



超级分形雪花的生长运动学

殷雅俊, 杨帆, 范钦珊

清华大学航天航空学院工程力学系, 北京 100084;

南京工业大学力学部, 南京 211816

E-mail: yinyj@tsinghua.edu.cn

2009-07-15 收稿, 2009-09-14 接受

国家自然科学基金(批准号: 10872114)和江苏省自然科学基金(编号: BK2008370)资助项目

摘要 以超级分形纤维的研究结果为基础, 探索了 $(6+1)$ 分圆超级分形纤维(其横截面是一朵超级分形雪花)的生长运动学(或花样运动学). 研究表明, (1) 超级分形雪花遵循简单的直线生长模式. (2) 在给定的瞬间, 雪花生长的速度在空间上均匀分布; 在特定的空间点, 雪花生长的速度随时间不断下降. (3) 自相似比对超级分形雪花的生长运动学有决定性的影响: 当且仅当自相似比等于 $1/3$ 时, 雪花的宏观生长速度等于微观生长速度, 宏观稠密度等于微观稠密度; 当自相似比小于 $1/3$ 时, 雪花的微观生长速度大于宏观生长速度, 微观稠密度大于宏观稠密度; 当自相似比大于 $1/3$ 时, 雪花的宏观生长速度大于微观生长速度, 宏观稠密度大于微观稠密度. 这些结果, 为我们理解大自然中复杂的分形生长现象提供了参考.

关键词

超级分形纤维
超级分形雪花
生长运动学
花样运动学

分形理论广泛应用于众多学科领域: 地貌形态学用分形描述江河的河曲形态^[1], 水文学借分形划分洪水分期^[2], 机械加工用分形表征磨屑轮廓^[3], 多孔介质的渗流研究用分形描述流体渗流边界的形貌^[4], 植物学借分形刻画根系的生长^[5], 土木工程学用分形表征岩土体内的孔隙和颗粒形貌^[6], 材料学用分形研究复合材料内部的孔隙演化^[7]或非晶半导体的晶化^[8], 等等. 本文则借助分形几何探索雪花的生长和运动.

自然界中的雪花(图1)千姿百态, 花样繁多^[9]. 但本文研究的雪花, 不是大自然中真实的雪花, 而是分形几何意义上抽象的雪花.

近期, Yin 等人在超级分形纤维的研究中取得了一系列进展^[10~15]. 在诸种分形纤维中, 有一种纤维的横截面, 其初始生成元是灰色的圆盘(图2), 其花样是 $(6+1)$ 分圆超级分形集^[12](图3). 从轮廓上看, $(6+1)$ 分圆超级分形集的花样很像一朵雪花. 为研究方便, 本文将其命名为超级分形雪花. 图3是自相似比 $r_s=1/3$ 的超级分形雪花的生长与演化示意图^[12].

尽管前文^[12]已经详尽地描述了 $(6+1)$ 分圆超级分形纤维(即超级分形雪花)的生长模式和拓扑演化方式, 但并没有穷尽蕴含在这朵雪花中的奥秘. 因此, 本文将继续从定性的角度观察这朵雪花, 从定量的角度刻画这朵雪花中的运动学模式和不变性质.

1 表观形貌

我们先定性地观察分形雪花的表观形貌. 由于初始结构由灰色的圆盘组成(图2), 故最终的分形雪花是灰色的. 灰色雪花的轮廓线, 从局部到整体都是处处连续但处处不光滑的 Koch 曲线. 注意到, 轮廓线并不是一条, 而是无穷多条 Koch 曲线. 这无穷多条 Koch 曲线, 不仅具有无穷嵌套的自相似性, 而且首尾相接, 环环相扣. 灰色雪花的实体, 从局部到整体都是 Koch 雪花. 但我们看到的不是一朵, 而是无穷多朵 Koch 雪花. 这无穷多朵 Koch 雪花, 不仅具有无穷嵌套的自相似性, 而且相互连通, 浑然一体. 灰色雪花之间包络的白色虚空, 也都是雪花——白色

引用格式: 殷雅俊, 杨帆, 范钦珊. 超级分形雪花的生长运动学. 科学通报, 2009, 54: 3433~3440

Yin Y J, Yang F, Fan Q S. Growth kinematics of fractal super snowflakes. Chinese Sci Bull, doi: 10.1007/s11434-009-0738-6

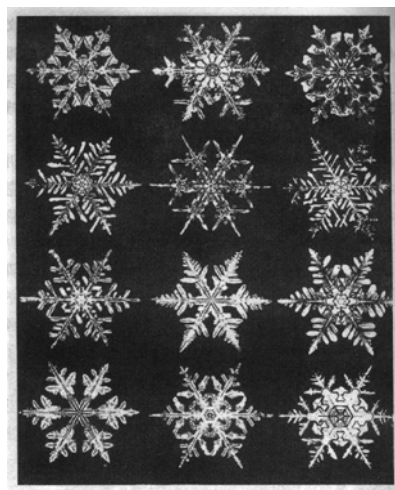


图 1 大自然中真实的雪花

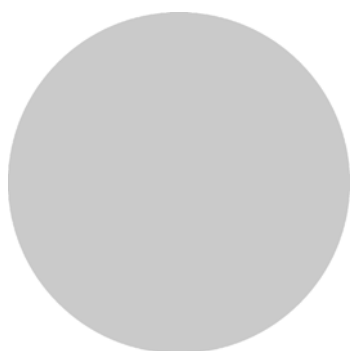


图 2 圆形生成元

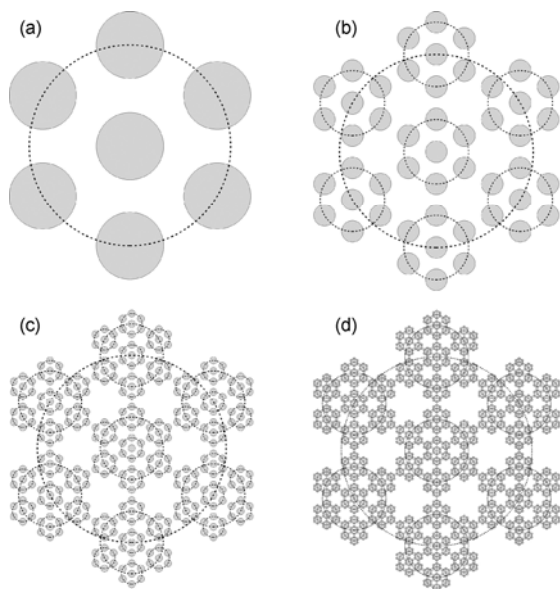


图 3 自相似比为 $1/3$ 的超级分形雪花^[12]

(a) 第一级结构; (b) 第二级结构; (c) 第三级结构; (d) 第四级结构

Koch 雪花. 无穷多朵白色雪花, 也具有自相似性. 最后, 白色雪花序列与灰色雪花序列以互补镶嵌的方式, 无缝隙地覆盖了平面.

超级分形雪花中包含了 4 种对称性: 平移对称性、旋转对称性、反射对称性和自相似对称性(或仿射对称性). 超级分形雪花中的对称群, 严格地规定了其生长模式和拓扑演化方式^[12]. 由于 4 种对称性在自然界中很常见, 故超级分形雪花的生长模式和拓扑演化方式, 为理解自然界中的生长现象提供了理想化“模板”. 注意到, CoFe_2O_4 纳米晶体花样^[16]与超级分形雪花的分形图案完全一致; 聚烯烃合金颗粒的自相似生长花样^[17]也与超级分形雪花的分形图案完全吻合. 这种一致性意味着, 我们能够借助超级分形雪花, 诠释非线性动力学花样的生长机理和演化规律.

2 生长运动学

静态、定性地观察之后, 我们再动态、定量地刻画超级分形雪花的生长规律. 为便于量化, 我们引入几个名词.

名词之一是“子结构”. 图 3 给出了超级分形雪花的前四级结构, 其中第一级结构(图 3(a))只有一级子结构, 由 7 个全等的生成元(灰色圆盘)组成; 第二级结构(图 3(b))有两级子结构, 其中一级子结构包含了 7 个全等的二级子结构(虚线圆), 而每个二级子结构是由 7 个全等的、更小的生成元(灰色小圆盘)组成. 依次类推, 第 i 级结构包含了 $1 \sim i$ 级子结构.

名词之二是“最近点”. 每一级子结构中, 相邻两个子结构间距离最小的两个点(图 4 中成对的黑点“•”), 称为一对最近点.

名词之三是“最短距离”, 即一对最近点之间的直线距离, 用 $d_{(i,j)}$ 表示(图 4), 其中下标 i 表示第 i 级结构, 下标 j 表示第 i 级结构中的 j 级子结构($1 \leq j \leq i$).

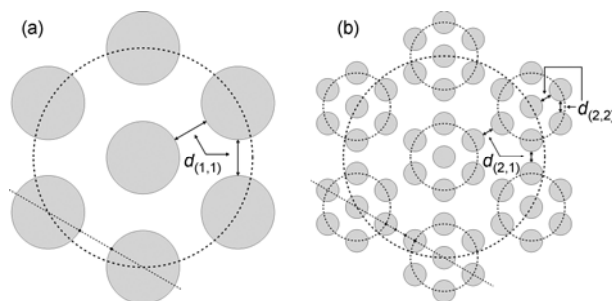


图 4 最小距离及最近点的直线轨迹(虚直线)

(a) 第一级结构; (b) 第二级结构

于是 $d_{(i,j)}$ 的含义是第 i 级结构中 j 级子结构之间的最短距离. 由于最近点之间是白色的虚空, 故 $d_{(i,j)}$ 描述了灰色雪花微结构之间的间隙大小或稠密程度. $d_{(i,j)}$ 越小, 稠密度越高, 反之越低.

由图 3 看出, 随着每一级结构的“长出”, 灰色雪花的轮廓线在不断地生长, 相邻的轮廓线在不断地靠近. 我们的问题是, 灰色雪花的轮廓线是如何生长的? 生长的快慢(即“速度”)如何刻画? 生长的速度是怎样分布的? 哪些因素影响生长速度? 这些问题的答案, 构成了超级分形雪花生长运动学的核心内容.

2.1 分形雪花上的最短距离

由图 3 和 4 可知, 最近点是超级分形雪花上重要的特征点, 因此, 最近点的运动就可以表征雪花轮廓线的运动. 换言之, 只需澄清最近点的运动规律, 雪花生长运动学的主要问题都可以迎刃而解.

为刻画最近点的运动, 我们给出轨迹点的定义. 一对最近点, 其位置随结构级数 i 的增加而移动, 位置序列所描绘出的空间点, 称为轨迹点. 关于轨迹点, 有一个命题, 它包括两个子命题: (1) 不论自相似比 r_s 取何值, 轨迹点都落在同一条直线上; (2) 雪花每长出一级结构, 最近点都沿着该直线相向移动一步. 命题的正确性可以借助“形心演化定理”^[14]给出严格的论证, 但为节省论文的篇幅, 此处略去证明过程, 只在图 4 中用虚直线显示命题的含义.

这一命题具有基本的重要性, 体现在两方面: 一方面, 它表明分形雪花的生长遵循简单的直线生长模式; 另一方面, 它奠定了雪花生长运动学的基础——基于该命题, 我们可以导出距离 $d_{(i,j)}$ 的表达式. 注意自相似比的定义^[11]:

$$r_s = \frac{r_1}{r_0} = \frac{r_2}{r_1} = \dots = \frac{r_n}{r_{n-1}}, \quad (1)$$

这里 r_0 是初始生成元(图 2 中的灰色圆盘)的半径, r_1 是第一级结构(图 3(a))中灰色圆盘的半径; $\dots$; r_n 是第 n 级结构中灰色圆盘的半径. 于是, 在第一级结构上, 有

$$d_{(1,1)} = r_0 - 2r_1 = (1 - 2r_s)r_0. \quad (2)$$

由于距离恒正, 故必然有 $d_{(1,1)} \geq 0$ 或 $r_s \leq 1/2$. 需要注意的是, 一旦 $r_s = 1/2$, 雪花第一级结构中的子结构就连通在一起, 不可能再继续生长. 在第二级结构上, 有

$$\begin{aligned} d_{(2,1)} &= r_0 - 2r_1 - 2r_2 = (1 - 2r_s - 2r_s^2)r_0, \\ d_{(2,2)} &= r_1 - 2r_2 = (r_s - 2r_s^2)r_0. \end{aligned} \quad (3)$$

在第三级结构上, 有

$$\begin{aligned} d_{(3,1)} &= r_0 - 2r_1 - 2r_2 - 2r_3 = (1 - 2r_s - 2r_s^2 - 2r_s^3)r_0, \\ d_{(3,2)} &= r_1 - 2r_2 - 2r_3 = (r_s - 2r_s^2 - 2r_s^3)r_0, \\ d_{(3,3)} &= r_2 - 2r_3 = (r_s^2 - 2r_s^3)r_0. \end{aligned} \quad (4)$$

在第四级结构上, 有

$$\begin{aligned} d_{(4,1)} &= r_0 - 2r_1 - 2r_2 - 2r_3 - 2r_4 \\ &= (1 - 2r_s - 2r_s^2 - 2r_s^3 - 2r_s^4)r_0, \\ d_{(4,2)} &= r_1 - 2r_2 - 2r_3 - 2r_4 = (r_s - 2r_s^2 - 2r_s^3 - 2r_s^4)r_0, \\ d_{(4,3)} &= r_2 - 2r_3 - 2r_4 = (r_s^2 - 2r_s^3 - 2r_s^4)r_0, \\ d_{(4,4)} &= r_3 - 2r_4 = (r_s^3 - 2r_s^4)r_0. \end{aligned} \quad (5)$$

类推下去, 在第 n 级结构上, 有

$$\begin{aligned} d_{(n,1)} &= r_0 - 2r_1 - 2r_2 - 2r_3 - 2r_4 - \dots - 2r_{n-1} - 2r_n \\ &= (1 - 2r_s - 2r_s^2 - 2r_s^3 - 2r_s^4 - \dots - 2r_s^{n-1} - 2r_s^n)r_0, \\ d_{(n,2)} &= r_1 - 2r_2 - 2r_3 - 2r_4 - \dots - 2r_{n-1} - 2r_n \\ &= (r_s - 2r_s^2 - 2r_s^3 - 2r_s^4 - \dots - 2r_s^{n-1} - 2r_s^n)r_0, \\ d_{(n,3)} &= r_2 - 2r_3 - 2r_4 - \dots - 2r_{n-1} - 2r_n \\ &= (r_s^2 - 2r_s^3 - 2r_s^4 - \dots - 2r_s^{n-1} - 2r_s^n)r_0, \\ &\dots \\ d_{(n,n-2)} &= r_{n-3} - 2r_{n-2} - 2r_{n-1} - 2r_n \\ &= (r_s^{n-3} - 2r_s^{n-2} - 2r_s^{n-1} - 2r_s^n)r_0, \\ d_{(n,n-1)} &= r_{n-2} - 2r_{n-1} - 2r_n = (r_s^{n-2} - 2r_s^{n-1} - 2r_s^n)r_0, \\ d_{(n,n)} &= r_{n-1} - 2r_n = (r_s^{n-1} - 2r_s^n)r_0. \end{aligned} \quad (6)$$

注意到, 距离 $d_{(i,j)}$ 是自相似比 r_s 的函数. 依据(2)~(6)式, 我们就可以揭示雪花的生长运动学规律.

2.2 分形雪花生长速度的时空分布

为澄清分形雪花生长速度在空间和时间上的分布, 我们考察最近点的相向运动. 当第二级结构从第一级结构长出的瞬间, 有

$$d_{(2,1)} - d_{(1,1)} = -2r_s^2 r_0. \quad (7)$$

从代数式看, 显然有 $d_{(2,1)} - d_{(1,1)} < 0$ 或 $d_{(2,1)} < d_{(1,1)}$; 从运动学看, 因最近点相向运动, 故其距离必然减小.

本文并没有涉及时间参数, 但为便于刻画雪花的运动, 我们假设每级结构长出的时间均为单位时

间. 于是, 第二级结构长出的瞬间, $|d_{(2,1)} - d_{(1,1)}|$ 就不仅代表了最近点相向移动的距离, 而且刻画了最近点第一步移动的“速度”: 此值越大, 表明雪花生长得越快, 反之越慢.

当第三级结构从第二级结构长出的瞬间, 有

$$d_{(3,1)} - d_{(2,1)} = d_{(3,2)} - d_{(2,2)} = -2r_s^3 r_0, \quad (8)$$

(8)式刻画了最近点第二步移动的速度. 当第四级结构从第三级结构长出的瞬间, 有

$$d_{(4,1)} - d_{(3,1)} = d_{(4,2)} - d_{(3,2)} = d_{(4,3)} - d_{(3,3)} = -2r_s^4 r_0, \quad (9)$$

(9)式刻画了最近点第三步移动的速度. 依次类推, 当第 n 级结构从第 $n-1$ 级结构长出时, 有

$$\begin{aligned} d_{(n,1)} - d_{(n-1,1)} &= d_{(n,2)} - d_{(n-1,2)} = \dots \\ &= d_{(n,n-1)} - d_{(n-1,n-1)} = -2r_s^n r_0, \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式刻画了最近点第 $n-1$ 步移动的速度. (7)~(10)式给出如下重要信息: (1) 每一级新结构长出的瞬间, 雪花上所有最近点相向运动的速度都相等. 换言之, 在给定的时刻, 雪花的生长速度在空间上均匀分布; (2) 由于 $r_s < 1/2$, 故随着结构级数 n 的增加, 雪花的生长速度不断减小. 换言之, 雪花的生长速度随时间下降; (3) 雪花的特征尺度 r_0 越大, 生长速度越大; (4) 自相似比 r_s 越大, 雪花生长越快. 这些信息, 精准地刻画了分形雪花生长速度的时空分布.

2.3 分形雪花的稠密度

我们再考察各级结构上 $i-1$ 级子结构的距离与 i 级子结构的距离之差. 在第二级结构上, 有

$$d_{(2,2)} - d_{(2,1)} = (3r_s - 1)r_0. \quad (11)$$

在第三级结构上, 有

$$\begin{aligned} d_{(3,2)} - d_{(3,1)} &= (3r_s - 1)r_0, \\ d_{(3,3)} - d_{(3,2)} &= r_s(3r_s - 1)r_0. \end{aligned} \quad (12)$$

在第四级结构上, 有

$$\begin{aligned} d_{(4,2)} - d_{(4,1)} &= (3r_s - 1)r_0, \\ d_{(4,3)} - d_{(4,2)} &= r_s(3r_s - 1)r_0, \\ d_{(4,4)} - d_{(4,3)} &= r_s^2(3r_s - 1)r_0. \end{aligned} \quad (13)$$

类推下去, 在第 n 级结构上, 有

$$\begin{aligned} d_{(n,2)} - d_{(n,1)} &= (3r_s - 1)r_0, \\ d_{(n,3)} - d_{(n,2)} &= r_s(3r_s - 1)r_0, \\ d_{(n,4)} - d_{(n,3)} &= r_s^2(3r_s - 1)r_0, \\ &\dots\dots \\ d_{(n,n-1)} - d_{(n,n-2)} &= r_s^{n-3}(3r_s - 1)r_0, \\ d_{(n,n)} - d_{(n,n-1)} &= r_s^{n-2}(3r_s - 1)r_0. \end{aligned} \quad (14)$$

所有的距离差表达式不仅是自相似比 r_s 的函数, 而且都包含有公共因子 $(3r_s - 1)$. 当且仅当

$$r_s = (r_s)_{cr} = \frac{1}{3}, \quad (15)$$

公共因子 $(3r_s - 1)$ 为零:

$$(3r_s - 1)|_{r_s=(r_s)_{cr}} = 0. \quad (16)$$

(15)式定义了一个临界自相似比 $(r_s)_{cr}$. 由自相似维

数的定义 $D_s = \frac{\ln 7}{\ln \frac{1}{r_s}}$ 可知, $(r_s)_{cr}$ 确定了超级分形雪花

的临界自相似维数 $(D_s)_{cr}$:

$$(D_s)_{cr} = \frac{\ln 7}{\ln \frac{1}{(r_s)_{cr}}} = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1.7712. \quad (17)$$

我们在研究(6)分圆超级分形纤维时^[11], 也得到过临界自相似比 $(r_s)_{cr}$, 并称之为生长极限. (11)~(14)式表明, 生长极限 $(r_s)_{cr}$ 在雪花演化中扮演了重要角色, 它是一个重要的“临界点”. 我们将证实: 这个临界点, 就是雪花生长模式和拓扑演化方式的突变点.

当 $r_s < (r_s)_{cr}$ (亦即 $D_s < (D_s)_{cr}$) 时, 由(14)式知 $d_{(n,j)} - d_{(n,j-1)} < 0$, 于是有

$$d_{(n,n)} < d_{(n,n-1)} < \dots < d_{(n,2)} < d_{(n,1)}. \quad (18)$$

这个不等式序列表明, 在超级分形雪花上, 高级子结构的距离小于低级子结构的距离, 或者说, 高级子结构比低级子结构更稠密. 注意到, 高级子结构是小尺度上的精细结构, 低级子结构是大尺度上的粗糙结构, 因此可以说, 小尺度上精细结构的稠密度大于大尺度上粗糙结构的稠密度. 基于这个图像, 我们提出问题: 如果雪花不断生长下去, 会发生什么? 我们取极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{(n,1)} = \frac{1 - 3r_s}{1 - r_s} r_0, \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{(n,n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} [(1 - 2r_s)r_s^{n-1}r_0] = 0. \quad (20)$$

显然, 如果雪花的级数 n 趋于无穷, 则一级子结构的距离将达到一个有限值, n 级子结构的距离趋向于零. 至此, 我们得到临界点左侧 ($r_s < (r_s)_{cr}$) 的完整图像: (1) 雪花能够无休止地生成无穷多级自相似结构; (2) 在小尺度上, 越精细的结构稠密度越高, 而最精细的

结构将相互接触, 趋于拓扑连通((20)式); (3) 在大尺度上, 越粗糙的结构越稀疏, 最粗糙的结构生长趋于停滞, 其距离趋于稳定不变值((19)式).

当 $r_s > (r_s)_{cr}$ (亦即 $D_s > (D_s)_{cr}$) 时, 由(14)式知 $d_{(n,j)} - d_{(n,j-1)} > 0$, 于是有

$$d_{(n,n)} > d_{(n,n-1)} > \dots > d_{(n,2)} > d_{(n,1)}. \quad (21)$$

这个不等式序列表明, 在超级分形雪花上, 低级子结构的距离小于高级子结构的距离, 即低级子结构比高级子结构更稠密. 确切地说, 大尺度上粗糙结构的稠密度大于小尺度上精细结构的稠密度. 在这个图像下, 可能存在最大级数 N_{max} , 使得

$$\lim_{n \rightarrow N_{max}} d_{(n,1)} = \lim_{n \rightarrow N_{max}} \left(1 - 2r_s - 2r_s^2 - 2r_s^3 - 2r_s^4 - \dots - 2r_s^{n-1} - 2r_s^n \right) r_0 = 0, \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow N_{max}} d_{(n,n)} = (1 - 2r_s) r_s^{N_{max}-1} r_0. \quad (23)$$

(22)式是一个高阶代数方程, 对给定的自相似比 r_s , 正整数解 N_{max} 可能并不存在, 但它仍然表明, 存在 N_{max} , 当 $n \rightarrow N_{max}$ 时, 雪花在大尺度上的粗糙结构将碰撞或重叠. 至此, 我们得到临界点右侧($r_s > (r_s)_{cr}$)的完整图像: (1) 雪花至多生成 N_{max} 级自相似结构; (2) 在小尺度上, 越精细的结构越稀疏, 最精细的结构生长趋于停滞, 其距离趋于稳定不变值((23)式); (3) 在大尺度上, 越粗糙的结构越稠密, 最粗糙的结构最终趋于拓扑连通和融合((22)式).

大尺度上, 子结构的拓扑一旦连通或重叠, 雪花便停止生长. 当然, 这幅图像只是理想化的描述, 一朵真实的雪花, 虽然宏观结构因拓扑连通而停止了生长, 但是由于微观结构间还存在间隙, 故在小尺度上精细结构继续生长的可能性仍然存在.

当 $r_s = (r_s)_{cr}$ (亦即 $D_s = (D_s)_{cr}$) 时, 由(14)式知 $d_{(n,j)} - d_{(n,j-1)} = 0$, 于是有

$$d_{(n,n)} = d_{(n,n-1)} = \dots = d_{(n,2)} = d_{(n,1)}. \quad (24)$$

这个等式序列表明, 在超级分形雪花上, 各级子结构的距离总保持相等, 或者说, 低级子结构与高级子结构有完全相同的稠密度. 确切地说, 大尺度上粗糙结构的稠密度等于小尺度上精细结构的稠密度. 基于这个图像, 我们提出问题: 如果雪花不断生长下去, 会发生什么? 我们取极限:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d_{(n,n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_{(n,n-1)} = \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_{(n,2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{(n,1)} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

显然, 如果雪花无限生长下去, 各级子结构的距离将同时达到零. 换言之, 不论在大尺度还是在小尺度上, 雪花相邻的子结构都将同时相互接触. 至此, 我们得到临界点处的完整图像: 当 $r_s = (r_s)_{cr}$ 时, 雪花不仅能够无休止地生成无穷多级自相似结构, 而且精细的结构与粗糙的结构均匀生长, 最终拓扑同时连通而完全溶为一体. 这种宏观和微观上的协同性和同时性, 在经典分形集中极为罕见.

3 理想化的雪花与真实的雪花

超级分形雪花虽然不是真实的雪花, 但它是理解真实雪花生长的理想化“模板”, 即真实的雪花“倾向于”超级分形雪花的生长模式. 理由如下: 一方面, 超级分形雪花的拓扑花样, 是易于保持稳定平衡的花样; 另一方面, 大量超级分形雪花构成的孤立系统, 是易于保持稳定平衡的系统.

平衡和稳定是力学概念. 平衡态是能量取极值的状态, 稳定的平衡态则是能量取最小值的状态. 但由于本文并没涉及到作用力, 故我们只能尝试从几何的角度予以说明. 力学上的平衡, 往往对应于几何上的对称. 一般地说, 在对称的载荷作用下, 对称的几何构型, 也是平衡的构型; 对称性越高的几何构型, 也是稳定性越好的平衡构型. 注意到, 超级分形雪花已经涵盖了4种最常见的对称性, 很难再构造对称性更高的理想化雪花. 换言之, 超级分形雪花已经是一种稳定性较好的平衡花样.

超级分形雪花的六角对称性, 使之易于组装成稳定平衡系统. 假设有无穷多朵超级分形雪花, 满足如下条件: (1) 雪花的对称中心(或成核中心)在空间中均匀分布, 即每一朵雪花的成核中心都位于正六边形网络的结点上; (2) 所有的雪花都是全等的; (3) 每一朵雪花都按照图3中的“均匀生长模式”同步生长. 在这样的条件下, 无穷多朵超级分形雪花最终将“均匀地填充”整个空间. “均匀填充”在几何上是一种对称的拓扑镶嵌构型, 在力学上则等价于一种能量最低的稳定平衡状态.

总之, 不论从单一雪花看, 还是从雪花系统看, 超级分形雪花都是一个优化的花样. 因此我们说, 真实的雪花“倾向于”超级分形雪花的生长模式. 然而, “倾向于”并不是“等同于”. 上述分析中隐含着两个难以满足的必要条件: (1) 雪花周边的环境没有任何扰动和涨落; (2) 孤立系统所处的空间是绝对理

想化的. 实际上, 雪花在飘落过程中, 气流的扰动、雪花之间的碰撞和温度的涨落都是不可避免的, 因此, 绝对理想化的环境是不存在的. 不仅如此, 由于扰动和涨落是随机的, 这种随机性必然会导致雪花生长动力学过程的不确定性, 因此自然界中不会有两片完全相同的雪花. 从这个意义上讲, 超级分形雪花的生长运动学并不是真实雪花的生长运动学, 但这并不降低理想化雪花及其生长运动学的科学价值. 由于“倾向于”, 故我们有这样的命题: 在千姿百态、千变万化的雪花背后, 可能存在着一个不变的分形几何学模式. 这个命题在科学上是重要的, 其重要性体现在如下两个方面.

一方面, 命题为研究真实的雪花提供了一种普适性模式. 正因为“自然界中不会有两片完全相同的雪花”, 我们不可能通过研究“这一朵”或“那一朵”雪花, 达成对所有雪花生长的规律性认识. 即使我们能够澄清“这一朵”或“那一朵”雪花的生长过程, 也不可能穷尽所有雪花的生长过程. 因此, 我们反其道而行之, 在理想状态下, 寻求所有雪花共同遵循的生长模式.

另一方面, 命题提供了“以不变应万变”的思路: 基于普适性的生长模式, 研究“这一朵”或“那一朵”雪花的生长过程, 即通过理想化雪花的生长运动学, 模拟真实雪花的生长运动学. 具体含义如下: 真实的雪花之所以“真实”, 是因为扰动和涨落. 于是, 我们可以在理想化雪花中引入扰动和涨落, 促使其“逼近”真实的雪花. 扰动和涨落, 物理上是打破平衡的因素, 几何上是打破对称的因素. 也就是说, 在超级分形雪花中, 只需要随机地引入对称性破缺, 就等价于模拟了扰动和涨落. 具体做法之一, 是在自相似比 $(r_s)_\alpha$ 上叠加一个随机小量 δ_i :

$$(r_s)_i = (r_s)_\alpha + \delta_i, \quad (26)$$

即 i 级子结构与 $i-1$ 级子结构相比, 虽然是相似的, 但因为 $(r_s)_i \neq (r_s)_{i-1} \neq \text{Const.}$, 故不再是自相似的. 于是, 超级分形雪花的仿射对称性就被打破了. 我们还可以通过如下做法, 打破超级分形雪花的平移对称性、旋转对称性和反射对称性: (1) 在 i 级子结构的中心坐标上叠加一个随机的小位移; (2) 在 i 级子结构的方位角上叠加一个随机的小角度; (3) 随机地在空白雪花的中心嵌入一朵更小的雪花; (4) 随机地删除 i 级子结构的某一部分; …… 总之, 通过引入几何缺

陷, 我们就能够诱导出无穷无尽对称性破缺的雪花图案; 通过模拟随机扰动和涨落, 我们就能够将理想化雪花的生长运动学推广到真实雪花的生长运动学.

注意到, 经典分形几何中, 还有一朵 Koch 雪花. 于是就有这样的问题: 超级分形雪花和 Koch 雪花, 哪一朵更接近真实雪花? 我们先比较一下超级分形雪花和 Koch 雪花: 前者是“镂空”结构, 后者是“实心”结构; 前者拓扑复杂, 后者拓扑简单; 前者的内部是分形, 外部也是分形, 后者只有外边缘是分形, 内部不是分形. 虽然差别很大, 但二者也有共性: 二者都具有四种对称性; 另外, 尽管前者的拓扑结构比后者复杂, 但二者的生成规则具有同等的简单性. 我们再把二者与真实雪花做一比较: 真实雪花在生长期保持“镂空”结构, 但在熔融期倾向“实心”结构. 因此我们推测: 生长期的雪花更接近超级分形雪花, 熔融期的雪花更接近 Koch 雪花. 换言之, 超级分形雪花和 Koch 雪花, 是真实雪花不同演化阶段的理想化模型.

4 普适的分形生长运动学

本文的标题是“超级分形雪花的生长运动学”. 能否扩大限定词, 使之成为“超级分形纤维的生长运动学”? 能否去掉限定词, 使之成为“分形生长运动学”? 答案是肯定的.

为回答上述问题, 我们再对超级分形雪花的生长运动学进行一番回顾和提炼. 超级分形雪花, 是一系列自相似的几何图案收敛的最终产物. 我们把这“一系列自相似的几何图案”, 统称为“自相似的花样序列”. 花样序列中的每一幅图案都是静态的, 但自然界中的雪花并不是静止的, 而是随时间演化的. 我们的问题是: 怎样让静态的花样动起来, 从而能够动态地模拟雪花的生长? 表面上看, 第 2 节中的运动分析法就是解决问题的方法. 实际上, 运动分析法是以如下操作为基础: 在计算机屏幕上, 我们从图 3 中的第一个花样开始, 依次显示出第一个花样、第二个花样…第 i 个花样、第 $i+1$ 个花样…与电影原理相似, 当相邻两幅花样之间的时间间隔足够短时, 由于视觉的滞后效应, 我们就看到了超级分形雪花生长的连续画面. 为方便起见, 我们把这项虚拟技术称为“花样序列的连续显示技术”(简称“连续显示技术”).

借助连续显示技术,我们直观地“观察”了超级分形雪花的连续生长过程,“看出”了超级分形雪花的演化特征;借助代数方法,我们定量地刻画了这些演化特征,揭示了超级分形雪花生长的几何不变性质.生长过程的定量化描述,就是超级分形雪花的生长运动学(或“花样运动学”).

上述思想虽然是从超级分形雪花中归纳出来的,但具有一般性.这种一般性,来自连续显示技术的普适性——它不仅适用于超级分形雪花,而且适用于任何超级分形集.例如,图5和6分别是 $(8+1)$ 分圆和 (5) 分五边形超级分形集.就生长模式和拓扑演化方式^[12]而言,二者之间有很大差别;另外,二者与超级分形雪花相比也有很大不同,但这并不影响连续显示技术的有效性.借助该技术,我们能够“观察”(8+1)分圆和 (5) 分五边形超级分形集的生长过程;借助代数方法,我们能够刻画它们的生长特征,进而建立其

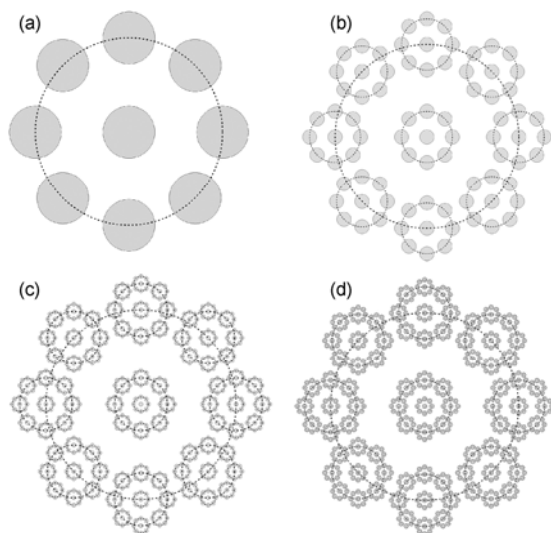


图5 $(8+1)$ 分圆超级分形纤维

(a) 第一级结构; (b) 第二级结构; (c) 第三级结构; (d) 第四级结构

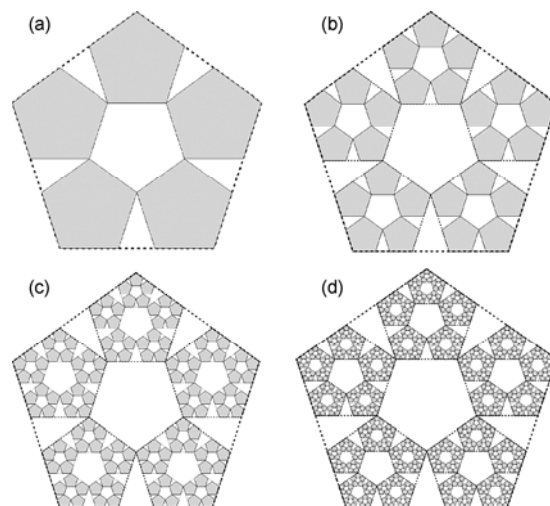


图6 具有连通拓扑的 (5) 分五边形超级分形纤维

(a) 第一级结构; (b) 第二级结构; (c) 第三级结构; (d) 第四级结构

生长运动学.限于论文的篇幅和本文的主题,此处略去 $(8+1)$ 分圆和 (5) 分五边形超级分形集生长运动学的具体内容.

总之,连续显示技术是一项普适性的技术,它能够实现分形生长的“可视化”,揭示分形生长的几何特征,引导我们建立分形生长运动学.

5 结论

超级分形雪花的生长过程包含了丰富的信息,从这些信息中得出了有价值的结果,其中超级分形雪花生长图像中不变的几何关系,丰富了分形几何学.超级分形雪花的生长模式,有可能成为非线性动力学中代表性的生长模式之一;超级分形雪花的生长运动学,为我们理解大自然中的生长现象提供了参考.本文只是揭示了纯几何意义上的运动学,虽然还没有涉及生长的驱动力,但已经为我们理解分形雪花的演化动力学铺平了道路.

参考文献

- 1 张斌,艾南山,黄正文,等.中国嘉陵江河曲的形态与成因.科学通报,2007,52:2671—2682
- 2 方崇惠,郭生练,段亚辉,等.应用分形理论划分洪水分期的两种新途径.科学通报,2009,54:1613—1617
- 3 刘洪涛,葛世荣.磨屑轮廓的雷达图分形表征.科学通报,2007,52:1586—1590
- 4 周宏伟,张亚衡,李爱民,等.孔隙介质中流体渗流边界演化过程的实验研究.科学通报,2008,53:351—358
- 5 王义琴,张慧娟,杨莫安,等.大气 CO_2 浓度倍增对植物幼苗根系生长影响的分形分析.科学通报,1998,43:1736—1738
- 6 陶高梁,张季如.表征孔隙及颗粒体积与尺度分布的两类岩土体分形模型.科学通报,2009,54:838—846
- 7 李妙玲,齐乐华,李贺军,等.炭/炭复合材料微观孔隙结构演化的分形特征.中国科学E辑:技术科学,2009,39:974—979
- 8 张庶元,陈志文,谭舜,等. Pd/a-Ge 双层膜中金属诱导晶化引起的分形.科学通报,1995,40:880—884

- 9 Libbrecht K G. The Snowflake. Osceola: Voyageur Press, 2003
- 10 Yin Y, Zhang T, Yang F, et al. Geometric conditions for fractal super carbon nanotubes with strict self-similarities. *Chaos Soliton Fract*, 2008, 37: 1257—1266[[doi](#)]
- 11 Yin Y, Zhang T, Yang F, et al. Growth condition and growth limit for fractal super fibers and fractal super tubes. *Int J Nonlin Sci Numer Simul*, 2008, 9: 96—102
- 12 Yin Y, Yang F, Fan Q S, et al. Cell elements, growth modes and topology evolutions of fractal supper fibers. *Int J Nonlin Sci Numer Simul*, 2009, 10: 1—12
- 13 Yin Y, Yang F, Fan Q S. Isologous fractal super fibers or fractal super lattices. *Int J Electrospun Nanofibers Appl*, 2008, 2: 193—201
- 14 Yin Y, He B, Yang F, et al. Centroid evolution theorem induced from fractal super fiber or fractal super snowflakes. *Int J Nonlin Sci Numer Simul*, 2009, 10: 805—809
- 15 殷雅俊, 杨帆, 范钦珊, 等. 从毛发纤维中抽象出的分形几何与拓扑. *应用数学与力学*, 2009, 30: 766—774
- 16 Prozorov T, Palo P, Wang L, et al. Cobalt ferrite nanocrystals: Out-performing magnetotactic bacteria. *ACS Nano*, 2007, 1: 228—233[[doi](#)]
- 17 Du J, Niu H, Dong J Y, et al. Self-similar growth of polyolefin alloy particles in a single granule multi-catalyst reactor. *Adv Mater*, 2008, 20: 2914—2917

· 动 态 ·

超冷费米原子气体可具有巡游铁磁性

美国麻省理工学院 Gyu-Boong Jo 研究小组研究了由自旋朝上和自旋朝下费米子组成的气体能否因相互排斥作用而具有铁磁性的问题, 该问题目前在理论上还没有明确的回答. 他们利用超冷双组份费米气体进行了实验. 研究发现, 随斥力的增大其寿命、动能和尺寸大小表现出非单调变

化行为, 表明气团发生了向铁磁态的相变. 该结果提示离域费米子可具有巡游铁磁性, 而不需要晶格和能带结构. 同时, 该研究结果也验证了 Stoner 关于铁磁性形成的基本模型. 相关研究论文发表在 2009 年 9 月 18 日出版的 *Science*, 325(5947): 1521—1524 上.

对退相干不敏感的自旋霍尔电阻量子化平台

中国科学院物理研究所北京凝聚态物理国家实验室(筹)谢心澄、孙庆丰研究小组研究了退相干对量子自旋霍尔效应(QSHE)影响. 不存在退相干时, QSHE 系统的纵向电阻具有量子平台. 这些量子平台几乎不受一般退相干影响, 但在自旋退相干中表现得比较脆弱. 因此, 这些量子平台只在介观尺度样品中存在. 而且, 纵向电阻随样品长度线

性增加, 但对样品宽度不敏感. 这些特征与近期的实验结果高度一致. 此外, 他们还定义了一种新的自旋霍尔电阻. 该电阻具有量子平台, 而且其平台不受任何类型退相干影响, 可存在于宏观样品中. 该电阻可以更好地反映 QSHE 的拓扑学特性. 相关研究论文发表在 2009 年 7 月 17 日出版的 *Physical Review Letters*, 103: 036803 上.

信息来源: 科技部基础研究司, 科技部基础研究管理中心