不大于 30° 、上翼缘有钢筋混凝土楼板且与钢梁形成组合作用、钢梁上翼缘基本没有侧向位移的曲梁。与精确解的对比表明, 提出的公式偏于安全, 其中在圆心角为 15° 时偏安全较多。

关键词: 曲梁; 应力; 挠度; 强度

0 引言

民用建筑中圆弧曲梁应用越来越多。曲梁必然发生弯扭变形, 如果采用直梁单元模拟, 国内的YJK和PKPM软件并不考虑楼面梁的平面外变形, 因而不能正确计算应力。采用有限元软件ANSYS或ABAQUS计算时, 涉及到相邻薄壁构件之间翘曲位移的关系, 以及有限元方法中的第7个未知量向整体坐标系转换的问题, 这些软件(截至2023年)均没有解决^[1], 因此有必要考察近似计算方法。仅腹板与垂直构件连接的曲梁支座抗扭能力极差, 3个建筑中有2个在施工中出现了挠度和扭角大的问题, 不推荐应用, 因此本文只介绍两端固支曲梁。

1 圆弧曲梁的平衡微分方程

圆弧曲梁如图1所示, 圆柱坐标系为 $x-y-z$, 截面内力有: 弯矩 M_x 、扭矩 T_z 和截面剪力 Q_y , 则用内力表示的平衡微分方程为^[2]:

$$-\frac{d^2 M_x}{dz^2} + \frac{dT_z}{Rdz} = q_y \quad (1a)$$

$$\frac{M_x}{R} + \frac{dT_z}{dz} = 0 \quad (1b)$$

式中: z 为曲梁纵向坐标; R 为圆弧梁的半径; q_y 为均布荷载。

其中扭矩由自由扭转力矩 T_{sv} 和约束扭转力矩 T_ω 组成, 后者又是双力矩 B_ω 的导数, 则有:

$$T_z = T_{sv} + T_\omega \quad (2a)$$

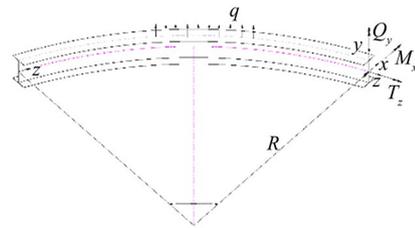


图1 圆弧曲梁

Fig. 1 Circularly curved beam

$$T_\omega = \frac{dB_\omega}{dz} \quad (2b)$$

内力与圆弧曲梁竖向挠度 v 和截面扭转角 θ 的关系为:

$$M_x = -\frac{EI_x}{R} \left(\frac{v''}{R} + \theta \right) + \frac{EI_\omega}{R^2} (\theta'' + \theta) \quad (3a)$$

$$B_\omega = -\frac{EI_\omega}{R^2} (\theta + \theta'') \quad (3b)$$

$$T_{sv} = \frac{GJ}{R} \left(\theta' - \frac{v'}{R} \right) \quad (3c)$$

式中: E 、 G 分别为钢材的弹性模量和剪切模量; I_x 、 J 、 I_ω 分别为截面绕 x 轴的惯性矩、自由扭转常数和翘曲惯性矩。

用位移表示的平衡微分方程为:

作者: 童根树, 教授, 主要从事钢结构稳定和抗震性能研究。

Email: tonggs@zju.edu.cn

收稿日期: 2024-07-08

$$\frac{EI_x}{R^3} \left(\theta'' + \frac{v^{(4)}}{R} \right) + \frac{GJ}{R^3} \left(\theta'' - \frac{v''}{R} \right) = q_y \quad (4a)$$

$$\frac{EI_\omega}{R^4} (\theta^{(4)} + 2\theta'' + \theta) + \frac{EI_x}{R^2} \left(\theta + \frac{v''}{R} \right) - \frac{GJ}{R^2} (\theta'' - \frac{v''}{R}) = 0 \quad (4b)$$

2 两端固支曲梁的简化分析

第1步:对直梁固端弯矩进行修正获得曲梁固端弯矩。直梁跨度与圆弧梁弧长相同,记为 L ,其弯矩为:

$$M_x = -\frac{1}{12} q(L^2 - 6Lz + 6z^2) + M_{md} \quad (5)$$

其中 $M_{md} = -\frac{\gamma q L^2}{50}$, $\gamma = 1 - \frac{1}{e^{4\alpha^{1.5}}}$

式中: α 为曲梁圆心角。

第2步:下翼缘是一个水平放置的拱(图2),对这个水平拱建立平衡微分方程:

$$\frac{N_f}{\eta R} + \frac{d^2 M_{yf}}{dz^2} = 0 \quad (6)$$

其中 $N_f = M_x / h_f$

式中: N_f 为下翼缘轴力; M_{yf} 为下翼缘绕 y 轴的弯矩,以内侧受拉为正; η 为考虑自由扭转影响而引入的折减系数; h_f 为上下翼缘中面(组合梁时是楼板中面到下翼缘中面)的距离。式(6)可看成是式(1b)的简化:自由扭转影响用系数 η 来考虑后,将双力矩表达为翼缘水平弯矩与 h_f 的乘积即可得到式(6)。

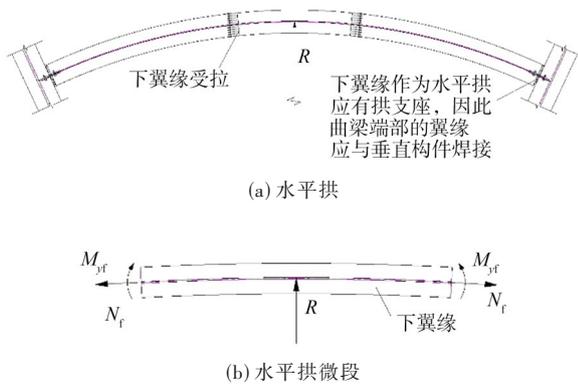


图2 下翼缘是一个水平拱

Fig. 2 Lower flange as a horizontal arch

将式(5)代入式(6),积分2次,利用对称性得到:

$$M_{yf} = \frac{q}{24\eta R h_f} z^2(L-z)^2 + \frac{M_{md}}{2\eta R h_f} z(L-z) + C_2 \quad (7)$$

第3步:用直梁公式确定待定常数 C_2 。图3为

两端固支梁,承受假想分布荷载 $q_f = N_f / (\eta h_f)$,按照材料力学方法计算直梁A端固端弯矩为:

$$M_A = \left(\gamma - \frac{5}{6} \right) \frac{q_y L^4}{600\eta R h_f} \quad (8)$$

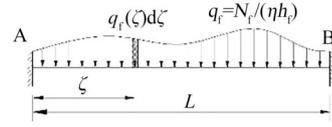


图3 两端固支梁

Fig. 3 Straight beam with fixed ends

即式(7)中的常数项 $C_2 = M_A$,下翼缘水平弯矩为:

$$M_{yf} = \frac{qL^4}{4\eta R h_f} \left[\frac{\zeta^2(1-\zeta)^2}{6} + \frac{\gamma}{25} \left(\frac{1}{6} - \zeta + \zeta^2 \right) - \frac{1}{180} \right] \quad (9)$$

其中 $\zeta = z/L$

求 C_2 的常规过程是利用拱的弯矩和位移关系:

$$M_{yf} = -\frac{EI_{yf}}{R^2} (u'' + u_f) \quad (10)$$

式中: I_{yf} 为下翼缘绕 y 轴惯性矩; u_f 为下翼缘水平位移。

对其积分,利用边界条件确定待定系数从而得出 C_2 ,这样求得的水平弯矩与式(9)几乎一样,说明采用直梁公式求 C_2 基本是正确的。

第4步:系数 η 的确定。工字形截面直梁扭转方程为:

$$EI_\omega \theta'' - GJ\theta' = -T_z \quad (11)$$

该方程与拉弯杆的弯曲平衡微分方程相似,拉力使跨中弯矩减小到 $\frac{1}{1 + P/P_E}$ 倍,其中 P 为拉杆拉力, P_E 为拉杆作为压杆时的欧拉临界力。参照这个比拟,式(9)中的 η 为:

$$\eta = 1 + \frac{GJ(0.5L)^2}{\pi^2 EI_\omega} \quad (12)$$

第5步:计算由曲梁整体弯矩 M_x 、下翼缘水平弯矩 M_{yf} 产生的纵向正应力,有:

$$\sigma_{M_x} = \frac{M_x}{W_x} \quad (13a)$$

$$\sigma_{M_{yf}} = \frac{6M_{yf}}{t_f b^2} \quad (13b)$$

$$\sigma_z = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_{yf}} \quad (13c)$$

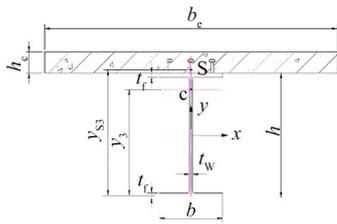
式中: W_x 为曲梁下翼缘抵抗矩; b 、 t_f 分别为下翼缘宽度和厚度。

第6步:计算挠度.按照两端固支直梁计算挠度,并乘以挠度放大系数。则建议的计算公式为:

$$v_m = \left(1 + \frac{4\alpha}{\pi}\right) \frac{q_y L^4}{384EI_x} \quad (14)$$

3 算例

本文应用对象是民用建筑中的曲梁,由混凝土楼板与钢梁形成组合梁,如图4所示。设楼板厚 $h_c = 100\text{ mm}$,混凝土弹性模量 $E_c = 32500\text{ MPa}$,楼板宽度 $b_c = 0.75、1.5、2.5\text{ m}$ 三种。



注: y_3, y_{s3} 分别为组合截面形心和剪切中心到下翼缘中面的距离。

图4 算例截面

Fig. 4 Cross section of the examples

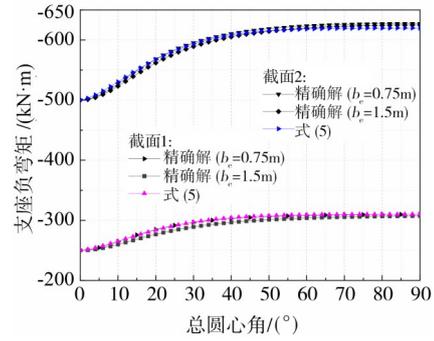
截面1: 钢梁 $H600 \times 200 \times 8 \times 14$, $q_y = 30\text{ N/mm}$ 。
 截面2: 钢梁 $H600 \times 350 \times 14 \times 25$, $q_y = 60\text{ N/mm}$ 。梁长 $L = 10\text{ m}$,改变圆心角 α ,圆弧半径随着改变。计算弯矩 M_x 、下翼缘水平弯矩 M_{yf} 以及式(13)中的各应力。同时给出用式(4a)、(4b)求得精确解计算的下翼缘翘曲正应力乘以下翼缘水平弯矩抵抗矩得到的弯矩,与 M_{yf} 进行对比。

图5给出了支座和跨中截面主弯矩。支座弯矩是拟合的,符合较好,而跨中截面弯矩符合也好,表明跨中弯矩和支座弯矩绝对值相加等于简支梁跨中弯矩。

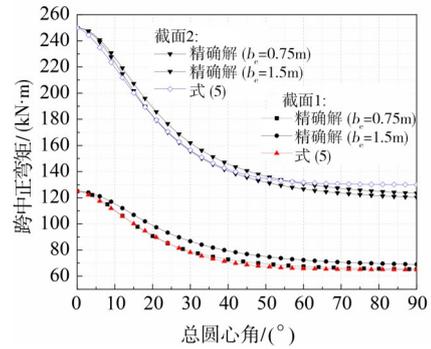
图6是截面1($b_c = 0.75\text{ m}$)下翼缘水平弯矩沿纵向变化的情况,圆心角大于 15° 时精确解的弯矩在支座处又变正,近似解也在较大角度时呈现出类似现象。圆心角大于 12° 后近似解精度变差了。另外,抗扭刚度增大,水平弯矩减小。

图7为支座截面下翼缘最大压应力。可见:近似解在圆心角小于 30° 时均偏于安全;跨中截面最大拉应力的近似解(简称“近”)和精确解(简称“精”)符合较好,但跨中截面不控制设计,所以这里不给出。

图8为跨中挠度精确解与直梁挠度的比值。可见6根梁圆心角为 90° 时的挠度是直梁挠度的



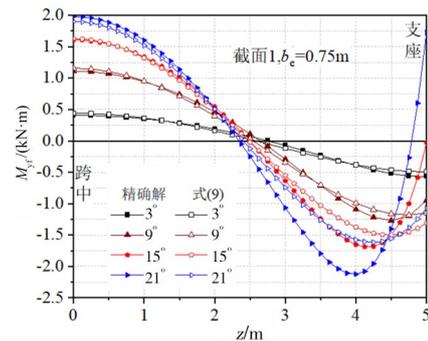
(a) 支座负弯矩



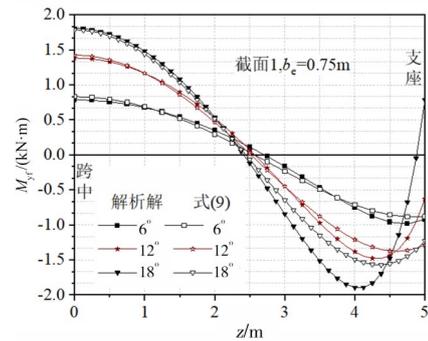
(b) 跨中截面弯矩

图5 主弯矩图对比

Fig. 5 Comparisons of principal bending moments



(a) 圆心角为 $3^\circ、9^\circ、15^\circ$ 和 21°



(b) 圆心角为 $6^\circ、12^\circ$ 和 18°

图6 下翼缘水平弯矩对比

Fig. 6 Comparisons of horizontal bending moments of the lower flange

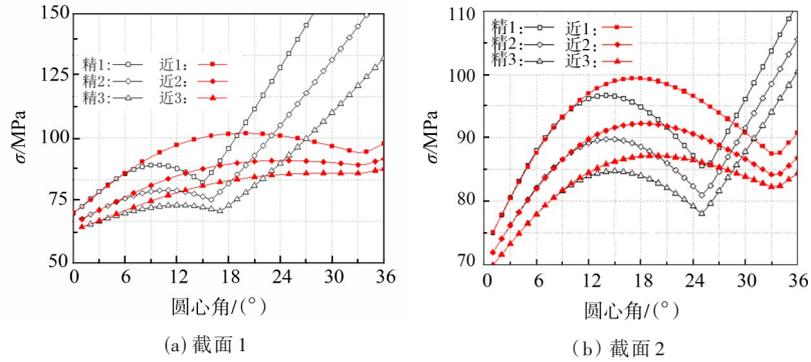


图7 支座截面最大压应力

Fig. 7 Maximum compressive stresses at supports

2.068~2.9268倍,即抗扭刚度大的梁挠度较小。考虑到挠度计算在设计中处于次要地位,为了曲梁挠度计算方便,假设 90° 曲梁挠度是直梁的3倍,其他圆心角的曲梁挠度采用线性插值确定,即得到式(14)。

4 结束语

本文对民用建筑中圆弧曲梁在均布荷载作用下的应力和挠度计算进行了分析,提出了基于直梁公式稍加修改后的内力和挠度计算公式,适用于圆心角不大于 30° 、上翼缘有钢筋混凝土楼板且与钢梁形成组合作用、钢梁上翼缘基本没有侧向位移的曲梁。与精确解的对比表明,提出的公式偏于安全,其中在圆心角为 15° 时偏安全较多。

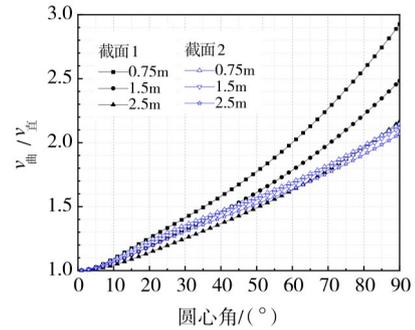


图8 圆弧曲梁的挠度

Fig. 8 Deflections of circularly curved beams

参考文献

- [1] 童根树, 钢结构的平面外稳定[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2013.
- [2] 童根树, 许强. 薄壁曲梁线性和非线性分析理论[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

Design of Curved Beams in Civil Engineering Structures Based on Straight Beam Formulas

Genshu Tong

(Institute of High Performance Structures, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract:

Analysis was conducted on the stress and deflection calculations of circularly curved beams in civil buildings under uniformly distributed loads. Formulas were proposed based on straight beam formulas but modified to agree with the results of curved beams. The proposed equations are applicable to beams with subtended angles $\leq 30^\circ$, where the upper flange is connected to a reinforced concrete slab, ensuring composite action between the steel beam and slab, and the upper flange exhibits negligible lateral displacement. Comparisons with exact solutions showed that the proposed formulas were on the safe side, particularly when the subtended angle was 15° .

Keywords: curved beam; stress; deflection; strength