



强凸 Kähler-Finsler 度量的 Ricci 曲率

献给沈一兵教授 85 寿辰

陈滨¹, 刘四维^{1*}, 赵俐俐²

1. 同济大学数学科学学院, 上海 200092;

2. 上海交通大学数学科学学院, 上海 200240

E-mail: chenbin@tongji.edu.cn, carrot98@163.com, zhaolili@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2022-10-27; 接受日期: 2022-12-17; 网络出版日期: 2023-04-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11871126) 资助项目

摘要 本文研究强凸 Kähler-Finsler 空间的几何性质. 通过讨论实、复测地系数之间的联系, 获得了 Kähler-Finsler 流形上复结构的弱平行性, 进而发现复 Ricci 曲率的虚部恰好是 Ξ 曲率. 此外, 对于 Kähler-Berwald 度量而言, 本文证明了实 Einstein 与复 Einstein 的一致性.

关键词 Kähler-Finsler 复结构 Ricci 曲率 Ξ -曲率

MSC (2020) 主题分类 53C60, 53B40

1 引言

在实 Finsler 几何中, 已有大量研究涉及旗曲率、Ricci 曲率等重要的几何量, 而复 Finsler 几何中该类几何量的研究相对较少^[3]. 通过建立实 Finsler 几何量与复 Finsler 几何量之间的关系, 可以获得复 Finsler 空间的几何性质. 但是, 一般情形下, 实 Finsler 几何和复 Finsler 几何的关系并不像 Riemann 几何和 Hermite 几何的关系那么紧密. 复 Finsler 度量未必是实 Finsler 度量, 当它同时也是一个实 Finsler 度量时, 称它为强凸复 Finsler 度量^[1]. 目前, 强凸复 Finsler 度量受到许多学者的关注. 文献 [1, 第 2.6 小节] 描述了在 Kähler 假设下实 Finsler 度量与复 Finsler 度量的测地系数之间的关系. 文献 [10] 研究了 Kähler-Berwald 度量成为 Einstein 度量的条件. 最近有研究指出对于强凸的弱 Kähler-Finsler 度量, 其全纯曲率就是全纯平面的旗曲率^[7]. 本文将从实的角度研究复 Finsler 度量的复结构和 Ricci 曲率.

在经典的 Kähler 几何中, 复结构在 Levi-Civita 联络下是平行的. Aikou^[2] 证明了 Kähler-Finsler 度量的复结构的提升关于 Chern 联络是平行的. 本文研究复结构 J 关于实 Berwald 联络 $\tilde{\nabla}$ 的平行性.

英文引用格式: Chen B, Liu S W, Zhao L L. Ricci curvature of strongly convex Kähler-Finsler metrics (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1469–1488, doi: 10.1360/SSM-2022-0208

定理 1.1 设 G 是一个强凸的弱 Kähler-Finsler 度量, 则有

$$\check{\nabla}_{y^{\mathcal{H}}} J(\cdot) = -\frac{1}{4} B(Jy, Jy, J(\cdot)), \quad (1.1)$$

其中, $y = y^i \partial / \partial x^i$, $y^{\mathcal{H}} = y^i \delta / \delta x^i$, B 为实 Berwald 曲率张量.

应用上述复结构的协变导数公式, 本文研究 Ricci 曲率的实表示, 并得到下述定理.

定理 1.2 设 G 是一个强凸的弱 Kähler-Finsler 度量, 则其复 Berwald 联络的 Ricci 曲率 $\check{\mathbf{Ric}}$ 可表示为

$$\check{\mathbf{Ric}} = \frac{1}{2}(\mathbf{Ric} + \mathbf{Ric}^J) + \frac{1}{4} \text{tr}(\dot{J} \circ \dot{J}) + \sqrt{-1} \Xi(Jy), \quad (1.2)$$

其中, $\mathbf{Ric}$ 是实 Ricci 曲率, $\mathbf{Ric}^J$ 是 J -Ricci 曲率 (参见 (4.9)), $\dot{J}$ 是 $\check{\nabla}_{y^{\mathcal{H}}} J$ 的简写, Ξ 为 Ξ -曲率 (参见 (4.11)).

值得注意的是, 复 Ricci 曲率的虚部恰好是在实 Finsler 几何中扮演重要角色的 Ξ -曲率^[8]. 此外, 在经典 Kähler 几何中, $\mathbf{Ric}$ 与 $\mathbf{Ric}^J$ 是相等的. 如果度量具有数量旗曲率, 则 $\mathbf{Ric} = \mathbf{Ric}^J$ 且 $\check{\mathbf{Ric}}$ 虚部消失.

定理 1.3 设 G 为强凸的弱 Kähler-Finsler 度量, 且具有数量旗曲率 $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x, y)$, 则有

$$\check{\mathbf{Ric}} = \mathbf{Ric} + \frac{1}{4} \text{tr}(\dot{J} \circ \dot{J}). \quad (1.3)$$

进一步地, 根据定理 1.2, 本文改进了文献 [10] 中关于 Einstein 度量的结果. 一个强凸复 Finsler 度量是实 Einstein 的, 是指其实 Ricci 曲率满足 $\mathbf{Ric} = \sigma(z)G$, 其中, $\sigma(z)$ 为底流形上的实函数; 若其复 Ricci 曲率满足 $\check{\mathbf{Ric}} = \sigma(z)G$, 则称其为复 Einstein 度量.

定理 1.4 设 G 为复流形上的强凸 Kähler-Berwald 度量, 则 $\mathbf{Ric} = \sigma(z)G$ 当且仅当 $\check{\mathbf{Ric}} = \sigma(z)G$, 其中 $\sigma(z)$ 为底流形上的实函数. 换言之, G 是实 Einstein 度量当且仅当它是复 Einstein 度量.

本文余下内容结构如下: 第 2 节介绍复 Finsler 度量的基本概念与符号. 第 3 和 4 节讨论复 Finsler 度量下的复曲率和实曲率. 第 5 节研究复结构的平行性, 并得到定理 1.1. 第 6-8 节探讨 Ricci 曲率和 Einstein 度量, 并证明定理 1.2-1.4.

2 强凸的 Finsler 度量

设 M 为一个 n 维复流形. 令 $\{z^\alpha\}_{\alpha=1}^n$ 为局部复坐标, 将其表示为 $z^\alpha = x^\alpha + \sqrt{-1}x^{\alpha+n}$, 则有局部实坐标 $\{x^\alpha, x^{\alpha+n}\}_{\alpha=1}^n$. 除非特意标注, 下文中希腊字母的指标取值从 1 到 n , 拉丁字母的指标取值从 1 到 $2n$, 且采用 Einstein 求和约定. 记 $T_{\mathbb{R}}M$ 为流形 M 的实切丛, 它是有着复结构 J 的 $2n$ 维实向量丛. 在局部标架 $\{\partial / \partial x^i\}_{i=1}^{2n}$ 下,

$$J = J_k^i dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.1)$$

其中

$$J_k^i = \begin{cases} \delta_{k+n}^i, & 1 \leq k \leq n, \\ -\delta_{k-n}^i, & n+1 \leq k \leq 2n. \end{cases} \quad (2.2)$$

设 $T^{1,0}M$ 为流形 M 的全纯切丛, $\{\partial/\partial z^\alpha\}_{\alpha=1}^n$ 为局部全纯标架. 众所周知, $T^{1,0}M$ 和 $T_{\mathbb{R}}M$ 是同构的^[1], 它们有自然的同构映射 $o: T^{1,0}M \rightarrow T_{\mathbb{R}}M$,

$$v^o = v + \bar{v}, \quad \forall v = v^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \in T^{1,0}M.$$

它的逆 $o: T_{\mathbb{R}}M \rightarrow T^{1,0}M$ 为

$$y_o = \frac{1}{2}(y - \sqrt{-1}Jy), \quad y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_{\mathbb{R}}M.$$

鉴于上述同构, 本文用同一符号 $\tilde{M}$ 来表示实开裂切丛 $T_{\mathbb{R}}M \setminus \{0\}$ 和复开裂切丛 $T^{1,0}M \setminus \{0\}$. 习惯上, 记 $v^o = y$, $y_o = v$, 则

$$v^\alpha = y^\alpha + \sqrt{-1}y^{\alpha+n}, \quad (2.3)$$

进而有

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &:= \frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha+n}} \right), & \partial_{\bar{\alpha}} &:= \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha+n}} \right), \\ \dot{\partial}_\alpha &:= \frac{\partial}{\partial v^\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha+n}} \right), & \dot{\partial}_{\bar{\alpha}} &:= \frac{\partial}{\partial v^{\bar{\alpha}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha+n}} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

坐标 $\{z^\alpha, v^\beta\}$ 构成 $T^{1,0}M$ 上的复坐标, 而 $\{x^i, y^k\}$ 是 $T_{\mathbb{R}}M$ 上的局部实坐标, 且 $\{\partial_\alpha, \dot{\partial}_\beta\}$ 为全纯切丛上的局部全纯标架.

定义 2.1^[1] 若全纯切丛 $T^{1,0}M$ 上的连续函数 $F: T^{1,0}M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足:

- (i) $G := F^2$ 是 $\tilde{M}$ 上的光滑函数;
- (ii) 对于所有的 $v \in \tilde{M}$, 有 $F(v) > 0$;
- (iii) 对于所有的 $v \in T^{1,0}M$ 和 $\zeta \in \mathbb{C}$, 有 $F(\zeta v) = |\zeta|F(v)$;
- (iv) 矩阵 $(G_{\alpha\bar{\beta}})$ 是 $\tilde{M}$ 上的正定阵, 其中

$$(G_{\alpha\bar{\beta}}) = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v^\alpha \partial \bar{v}^\beta} \right), \quad (2.5)$$

则称 F 或 G 为强伪凸的复 Finsler 度量.

定义 2.2^[3] 若切丛 $T_{\mathbb{R}}M$ 上的连续函数 $F^o: T_{\mathbb{R}}M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足:

- (i) $G^o := F^{o2}$ 是 $\tilde{M}$ 上的光滑函数;
- (ii) 对于所有的 $y \in \tilde{M}$, 有 $F^o(y) > 0$;
- (iii) 对于所有的 $y \in T_{\mathbb{R}}M$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, 有 $F^o(\lambda y) = \lambda F^o(y)$;
- (iv) 矩阵 (g_{ij}) 是 $\tilde{M}$ 上的正定阵, 其中

$$(g_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 G^o}{\partial y^i \partial y^j} \right), \quad (2.6)$$

则称 F^o 或 G^o 为实 Finsler 度量, 称 $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ 为实 Finsler 度量 F^o 的基本形式.

定义 2.3^[1] 设 $F: T^{1,0}M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为 M 上的复 Finsler 度量. 令

$$F^o: T_{\mathbb{R}}M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad F^o(y) := F(y_o), \quad \forall y \in T_{\mathbb{R}}M.$$

若 F^o 是实 Finsler 度量, 则称 F 或 $G = F^2$ 为强凸的复 Finsler 度量.

本文假定所考虑的复 Finsler 度量是强凸的. 在不出现冲突的情形下, 同样用符号 F 来表示对应的实 Finsler 度量 F^o , 即对于 $y \in T_{\mathbb{R}}M$, 视 $F(y)$ 为 $F(y_o)$.

下面引进几种简写符号. 用希腊字母下标表示对于复坐标的求导, 分号前表示对 v - 坐标求导, 分号后表示对 z - 坐标求导; 用拉丁字母下标表示对实坐标的求导, 分号前表示对 y - 坐标求导, 分号后表示对 x - 坐标求导. 例如,

$$\begin{aligned} G_{\alpha\bar{\beta}} &= \frac{\partial^2 G}{\partial v^\alpha \partial v^{\bar{\beta}}}, & G_{;\mu\bar{\nu}} &= \frac{\partial^2 G}{\partial z^\mu \partial z^{\bar{\nu}}}, & G_{\alpha;\mu} &= \frac{\partial^2 G}{\partial v^\alpha \partial z^\mu}; \\ G_{ij} &= \frac{\partial^2 G}{\partial y^i \partial y^j}, & G_{;kh} &= \frac{\partial^2 G}{\partial x^k \partial x^h}, & G_{i;k} &= \frac{\partial^2 G}{\partial y^i \partial x^k}. \end{aligned}$$

对于 $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_{\mathbb{R}}M$, 令 $u = Jy$, $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_{\mathbb{R}}M$, 则有

$$u^i \frac{\partial}{\partial x^i} = u = Jy = J_k^i y^k \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.7)$$

记

$$y_i = g_{ij} y^j, \quad u_i = g_{ij} u^j. \quad (2.8)$$

此后如无特殊说明, 符号 u 总是表示 $u = Jy$.

下面将复 Euler 定理表示为实形式. 复函数 $H(v)$ 是 $T^{1,0}M$ 上的 (p, q) 齐次函数, 是指它满足 $H(\lambda v) = \lambda^p \bar{\lambda}^q H(v)$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$. 利用 $H^o(y) = H(y_o)$, 同样可以将 H 看作 $T_{\mathbb{R}}M$ 上的函数, 为了简便, 记 H^o 为 H .

引理 2.1 设 $H(v)$ 为 $T^{1,0}M$ 上的复值函数, 令

$$H(v) = H(y_o) = R(y) + \sqrt{-1}I(y), \quad (2.9)$$

其中 $R(y)$ 和 $I(y)$ 为实值函数, 则 $H(v)$ 是 (p, q) 齐次的当且仅当

$$H_\alpha v^\alpha = pH, \quad H_{\bar{\alpha}} v^{\bar{\alpha}} = qH, \quad (2.10)$$

当且仅当

$$R_k y^k = (p+q)R, \quad I_k y^k = (p+q)I \quad (2.11)$$

且

$$R_k u^k = (q-p)I, \quad I_k u^k = (p-q)R. \quad (2.12)$$

证明 如果 H 是 (p, q) 齐次的, 则利用复 Euler 定理可知

$$H_\alpha v^\alpha = pH, \quad H_{\bar{\alpha}} v^{\bar{\alpha}} = qH. \quad (2.13)$$

利用 (2.3) 和 (2.4), (2.13) 中第一个式子的左边可以写为

$$\begin{aligned} v^\alpha H_\alpha &= \frac{1}{2}(y^\alpha + \sqrt{-1}y^{\alpha+n}) \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha+n}} \right) (R + \sqrt{-1}I) \\ &= \frac{1}{2} \left(y^i \frac{\partial}{\partial y^i} - \sqrt{-1} u^k \frac{\partial}{\partial y^k} \right) (R + \sqrt{-1}I) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(y^i R^i + u^k I_k) + \frac{\sqrt{-1}}{2}(y^i I_i - u^j R_k), \quad (2.14)$$

(2.13) 中第一个式子的右边可以写为

$$pH = pR + \sqrt{-1}pI. \quad (2.15)$$

比较左右两边的实部与虚部, 可得

$$\begin{cases} y^i R^i + u^k I_k = 2pR, \\ y^i I_i - u^j R_k = 2pI. \end{cases} \quad (2.16)$$

类似地, 由 (2.13) 的第二个式子, 可得

$$\begin{aligned} v^{\bar{\alpha}} H_{\bar{\alpha}} &= \frac{1}{2} \left(y^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \sqrt{-1} u^k \frac{\partial}{\partial y^k} \right) (R + \sqrt{-1}I) \\ &= \frac{1}{2} (y^i R_i - u^k I_k) + \frac{\sqrt{-1}}{2} (u^k R_k + y^i I_i) \end{aligned} \quad (2.17)$$

以及

$$qH = qR + \sqrt{-1}qI. \quad (2.18)$$

对比上面两式的实部与虚部, 可得

$$\begin{cases} y^i R_i - u^k I_k = 2qR, \\ u^k R_k + y^i I_i = 2qI. \end{cases} \quad (2.19)$$

利用 (2.16) 和 (2.19), 整理可得

$$R_k y^k = (p+q)R, \quad I_k y^k = (p+q)I \quad (2.20)$$

以及

$$R_k u^k = (q-p)I, \quad I_k u^k = (p-q)R. \quad (2.21)$$

上述推导过程是可逆的. □

引理 2.2 设 G 为强凸的复 Finsler 度量, 则有

$$g_y(Jy, X) = -g_y(y, JX), \quad (2.22)$$

其中 $X \in T_x M$. 特别地,

$$g_y(y, y) = g_y(Jy, Jy) = G(y), \quad g_y(y, Jy) = 0. \quad (2.23)$$

证明 首先证明 (2.22). 我们知道 $G(v)$ 是一个实值函数, 即可以表示为 $G(v) = G(v) + \sqrt{-1} \cdot 0$. 因为 $G(v)$ 是 $(1, 1)$ 齐次的, 所以利用 (2.12), 可得

$$G_k u^k = 0. \quad (2.24)$$

对 y^i 求微分, 再注意关系式 $u^k = J_s^k y^s$, 有

$$G_{ik} u^k + G_k J_i^k = 0. \quad (2.25)$$

注意到 $g_{ik} = \frac{1}{2} G_{ik}$, 利用引理 2.1 以及上式可得

$$u_i = \frac{1}{2} G_{ik} u^k = -J_i^k \frac{1}{2} G_k = -J_i^k y_k, \quad (2.26)$$

即得 (2.22) 的局部表达形式.

利用 (2.26), 可得

$$g_{ij} u^i u^j = u_j u^j = -J_j^s y_s J_k^j y^k = y_k y^k = G \quad (2.27)$$

以及

$$y^i u_i = -y^i J_i^k y^i = -u^k y_k. \quad (2.28)$$

由 (2.28) 知

$$g_{ij} y^i u^j = 0. \quad (2.29)$$

证毕. $\square$

(2.22) 可以等价地表示为, 对于任意的 $X \in T_x M$ 有 $g_y(Jy, JX) = g_y(y, X)$. 若 (G, J) 为 Hermite 度量, 则 G 的基本形式 g 是 J -不变的, 即对于任意的向量场 Y 和 X 有 $g_y(JY, JX) = g_y(Y, X)$. 但在一般情形下, 复 Finsler 度量 G 的基本形式未必是 J -不变的.

命题 2.1 设 J 为流形 M 的复结构, G 为 M 上的复 Finsler 度量, 则基本形式 g 是 J -不变的当且仅当 G 是一个 Hermite 度量.

证明 只需证明命题的必要性. 假设 g 是 J -不变的, 即对于任意的 $Y, X \in T_x M$, 有 $g_y(JY, JX) = g_y(Y, X)$. 在局部坐标下, 可以表示为

$$g_{ij} J_p^i J_q^j = g_{pq}. \quad (2.30)$$

上式对 y^s 求导并乘以 $\frac{1}{2}$, 有

$$C_{ijs} J_p^i J_q^j = C_{pqs}, \quad (2.31)$$

其中 $C_{ijs} := \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^s} g_{ij}$ 是 Cartan 张量的系数. 注意到上式右端的下标是对称的, 所以交换左端下标 s 和 p 得

$$C_{ijp} J_s^i J_q^j = C_{ijs} J_p^i J_q^j. \quad (2.32)$$

上式乘以 J_a^p 和 J_b^q , 有

$$C_{ijp} J_s^i J_q^j J_b^q J_a^p = C_{ijs} J_p^i J_a^p J_q^j J_b^q. \quad (2.33)$$

通过简单的化简, 可以得到

$$-C_{ipb} J_s^i J_a^p = C_{abs}. \quad (2.34)$$

比较 (2.31) 和 (2.34), 如果 g 是 J - 不变的, 则

$$C_{abs} = 0. \quad (2.35)$$

此时 Cartan 张量消失, 意味着 G 是 Riemann 度量.

综上所述, 基本形式 J - 不变的复 Finsler 度量一定是 Hermite 度量. $\square$

3 强凸 Finsler 度量的曲率

设 (M, G) 为强凸的复 Finsler 流形. 它的 Chern-Finsler 非线性联络系数 $\Gamma_{;\beta}^\alpha$ 为

$$\Gamma_{;\beta}^\alpha := G^{\bar{\tau}\alpha} G_{\bar{\tau};\beta}, \quad (3.1)$$

其中 $(G^{\bar{\tau}\alpha}) = (G_{\beta\bar{\tau}})^{-1}$. 记 $\mathbb{G}^\alpha$ 为强凸 Finsler 度量 G 的复测地系数^[1], 即

$$\mathbb{G}^\alpha = \frac{1}{2} \Gamma_{;\beta}^\alpha v^\beta. \quad (3.2)$$

注意 $\mathbb{G}^\alpha$ 是 $(2, 0)$ 齐次的.

复水平切丛 $\mathcal{H}$ 关于 Chern-Finsler 联络的自然局部标架 $\{\delta_\mu\}$ 为

$$\delta_\mu := \partial_\mu - \Gamma_{;\mu}^\alpha \dot{\partial}_\alpha. \quad (3.3)$$

度量 G 可以在复水平切丛 $\mathcal{H}$ 上自然地定义一个内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 即对于 $W_1, W_2 \in \mathcal{H}$, $W_i = W_i^\alpha \delta_\alpha$, 有 $\langle W_1, W_2 \rangle = G_{\alpha\bar{\beta}} W_1^\alpha W_2^{\bar{\beta}}$. 局部标架 $\{\delta_\mu, \dot{\partial}_\alpha\}$ 的对偶余标架是 $\{dz^\mu, \delta v^\alpha\}$, 其中

$$\delta v^\alpha := dv^\alpha + \Gamma_{;\mu}^\alpha dz^\mu. \quad (3.4)$$

Chern-Finsler 联络的 1- 形式为

$$\omega_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta;\mu}^\alpha dz^\mu + C_{\beta\gamma}^\alpha \delta v^\gamma, \quad (3.5)$$

其中,

$$\Gamma_{\beta;\mu}^\alpha := G^{\bar{\tau}\alpha} \delta_\mu(G_{\beta\bar{\tau}}), \quad C_{\beta\gamma}^\alpha := G^{\bar{\tau}\alpha} G_{\beta\bar{\tau}\gamma}. \quad (3.6)$$

注意 $\Gamma_{\beta;\mu}^\alpha = \dot{\partial}_\beta(\Gamma_{;\mu}^\alpha)$.

定义 3.1 ^[1, 4] 设 G 是复流形 M 上强伪凸的复 Finsler 度量. 称 G 为 Kähler-Finsler 度量当且仅当在局部坐标下有 $\Gamma_{\beta;\mu}^\alpha = \Gamma_{\mu;\beta}^\alpha$, 称 G 为弱 Kähler-Finsler 度量当且仅当 $G_\alpha(\Gamma_{\beta;\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu;\beta}^\alpha)v^\mu = 0$.

记 Chern-Finsler 联络的曲率算子为 Ω . 局部地, Ω 可以表示为

$$\Omega = \Omega_\beta^\alpha \otimes [dz^\beta \otimes \delta_\alpha + \delta v^\beta \otimes \dot{\partial}_\alpha],$$

其中

$$\Omega_\beta^\alpha = d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha. \quad (3.7)$$

在局部坐标下, 记

$$\Omega_\beta^\alpha = R_{\beta;\mu\bar{\nu}}^\alpha dz^\mu \wedge dz^{\bar{\nu}} + S_{\beta\mu;\bar{\nu}}^\alpha \delta v^\mu \wedge dz^{\bar{\nu}} + P_{\beta\bar{\nu};\mu}^\alpha dz^\mu \wedge \delta v^{\bar{\nu}} + Q_{\beta\mu\bar{\nu}}^\alpha \delta v^\mu \wedge \delta v^{\bar{\nu}}. \quad (3.8)$$

称 Ω_β^α 的 $\mathcal{H}\bar{\mathcal{H}}$ 部分为 Riemann 曲率. 在局部坐标下, Riemann 曲率系数 $R_{\beta;\mu\bar{\nu}}^\alpha$ 可以写为

$$R_{\beta;\mu\bar{\nu}}^\alpha = -\delta_{\bar{\nu}}(\Gamma_{\beta;\mu}^\alpha) - C_{\beta\sigma}^\alpha \delta_{\bar{\nu}}(\Gamma_{;\mu}^\sigma). \quad (3.9)$$

强伪凸的 Finsler 度量 G 在 v 方向的全纯曲率 $\mathbf{H}(z, v)$ 为

$$\mathbf{H}(z, v) = \frac{2}{G(z, v)^2} \langle \Omega(v^{\mathcal{H}}, \bar{v}^{\mathcal{H}}) v^{\mathcal{H}}, v^{\mathcal{H}} \rangle_v, \quad (3.10)$$

其中 $v^{\mathcal{H}} = v^\alpha \delta_\alpha \in \mathcal{H}$. 在局部坐标下, 有

$$\mathbf{H} = \frac{2}{G^2} R_{\alpha\bar{\beta};\mu\bar{\nu}} v^\alpha v^{\bar{\beta}} v^\mu v^{\bar{\nu}}, \quad (3.11)$$

其中 $R_{\alpha\bar{\beta};\mu\bar{\nu}} = G_{\sigma\bar{\beta}} R_{\alpha;\mu\bar{\nu}}^\sigma$. 直接计算, 可得

$$\mathbf{H}(z, v) = -\frac{2}{G^2} G_\alpha \delta_{\bar{\nu}}(\Gamma_{;\mu}^\alpha) v^\mu v^{\bar{\nu}} = -\frac{2}{G^2} (G_{;\alpha\bar{\beta}} v^\alpha v^{\bar{\beta}} - 4G_{\alpha\bar{\beta}} \mathbb{G}^\alpha \mathbb{G}^{\bar{\beta}}). \quad (3.12)$$

由此式不难看出全纯曲率一定是实值的. Chern-Finsler 联络下的 Ricci 曲率 $\check{\mathbf{Ric}}^c$ 为

$$\check{\mathbf{Ric}}^c := 2R_{\beta;\alpha\bar{\nu}}^\alpha v^\beta v^{\bar{\nu}} = -2\delta_{\bar{\nu}}(\Gamma_{;\alpha}^\alpha) v^{\bar{\nu}}. \quad (3.13)$$

上述 Ricci 曲率中的系数与全纯曲率中的系数是适配的.

除了 Chern-Finsler 联络, 复 Finsler 几何中还有很多不同的联络, 下面介绍复 Berwald 联络及相应的曲率. 复 Berwald 非线性联络系数为^[3]

$$\mathbb{G}_\beta^\alpha = \dot{\partial}_\beta \mathbb{G}^\alpha. \quad (3.14)$$

度量 G 的复 Berwald 联络的联络 1- 形式可以表示为

$$\check{\omega}_\beta^\alpha = \mathbb{G}_{\beta\mu}^\alpha dz^\mu = \dot{\partial}_\mu \dot{\partial}_\beta \mathbb{G}^\alpha dz^\mu. \quad (3.15)$$

显然 $\mathbb{G}_{\beta\mu}^\alpha = \mathbb{G}_{\mu\beta}^\alpha$. 复 Berwald 联络的非线性联络系数对应的水平标架为 $\{\check{\delta}_\mu\}$, 其中 $\check{\delta}_\mu = \partial_\mu - \mathbb{G}_\mu^\alpha \dot{\partial}_\alpha$. 复 Berwald 联络的曲率算子记为 $\check{\Omega}$. 类似 (3.7), 可得曲率算子 $\check{\Omega}_\beta^\alpha$ 的局部表示

$$\check{\Omega}_\beta^\alpha = -\check{\delta}_{\bar{\nu}} \mathbb{G}_{\beta\mu}^\alpha dz^\mu \wedge dz^{\bar{\nu}} - \dot{\partial}_{\bar{\nu}} \mathbb{G}_{\beta\mu}^\alpha dz^\mu \wedge \check{\delta} v^{\bar{\nu}} + (\check{\delta}_\nu \mathbb{G}_{\beta\mu}^\alpha + \mathbb{G}_{\beta\mu}^\gamma \mathbb{G}_{\gamma\nu}^\alpha) dz^\nu \wedge dz^\mu + \dot{\partial}_\nu \mathbb{G}_{\beta\mu}^\alpha \check{\delta} v^\nu \wedge dz^\mu. \quad (3.16)$$

上述曲率算子的 $\mathcal{H}\bar{\mathcal{H}}$ 系数记为

$$\check{R}_{\beta;\mu\bar{\nu}}^\alpha = -\check{\delta}_{\bar{\nu}} \mathbb{G}_{\beta\mu}^\alpha. \quad (3.17)$$

将 (3.11) 中的 $R_{\beta;\mu\bar{\nu}}^\alpha$ 替换为 $\check{R}_{\beta;\mu\bar{\nu}}^\alpha$, 可得复 Berwald 联络下的全纯曲率 $\check{\mathbf{H}}$. 在局部坐标下, 有

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{H}} &= -\frac{2}{G^2} \check{\delta}_{\bar{\nu}}(\mathbb{G}_{\alpha\mu}^\sigma) G_{\sigma\bar{\beta}} v^\alpha v^{\bar{\beta}} v^\mu v^{\bar{\nu}} \\ &= -\frac{2}{G^2} (\mathbb{G}_{\alpha\mu;\bar{\nu}}^\sigma - \mathbb{G}_{\bar{\nu}}^\tau \mathbb{G}_{\alpha\mu\bar{\tau}}^\sigma) v^\alpha v^\mu G_\sigma v^{\bar{\nu}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{4}{G^2} \mathbb{G}_{;\bar{\nu}}^{\sigma} G_{\sigma} v^{\bar{\nu}}, \quad (3.18)$$

其中 $\mathbb{G}_{;\bar{\nu}}^{\alpha} = \partial_{\bar{\nu}} \mathbb{G}^{\alpha}$. 注意到

$$G_{\alpha} \dot{\partial}_{\bar{\tau}} (\Gamma_{;\mu}^{\alpha}) = -G_{\alpha} G^{\alpha\bar{\sigma}} G^{\beta\bar{\nu}} G_{\beta\bar{\sigma}\bar{\tau}} G_{\bar{\nu};\mu} + G_{\alpha} G^{\alpha\bar{\nu}} G_{\bar{\nu}\bar{\tau};\mu} = 0. \quad (3.19)$$

结合 (3.12) 和 (3.19), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\frac{2}{G^2} G_{\alpha} \delta_{\bar{\nu}} (\Gamma_{;\mu}^{\alpha}) v^{\mu} v^{\bar{\nu}} \\ &= -\frac{2}{G^2} G_{\alpha} (\partial_{\bar{\nu}} \Gamma_{;\mu}^{\alpha} - \Gamma_{;\bar{\nu}}^{\bar{\tau}} \dot{\partial}_{\bar{\tau}} \Gamma_{;\mu}^{\alpha}) v^{\mu} v^{\bar{\nu}} \\ &= -\frac{4}{G^2} G_{\alpha} \mathbb{G}_{;\bar{\mu}}^{\alpha} \bar{v}^{\mu}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

因此 Chern-Finsler 联络和复 Berwald 联络下的全纯曲率是一致的. 最后, 引进复 Berwald 联络下的 Ricci 曲率

$$\check{\mathbf{Ric}} := 2\check{R}_{\beta;\alpha\bar{\nu}}^{\alpha} v^{\beta} v^{\bar{\nu}} = -2v^{\bar{\nu}} \check{\delta}_{\bar{\nu}} \mathbb{G}_{\alpha}^{\alpha}. \quad (3.21)$$

一般情形下, 复 Berwald 联络下的 Ricci 曲率不同于 Chern-Finsler 联络下的 Ricci 曲率. 但是当 G 为 Kähler-Finsler 度量时, 就有 $\check{\mathbf{Ric}} = \check{\mathbf{Ric}}^c$ [5].

4 实 Berwald 联络

本文主要考虑强凸复 Finsler 度量的 Ricci 曲率在实 Finsler 几何中的表示. 在实 Finsler 几何中有许多重要的曲率, 下面进行简要回顾.

记 $\hat{\mathbb{G}}^i$ 为实测地系数, 它的表达式为

$$\hat{\mathbb{G}}^i = \frac{1}{4} g^{il} (G_{l;k} y^k - G_{;l}), \quad (4.1)$$

其中 $(g^{ik}) = (g_{ij})^{-1}$. 实 Berwald 联络下的水平实切丛的局部标架 $\{\frac{\delta}{\delta x^i}\}$ 为

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \hat{\mathbb{G}}_i^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad (4.2)$$

其中 $\hat{\mathbb{G}}_i^k = \frac{\partial}{\partial y^i} \hat{\mathbb{G}}^k$ 是实 Berwald 联络的非线性联络系数. 标架 $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\}$ 的对偶余标架为 $\{dx^i, \delta y^j\}$, 其中 $\delta y^j = dy^j + \hat{\mathbb{G}}_k^j dx^k$. 联络 1- 形式 $\hat{\omega}_j^i$ 为

$$\hat{\omega}_j^i = \hat{\mathbb{G}}_{jk}^i dx^k, \quad (4.3)$$

其中 $\hat{\mathbb{G}}_{jk}^i = \frac{\partial}{\partial y^k} \hat{\mathbb{G}}_j^i$. 实 Berwald 联络下的曲率算子 Ω_j^i 为

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + B_{jkl}^i \delta y^l \wedge dx^k. \quad (4.4)$$

曲率项 R_{jkl}^i 是实 Berwald 联络下的 Riemann 张量系数. 局部地, 有

$$R_{jkl}^i = \frac{\hat{\delta} \hat{\mathbb{G}}_{jl}^i}{\hat{\delta} x^k} - \frac{\hat{\delta} \hat{\mathbb{G}}_{jk}^i}{\hat{\delta} x^l} + \hat{\mathbb{G}}_{ks}^i \hat{\mathbb{G}}_{jl}^s - \hat{\mathbb{G}}_{jk}^s \hat{\mathbb{G}}_{ls}^i. \quad (4.5)$$

实 Berwald 曲率张量定义为

$$B = B_{jkl}^i dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (4.6)$$

注意到 $B_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial y^l} \hat{\mathbb{G}}_{jk}^i = \hat{\mathbb{G}}_{jkl}^i$.

对于切平面 $P = \text{span}\{y, V\} \subset T_x M$, 旗曲率 $\mathbf{K}(y, V)$ 为

$$\mathbf{K}(y, V) := \frac{R_{ik} V^i V^k}{(g_{ij} g_{kl} - g_{ik} g_{jl}) y^i y^j V^k V^l}, \quad (4.7)$$

其中, $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in P$, $R_{ik} = g_{mi} R_{jkl}^m y^j y^l$. 若度量是强凸的弱 Kähler-Finsler 度量, 则全纯曲率与全纯平面的旗曲率是相同的, 即 $\mathbf{K}(y, Jy) = \mathbf{H}(v)$ [7]. 文献 [6] 引入了一种 Ricci 曲率张量

$$\text{Ric}_{ij} := \frac{1}{2} (R_{imj}^m + R_{jmi}^m). \quad (4.8)$$

Ricci 曲率 $\mathbf{Ric}$ 也可以表示为 $\mathbf{Ric} = \text{Ric}_{ij} y^i y^j$. 利用上述张量, 定义 J -Ricci 曲率为

$$\mathbf{Ric}^J := \text{Ric}_{ij} u^i u^j. \quad (4.9)$$

在 Hermite 几何中, Kähler 度量有性质 $\mathbf{Ric} = \mathbf{Ric}^J$.

最后介绍文献 [6] 引进的 Ξ - 曲率. 对于 M 上的体积测度 $dV = \sigma(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}$, 度量测度空间 (G, dV) 的 S - 曲率为

$$\mathbf{S} := \frac{\partial \hat{\mathbb{G}}^i}{\partial y^i} - y^i \frac{\partial}{\partial y^i} (\ln \sigma). \quad (4.10)$$

对于不同的体积形式, S - 曲率相差一个 1- 形式. 由 S - 曲率可以定义 Ξ - 曲率张量为

$$\Xi = \Xi_i dx^i, \quad \Xi_i := \frac{1}{2} (\mathbf{S}_{i|m} y^m - \mathbf{S}_{|i}), \quad (4.11)$$

其中, $\mathbf{S}_i = \partial \mathbf{S} / \partial y^i$, “|” 表示实 Berwald 联络下的水平协变导数.

5 复结构的协变导数

根据文献 [1, 命题 2.6.2] 及其注记或文献 [10, 命题 4.1], 有如下引理:

引理 5.1 [1, 10] 设 G 是复流形 M 上的强凸复 Finsler 度量, 它是弱 Kähler-Finsler 度量当且仅当

$$\mathbb{G}^\beta = \hat{\mathbb{G}}^\beta + \sqrt{-1} \hat{\mathbb{G}}^{\beta+n}. \quad (5.1)$$

引理 5.2 设 G 是复流形 M 上强凸的弱 Kähler-Finsler 度量, 则

$$\hat{\mathbb{G}}_k^i u^k = 2J_k^i \hat{\mathbb{G}}^k, \quad (5.2)$$

$$\hat{\mathbb{G}}_{sk}^i u^k = 2J_k^i \hat{\mathbb{G}}_s^k - J_s^k \hat{\mathbb{G}}_k^i \quad (5.3)$$

和

$$\hat{\mathbb{G}}_{slk}^i u^k = 2J_k^i \hat{\mathbb{G}}_{sl}^k - J_s^k \hat{\mathbb{G}}_{kl}^i - \hat{\mathbb{G}}_{sk}^i J_l^k. \quad (5.4)$$

证明 由引理 5.1 可以得到 $\mathbb{G}^\beta = \hat{\mathbb{G}}^\beta + \sqrt{-1}\hat{\mathbb{G}}^{\beta+n}$. 因为 $\mathbb{G}^\alpha$ 是 $(2,0)$ 齐次的, 所以由引理 2.1 的 (2.12) 可知

$$\hat{\mathbb{G}}_k^\alpha u^k = -2\hat{\mathbb{G}}^{\alpha+n} \quad \text{和} \quad \hat{\mathbb{G}}_k^{\alpha+n} u^k = 2\hat{\mathbb{G}}^\alpha. \quad (5.5)$$

由 (2.2), 复结构的分量 J_k^i 可以写为

$$\begin{cases} J_\alpha^i = \delta_{\alpha+n}^i, \\ J_{\alpha+n}^i = -\delta_\alpha^i. \end{cases} \quad (5.6)$$

用上述表达形式, (5.5) 可以写为

$$\hat{\mathbb{G}}_k^i u^k = 2J_k^i \hat{\mathbb{G}}_s^k. \quad (5.7)$$

上式对 y^s 求导, 可得

$$\hat{\mathbb{G}}_{sk}^i u^k + \hat{\mathbb{G}}_k^i J_s^k = 2J_k^i \hat{\mathbb{G}}_s^k. \quad (5.8)$$

再对上式关于 y^l 求导, 可得

$$\hat{\mathbb{G}}_{slk}^i u^k + \hat{\mathbb{G}}_{sk}^i J_l^k = 2J_k^i \hat{\mathbb{G}}_{sl}^k - \hat{\mathbb{G}}_{lk}^i J_s^k. \quad (5.9)$$

证毕. □

定理 5.1 设 G 是一个强凸的弱 Kähler-Finsler 度量, 则有

$$\check{\nabla}_{y^H} J(\cdot) = -\frac{1}{4}B(Jy, Jy, J(\cdot)), \quad (5.10)$$

其中 $y^H = y^i \delta_i \in \mathcal{H}$.

证明 在局部全纯坐标下, 可以直接计算

$$\begin{aligned} J_{k|l}^i &= \frac{\delta J_k^i}{\delta x^l} + J_k^s \hat{\mathbb{G}}_{sl}^i - J_s^i \hat{\mathbb{G}}_{kl}^s \\ &= J_k^s \hat{\mathbb{G}}_{sl}^i - J_s^i \hat{\mathbb{G}}_{kl}^s, \end{aligned} \quad (5.11)$$

其中 “|” 表示实 Berwald 联络下的水平协变导数. 进一步有

$$J_{k|l}^i y^l = J_k^s \hat{\mathbb{G}}_s^i - J_s^i \hat{\mathbb{G}}_k^s. \quad (5.12)$$

对 (5.4) 用 u^l 进行缩并, 结合 (5.2) 和 (5.3), 有

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{G}}_{skl}^i u^k u^l &= 2J_k^i \hat{\mathbb{G}}_{sl}^k u^l - J_s^k \hat{\mathbb{G}}_{kl}^i u^l - \hat{\mathbb{G}}_{sk}^i J_l^k u^l \\ &= 2J_k^i (2J_l^k \hat{\mathbb{G}}_s^l - J_s^l \hat{\mathbb{G}}_l^k) - J_s^k (2J_l^i \hat{\mathbb{G}}_k^l - J_k^l \hat{\mathbb{G}}_l^i) + \hat{\mathbb{G}}_{sk}^i y^k \\ &= -4\hat{\mathbb{G}}_s^i - 2J_k^i \hat{\mathbb{G}}_l^k J_s^l - 2J_l^i \hat{\mathbb{G}}_k^l J_s^k - \hat{\mathbb{G}}_s^i + \hat{\mathbb{G}}_s^i \\ &= -4\hat{\mathbb{G}}_s^i - 4J_k^i \hat{\mathbb{G}}_l^k J_s^l. \end{aligned} \quad (5.13)$$

上式乘以 J_j^s , 可得

$$J_j^s \hat{\mathbb{G}}_{skl}^i u^k u^l = -4J_j^s \hat{\mathbb{G}}_s^i + 4J_k^i \hat{\mathbb{G}}_j^k. \quad (5.14)$$

通过观察 (5.12) 和 (5.14) 可以发现

$$J_{k|l}^i y^l = -\frac{1}{4}(J_k^s \hat{\mathbb{G}}_{jls}^i u^j u^l). \quad (5.15)$$

利用 Berwald 曲率张量, 上式可以表示为

$$\check{\nabla}_{y^h} J(\cdot) = -\frac{1}{4}B(Jy, Jy, J(\cdot)). \quad (5.16)$$

证毕. $\square$

6 Ricci 曲率

本节主要研究复 Berwald 联络下的 Ricci 曲率 $\check{\mathbf{Ric}}$ 的实表示, 并且总假定 $G = F^2$ 是强凸的弱 Kähler-Finsler 度量.

注意到 Ricci 曲率可以写为

$$\check{\mathbf{Ric}} = -2v^{\bar{\nu}} \check{\partial}_{\bar{\nu}} \mathbb{G}_{\alpha}^{\alpha} = -2v^{\bar{\nu}} \partial_{\bar{\nu}} \mathbb{G}_{\alpha}^{\alpha} + 4\mathbb{G}^{\bar{\tau}} \dot{\partial}_{\bar{\tau}} \mathbb{G}_{\alpha}^{\alpha}. \quad (6.1)$$

由引理 5.1 和 (2.4), 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\alpha}^{\alpha} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha+n}} \right) (\hat{\mathbb{G}}^{\alpha} + \sqrt{-1} \hat{\mathbb{G}}^{\alpha+n}) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbb{G}}_i^i - \sqrt{-1} J_k^i \hat{\mathbb{G}}_i^k) \end{aligned} \quad (6.2)$$

和

$$v^{\beta} \partial_{\beta} v = v = y_o = \frac{1}{2}(y - \sqrt{-1}u) = \frac{1}{2} \left(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1} u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right). \quad (6.3)$$

利用上面两式, Ricci 曲率 (6.1) 的第一项可以写为

$$\begin{aligned} v^{\bar{\nu}} \partial_{\bar{\nu}} \mathbb{G}_{\alpha}^{\alpha} &= \frac{1}{4} \left(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1} u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (\hat{\mathbb{G}}_i^i - \sqrt{-1} J_k^i \hat{\mathbb{G}}_i^k) \\ &= \frac{1}{4} (\hat{\mathbb{G}}_{i;s}^i y^s + J_k^i \hat{\mathbb{G}}_{i;s}^k u^s) + \frac{\sqrt{-1}}{4} (\hat{\mathbb{G}}_{i;s}^i u^s - J_k^i \hat{\mathbb{G}}_{i;s}^k y^s), \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ricci 曲率 (6.1) 的第二项可以写为

$$\begin{aligned} \mathbb{G}^{\bar{\tau}} \dot{\partial}_{\bar{\tau}} \mathbb{G}_{\alpha}^{\alpha} &= \frac{1}{4} (\hat{\mathbb{G}}^{\tau} - \sqrt{-1} \hat{\mathbb{G}}^{\tau+n}) \left(\frac{\partial}{\partial y^{\tau}} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y^{\tau+n}} \right) (\hat{\mathbb{G}}_i^i - \sqrt{-1} J_k^i \hat{\mathbb{G}}_i^k) \\ &= \frac{1}{4} (\hat{\mathbb{G}}^s \hat{\mathbb{G}}_{is}^i + J_l^s \hat{\mathbb{G}}^l J_k^i \hat{\mathbb{G}}_{is}^k) + \frac{\sqrt{-1}}{4} (J_l^s \hat{\mathbb{G}}^l \hat{\mathbb{G}}_{is}^i - \hat{\mathbb{G}}^s J_k^i \hat{\mathbb{G}}_{is}^k). \end{aligned} \quad (6.5)$$

因此,

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{Ric}} &= \frac{1}{2} [-\hat{\mathbb{G}}_{i;k}^i y^k + 2\hat{\mathbb{G}}^k \hat{\mathbb{G}}_{ik}^i - J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{i;k}^h u^k + 2\hat{\mathbb{G}}^s J_s^k J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{ik}^h] \\ &\quad + \frac{\sqrt{-1}}{2} [-\hat{\mathbb{G}}_{i;k}^i u^k + 2J_s^k \hat{\mathbb{G}}^s \hat{\mathbb{G}}_{ik}^i + J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{i;k}^h y^k - 2J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{ik}^h \hat{\mathbb{G}}^k]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

直接计算, 可以发现

$$\frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k} y^h = \hat{\mathbb{G}}_{hi;k}^i y^h - \hat{\mathbb{G}}_k^s \hat{\mathbb{G}}_{his}^i y^h = \hat{\mathbb{G}}_{hi;k}^i y^h = \hat{\mathbb{G}}_{i;k}^i. \quad (6.7)$$

由引理 5.2, 有

$$\begin{aligned} \frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^s} u^h &= \hat{\mathbb{G}}_{hi;s}^i u^h - \hat{\mathbb{G}}_s^l \hat{\mathbb{G}}_{hil}^i u^h \\ &= J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{i;s}^h - \hat{\mathbb{G}}_s^l (J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{il}^h - J_l^h \hat{\mathbb{G}}_{ih}^i) \\ &= J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{i;s}^h - J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{il}^h \hat{\mathbb{G}}_s^l + \hat{\mathbb{G}}_s^l J_l^h \hat{\mathbb{G}}_{ih}^i. \end{aligned} \quad (6.8)$$

观察 (6.6)–(6.8), 再通过 (5.2), 可得

$$\begin{aligned} -\frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k} y^h y^k - \frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^s} u^s u^h &= -\hat{\mathbb{G}}_{i;k}^i y^k - J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{i;s}^h u^s + J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{il}^h \hat{\mathbb{G}}_s^l u^s - u^s \hat{\mathbb{G}}_s^l J_l^h \hat{\mathbb{G}}_{ih}^i \\ &= -\hat{\mathbb{G}}_{i;k}^i y^k - J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{i;s}^h u^s + 2J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{il}^h J_s^l \hat{\mathbb{G}}_s^l - 2\hat{\mathbb{G}}_s^l J_l^h \hat{\mathbb{G}}_{ih}^i \\ &= -\hat{\mathbb{G}}_{i;k}^i y^k - J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{i;s}^h u^s + 2J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{il}^h J_s^l \hat{\mathbb{G}}_s^l + 2\hat{\mathbb{G}}_h^h \hat{\mathbb{G}}_{ih}^i \\ &= 2\text{Re}\check{\mathbf{Ric}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

和

$$\begin{aligned} -\frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k} y^h u^k + \frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k} u^h y^k &= -\hat{\mathbb{G}}_{i;k}^i u^k + J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{i;k}^h y^k - J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{il}^h \hat{\mathbb{G}}_k^l y^k + y^k \hat{\mathbb{G}}_k^l J_l^h \hat{\mathbb{G}}_{ih}^i \\ &= -\hat{\mathbb{G}}_{i;k}^i u^k + J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{i;k}^h y^k - 2J_h^i \hat{\mathbb{G}}_{il}^h \hat{\mathbb{G}}_k^l + 2\hat{\mathbb{G}}_k^l J_l^h \hat{\mathbb{G}}_{ih}^i \\ &= 2\text{Im}\check{\mathbf{Ric}}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

因此 Ricci 曲率可以表示为

$$\check{\mathbf{Ric}} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k} y^h y^k - \frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^s} u^s u^h \right] + \frac{\sqrt{-1}}{2} \left[-\frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k} y^h u^k + \frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k} u^h y^k \right]. \quad (6.11)$$

记

$$\mathbb{A}_k^s = -\frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k} (y^s y^h + u^s u^h), \quad (6.12)$$

则 Ricci 曲率 $\check{\mathbf{Ric}}$ 可以表达成

$$\check{\mathbf{Ric}} = \frac{1}{2} \mathbb{A}_k^k + \frac{\sqrt{-1}}{2} J_h^k \mathbb{A}_k^h. \quad (6.13)$$

引理 6.1 设 G 为强凸的弱 Kähler-Finsler 度量, 则有

$$\text{Re}\check{\mathbf{Ric}} = \frac{1}{2} (\mathbf{Ric} + \mathbf{Ric}^J) + \frac{1}{4} \text{tr}(J \circ J), \quad (6.14)$$

其中 $J = \check{\nabla}_y \mathcal{H} J$.

证明 在实的情形下, 实 Berwald 联络下的 Riemann 曲率张量的局部表达式为

$$R_{jkl}^i = \frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{jl}^i}{\delta x^k} - \frac{\delta \hat{\mathbb{G}}_{jk}^i}{\delta x^l} + \hat{\mathbb{G}}_{ks}^i \hat{\mathbb{G}}_{jl}^s - \hat{\mathbb{G}}_{jk}^s \hat{\mathbb{G}}_{ls}^i. \quad (6.15)$$

用 y^j 和 y^l 对 R_{jkl}^i 进行缩并, 可得

$$R_{jkl}^i y^j y^l = 2\hat{\mathbb{G}}_{;k}^i - \hat{\mathbb{G}}_{k;l}^i y^l + 2\hat{\mathbb{G}}^s \hat{\mathbb{G}}_{ks}^i - \hat{\mathbb{G}}_s^i \hat{\mathbb{G}}_k^s. \quad (6.16)$$

于是

$$\mathbf{Ric} = R_{jml}^m y^j y^l = 2\hat{\mathbb{G}}_{;k}^k - \hat{\mathbb{G}}_{k;l}^k y^l + 2\hat{\mathbb{G}}^s \hat{\mathbb{G}}_{ks}^k - \hat{\mathbb{G}}_s^k \hat{\mathbb{G}}_k^s. \quad (6.17)$$

由引理 5.2, 可得

$$\hat{\mathbb{G}}_{jl}^i u^j u^l = 2J_j^i \hat{\mathbb{G}}_l^j u^l - J_l^j u^l \hat{\mathbb{G}}_j^i = 4J_j^i J_l^j \hat{\mathbb{G}}^l + \hat{\mathbb{G}}_j^i y^j = -4\hat{\mathbb{G}}^i + 2\hat{\mathbb{G}}^i = -2\hat{\mathbb{G}}^i. \quad (6.18)$$

因此,

$$\begin{aligned} R_{jkl}^i u^j u^l &= \hat{\mathbb{G}}_{jl;k}^i u^j u^l - \hat{\mathbb{G}}_k^s \hat{\mathbb{G}}_{jls}^i u^j u^l - \frac{\check{\delta} \hat{\mathbb{G}}_{jk}^i}{\check{\delta} x^l} u^j u^l + \hat{\mathbb{G}}_{ks}^i \hat{\mathbb{G}}_{jl}^s u^j u^l - \hat{\mathbb{G}}_{jk}^s u^j \hat{\mathbb{G}}_{ls}^i u^l \\ &= -2\hat{\mathbb{G}}_{;k}^i - \frac{\check{\delta} \hat{\mathbb{G}}_{jk}^i}{\check{\delta} x^l} u^j u^l - 2\hat{\mathbb{G}}^s \hat{\mathbb{G}}_{ks}^i - \hat{\mathbb{G}}_{jk}^s u^j \hat{\mathbb{G}}_{ls}^i u^l - \hat{\mathbb{G}}_k^s \hat{\mathbb{G}}_{jls}^i u^j u^l. \end{aligned} \quad (6.19)$$

从而

$$\mathbf{Ric}^J = R_{jml}^m u^j u^l = -2\hat{\mathbb{G}}_{;m}^m - \frac{\check{\delta} \hat{\mathbb{G}}_{jm}^m}{\check{\delta} x^l} u^j u^l - 2\hat{\mathbb{G}}^s \hat{\mathbb{G}}_{ms}^m - \hat{\mathbb{G}}_{jm}^s u^j \hat{\mathbb{G}}_{ls}^m u^l - \hat{\mathbb{G}}_m^s \hat{\mathbb{G}}_{jls}^m u^j u^l. \quad (6.20)$$

将 (6.17) 和 (6.20) 相加, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{Ric} + \mathbf{Ric}^J &= -\hat{\mathbb{G}}_{k;j}^k y^j - \frac{\check{\delta} \hat{\mathbb{G}}_{jk}^k}{\check{\delta} x^l} u^j u^l - \hat{\mathbb{G}}_{jk}^s u^j \hat{\mathbb{G}}_{ls}^k u^l - \hat{\mathbb{G}}_k^l \hat{\mathbb{G}}_l^k - \hat{\mathbb{G}}_k^s \hat{\mathbb{G}}_{jls}^k u^j u^l \\ &= 2\mathbf{Re}\check{\mathbf{Ric}} - \hat{\mathbb{G}}_{jk}^s u^j \hat{\mathbb{G}}_{ls}^k u^l - \hat{\mathbb{G}}_k^l \hat{\mathbb{G}}_l^k - \hat{\mathbb{G}}_k^s \hat{\mathbb{G}}_{jls}^k u^j u^l. \end{aligned} \quad (6.21)$$

利用引理 5.2 和 (5.13) 继续化简上式, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{Ric} + \mathbf{Ric}^J &= 2\mathbf{Re}\check{\mathbf{Ric}} - \hat{\mathbb{G}}_{jk}^s u^j \hat{\mathbb{G}}_{ls}^k u^l - \hat{\mathbb{G}}_k^l \hat{\mathbb{G}}_l^k - \hat{\mathbb{G}}_k^s \hat{\mathbb{G}}_{jls}^k u^j u^l \\ &= 2\mathbf{Re}\check{\mathbf{Ric}} - (2J_j^s \hat{\mathbb{G}}_k^j - J_k^j \hat{\mathbb{G}}_j^s)(2J_l^k \hat{\mathbb{G}}_s^l - J_s^l \hat{\mathbb{G}}_l^k) \\ &\quad - \hat{\mathbb{G}}_k^l \hat{\mathbb{G}}_l^k + \hat{\mathbb{G}}_k^s (4\hat{\mathbb{G}}_s^k + 4J_j^k \hat{\mathbb{G}}_l^j J_s^l) \\ &= 2\mathbf{Re}\check{\mathbf{Ric}} - 4J_j^s \hat{\mathbb{G}}_k^j J_l^k \hat{\mathbb{G}}_s^l - 2J_j^s \hat{\mathbb{G}}_k^j \hat{\mathbb{G}}_l^k J_s^l - 2J_k^j \hat{\mathbb{G}}_j^s \hat{\mathbb{G}}_s^l J_l^k + J_k^j \hat{\mathbb{G}}_j^s J_s^l \hat{\mathbb{G}}_l^k \\ &\quad - \hat{\mathbb{G}}_k^l \hat{\mathbb{G}}_l^k + 4\hat{\mathbb{G}}_s^k \hat{\mathbb{G}}_k^s + 4\hat{\mathbb{G}}_s^k J_j^k \hat{\mathbb{G}}_l^j J_s^l \\ &= 2\mathbf{Re}\check{\mathbf{Ric}} - \hat{\mathbb{G}}_k^s \hat{\mathbb{G}}_s^k - J_k^j \hat{\mathbb{G}}_j^s J_s^l \hat{\mathbb{G}}_l^k, \end{aligned} \quad (6.22)$$

即

$$\mathbf{Ric} + \mathbf{Ric}^J = 2\mathbf{Re}\check{\mathbf{Ric}} - \hat{\mathbb{G}}_k^s \hat{\mathbb{G}}_s^k - J_k^j \hat{\mathbb{G}}_j^s J_s^l \hat{\mathbb{G}}_l^k. \quad (6.23)$$

考虑 (6.23) 中最后两项. 为方便起见, 记

$$A_s^i = \hat{\mathbb{G}}_s^i + J_k^i \hat{\mathbb{G}}_l^k J_s^l. \quad (6.24)$$

注意到 $J_s^i J_j^s = -\delta_j^i$, 可得

$$\begin{aligned} J_p^i A_s^p &= J_p^i (\hat{\mathbb{G}}_s^p + J_k^p \hat{\mathbb{G}}_l^k J_s^l) \\ &= J_p^i \hat{\mathbb{G}}_s^p - \hat{\mathbb{G}}_l^i J_s^l \end{aligned} \quad (6.25)$$

和

$$\begin{aligned} A_p^i J_s^p &= (\hat{\mathbb{G}}_p^i + J_k^i \hat{\mathbb{G}}_l^k J_p^l) J_s^p \\ &= \hat{\mathbb{G}}_p^i J_s^p - J_k^i \hat{\mathbb{G}}_s^k. \end{aligned} \quad (6.26)$$

观察上面两式, 不难发现

$$J_p^i A_s^p = -A_p^i J_s^p. \quad (6.27)$$

注意到 (6.23) 的最后两项, 有

$$\hat{\mathbb{G}}_k^s \hat{\mathbb{G}}_s^k + J_k^j \hat{\mathbb{G}}_j^s J_s^l \hat{\mathbb{G}}_l^k = \hat{\mathbb{G}}_i^s A_s^i. \quad (6.28)$$

进而

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{G}}_i^s A_s^i &= (A_i^s - J_k^s \hat{\mathbb{G}}_l^k J_i^l) A_s^i \\ &= A_i^s A_s^i + \hat{\mathbb{G}}_l^k A_i^l J_s^i J_k^s \\ &= A_i^s A_s^i - \hat{\mathbb{G}}_l^k A_l^i. \end{aligned} \quad (6.29)$$

于是

$$\hat{\mathbb{G}}_k^s \hat{\mathbb{G}}_s^k + J_k^j \hat{\mathbb{G}}_j^s J_s^l \hat{\mathbb{G}}_l^k = \hat{\mathbb{G}}_i^s A_s^i = \frac{1}{2} A_i^s A_s^i. \quad (6.30)$$

记 $\check{J}_k^i := J_{k|l}^i y^l$. 利用定理 5.1, 可知 $\check{J}_k^i = A_s^i J_k^s$. 再结合 (6.27), 有

$$\check{J}_s^i \check{J}_i^s = A_p^i J_s^p A_h^s J_i^h = -A_p^i J_s^p J_h^s A_i^h = A_s^i A_i^s. \quad (6.31)$$

利用上面两式, 不难发现

$$\hat{\mathbb{G}}_k^s \hat{\mathbb{G}}_s^k + J_k^j \hat{\mathbb{G}}_j^s J_s^l \hat{\mathbb{G}}_l^k = \frac{1}{2} \check{J}_s^i \check{J}_i^s. \quad (6.32)$$

最后, 由 (6.23) 和 (6.32), 可得

$$\text{Re}\check{\mathbf{Ric}} = \frac{1}{2}(\mathbf{Ric} + \mathbf{Ric}^J) + \frac{1}{4} \check{J}_s^i \check{J}_i^s. \quad (6.33)$$

证毕. □

引理 6.2 设 G 为强凸的弱 Kähler-Finsler 度量, 则有

$$\text{Im}\check{\mathbf{Ric}} = \Xi(Jy). \quad (6.34)$$

证明 通过观察 (6.11), 可知

$$2\text{Im}\check{\mathbf{Ric}} = -\frac{\delta\hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k}y^hu^k + \frac{\delta\hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k}u^hy^k. \quad (6.35)$$

结合 (4.5) 和 (5.3), 不难发现

$$-\frac{\delta\hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k}y^hu^k + \frac{\delta\hat{\mathbb{G}}_{hi}^i}{\delta x^k}u^hy^k = R_{jkl}^ky^ju^l - R_{jkl}^ku^jy^l. \quad (6.36)$$

文献 [6] 证明了

$$R_{jkl}^k - R_{ljk}^k = \Xi_{l,j} - \Xi_{j,l}, \quad (6.37)$$

其中 $\Xi_{l,j} = \frac{\partial}{\partial y^j}\Xi_l$. 由齐次性, 对上式用 y^j 进行缩并可得

$$\begin{aligned} (R_{jkl}^k - R_{ljk}^k)y^j &= \Xi_{l,j}y^j - \Xi_{j,l}y^j \\ &= \Xi_l - (\Xi_jy^j)_l + \Xi_l \\ &= 2\Xi_l. \end{aligned} \quad (6.38)$$

综上可知

$$\text{Im}\check{\mathbf{Ric}} = \frac{1}{2}(R_{jkl}^k - R_{ljk}^k)y^ju^l = \Xi_ju^j. \quad (6.39)$$

证毕. $\square$

定理 6.1 设 G 为强凸的弱 Kähler-Finsler 度量, 则有

$$\check{\mathbf{Ric}} = \frac{1}{2}(\mathbf{Ric} + \mathbf{Ric}^J) + \frac{1}{4}\text{tr}(\dot{J} \circ \dot{J}) + \sqrt{-1}\Xi(Jy), \quad (6.40)$$

其中 $\dot{J} = \check{\nabla}_y J$.

由此定理可见, 从实数的角度而言, 复 Berwald 联络的 Ricci 曲率 $\check{\mathbf{Ric}}$ 既包含 Riemann 量又包含非 Riemann 量.

7 Berwald 度量

定义 7.1 ^[10] 设 $G = F^2$ 为复流形 M 上的强伪凸复 Finsler 度量. 若 Chern-Finsler 联络的联络系数 $\Gamma_{\beta;\mu}^\alpha$ 只依赖于底流形的坐标 z , 则称 G 是复 Berwald 度量; 若复 Berwald 联络的联络系数 $\mathbb{G}_{\beta\mu}^\alpha$ 只依赖于坐标 z , 则称 G 是弱复 Berwald 度量.

定义 7.2 ^[5] 设 G 为实 Finsler 度量, 若其实 Berwald 联络的联络系数 $\hat{\mathbb{G}}_{jk}^i$ 只依赖于底流形的坐标 x , 则称 G 为实 Berwald 度量.

注 7.1 文献 [12, 定理 1.1] 指出, 在弱 Kähler 条件下, 弱复 Berwald 度量与实 Berwald 度量等价; 定理 1.2 指出, 在 Kähler 条件下, 复 Berwald 度量与实 Berwald 度量等价. 于是, 若 G 是强凸的弱 Kähler、弱复 Berwald 度量, 则它必然是实 Berwald 度量, 因此将此类度量简称为强凸的弱 Kähler-Berwald 度量.

引理 7.1 设 G 是复流形 M 上强凸的弱 Kähler-Berwald 度量, 则其 Ricci 曲率张量 (4.8) 是 J -不变的, 即

$$\mathrm{Ric}_{ij} = J_i^s J_j^k \mathrm{Ric}_{sk}. \quad (7.1)$$

进而

$$\check{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric}. \quad (7.2)$$

证明 文献 [9] 表明, 若 $G = F^2$ 是实 Berwald 度量, 则存在一个 Riemann 度量 H , 使得 ${}^H\Gamma_{jk}^i(x) = {}^F\Gamma_{jk}^i(x)$, 其中 ${}^F\Gamma_{jk}^i$ 和 ${}^H\Gamma_{jk}^i$ 分别是 F 和 H 的 Chern 联络系数. 值得注意的是, ${}^F\Gamma_{jk}^i(x)$ 和 ${}^H\Gamma_{jk}^i(x)$ 都仅依赖于 x , 而且 ${}^F\Gamma_{jk}^i(x) = \hat{\mathbb{G}}_{jk}^i(x)$. 此时 Riemann 曲率张量 (4.5) 可以写为

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \hat{\mathbb{G}}_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \hat{\mathbb{G}}_{jk}^i}{\partial x^l} + \hat{\mathbb{G}}_{ks}^i \hat{\mathbb{G}}_{jl}^s - \hat{\mathbb{G}}_{jk}^s \hat{\mathbb{G}}_{ls}^i. \quad (7.3)$$

因此 F 和 H 的 Riemann 曲率张量相等, 即

$${}^F R_{jkl}^i = {}^H R_{jkl}^i. \quad (7.4)$$

进而它们的 Ricci 张量也相等, 即

$${}^F \mathrm{Ric}_{ij} = {}^H \mathrm{Ric}_{ij}. \quad (7.5)$$

因此, 为了证明 (7.1), 只需证明 H 是 Kähler 度量, 即证 ${}^H\nabla J = 0$. 由 ${}^H\Gamma_{jk}^i(x) = {}^F\Gamma_{jk}^i(x)$, 有 ${}^H\nabla J = \check{\nabla} J$. 由定理 5.1, 可知 $J_{j|k}^i y^k = 0$. 又因为 $J_{j|k}^i$ 只依赖于 x , 所以 $J_{j|k}^i = 0$. 因此

$${}^H \mathrm{Ric}_{ij} = {}^H \mathrm{Ric}_{sk} J_i^s J_j^k, \quad (7.6)$$

从而 (7.1) 成立. 特别地, 有

$$\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}^J. \quad (7.7)$$

由于 F 是实 Berwald 度量, 所以 $\Xi = 0$ 且 $\dot{J} = 0$, 于是 $\check{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric}$. $\square$

例 7.1 设 α 为复流形 M 上的 Hermite 度量, β 为复流形 M 上的 $(1,0)$ -形式. 记

$$\alpha := \sqrt{a_{\mu\bar{\nu}}(z)} v^\mu v^{\bar{\nu}}, \quad \beta := b_\mu(z) v^\mu \quad (7.8)$$

和

$$r := \alpha^2 = a_{\mu\bar{\nu}}(z) v^\mu v^{\bar{\nu}}, \quad t := b^2 = a^{\bar{\nu}\mu} b_{\bar{\nu}} b_\mu, \quad s := \frac{|\beta|^2}{r}. \quad (7.9)$$

进而可定义复 Finsler 度量

$$F(z, v) = \sqrt{r\phi(t, s)}, \quad (7.10)$$

其中 $\phi(t, s)$ 是满足一定条件的光滑函数 (参见文献 [11]). 若 α 是 Kähler 度量, β 是全纯的且在 α 的 Chern-Finsler 联络下是平行的, 则 F 是 Kähler-Berwald 度量 (参见文献 [11, 定理 1.5 和 1.6]). 此时, 由引理 7.1 有

$$\check{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric}. \quad (7.11)$$

若强凸的复 Finsler 度量 G 满足

$$\mathbf{Ric} = \sigma(z)G, \quad (7.12)$$

其中 $\sigma(z)$ 为底流形上的实函数, 则称其为实 Einstein 度量. 类似地, 若

$$\check{\mathbf{Ric}} = \sigma(z)G, \quad (7.13)$$

则称其为复 Einstein 度量.

定理 7.1 设 G 为复流形 M 上强凸的弱 Kähler-Berwald 度量. 度量 G 是实 Einstein 度量当且仅当 G 是复 Einstein 度量. 换言之, 对于流形 M 上的实值函数 $\sigma(z)$, $\mathbf{Ric} = \sigma(z)G$ 当且仅当 $\check{\mathbf{Ric}} = \sigma(z)G$.

注 7.2 定理 7.1 可以认为是文献 [10, 定理 1.3] 的改进.

8 数量旗曲率

本节主要研究具有数量旗曲率的复 Finsler 度量的 Ricci 曲率. 实 Finsler 度量具有数量旗曲率是指其旗曲率 $\mathbf{K}(y, V)$ 只依赖于旗杆 y 而不依赖于旗面 $\text{span}\{y, V\}$. 若强凸复 Finsler 度量相应的实 Finsler 度量具有数量旗曲率, 则称该强凸复 Finsler 度量具有数量旗曲率.

命题 8.1 设 G 为复流形 M 上强凸的弱 Kähler-Finsler 度量. 若 G 具有数量旗曲率, 则

$$\Xi(Jy) = 0 \quad (8.1)$$

且

$$\mathbf{Ric} = \mathbf{Ric}^J. \quad (8.2)$$

证明 设流形的实维数为 n . 由已知, 可设旗曲率 $\mathbf{K} = \mathbf{K}(y)$. 由文献 [8, 推论 2.4] 可知

$$\Xi_i = -\frac{n+1}{3}G\mathbf{K}_i, \quad (8.3)$$

其中 $\mathbf{K}_i = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial y^i}$. 由文献 [7] 知

$$\mathbf{K}(y) = \mathbf{K}(y, Jy) = \mathbf{H}(v). \quad (8.4)$$

注意到全纯曲率 $\mathbf{H}(v) = \mathbf{K}(y) + \sqrt{-1} \cdot 0$ 是 $(0,0)$ 齐次的. 利用引理 2.1, 有

$$\mathbf{K}_i u^i = 0. \quad (8.5)$$

于是,

$$\Xi(Jy) = \Xi_i u^i = -\frac{n+1}{3}G\mathbf{K}_i u^i = 0. \quad (8.6)$$

因为 G 具有数量旗曲率, 所以

$$\mathbf{Ric} = (n-1)\mathbf{K}G = (n-1)\mathbf{H}G. \quad (8.7)$$

因此, 若将 $\mathbf{Ric}$ 视为 v 的函数, 则它是 $(1, 1)$ 齐次的. 由引理 2.1, 有

$$\mathbf{Ric}_i u^i = 0, \quad (8.8)$$

其中 $\mathbf{Ric}_i = \frac{\partial \mathbf{Ric}}{\partial y^i}$. 上式对 y^j 求导, 得

$$\mathbf{Ric}_{ij} u^i + \mathbf{Ric}_i J_j^i = 0. \quad (8.9)$$

再用 u^j 进行缩并, 可得

$$\frac{1}{2} \mathbf{Ric}_{ij} u^i u^j = \mathbf{Ric}, \quad (8.10)$$

其中 $\mathbf{Ric}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{Ric}}{\partial y^i \partial y^j}$. 利用文献 [6, (1.2)], 有

$$\mathbf{Ric}_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{Ric}_{ij} = \frac{1}{2} (\Xi_{j,i} + \Xi_{i,j}). \quad (8.11)$$

用 u^i 和 u^j 缩并, 可得

$$\mathbf{Ric}^J - \Xi_{i,j} u^i u^j = \mathbf{Ric}. \quad (8.12)$$

注意到

$$\Xi_{i,j} u^i u^j = (\Xi_i u^i)_j u^j - \Xi_i J_j^i u^j = 0 + \Xi_i y^i = 0, \quad (8.13)$$

最终可得

$$\mathbf{Ric} = \mathbf{Ric}^J. \quad (8.14)$$

证毕. $\square$

推论 8.1 设 G 为复流形 M 上强凸的弱 Kähler-Finsler 度量, 若它具有数量旗曲率, 则

$$\check{\mathbf{Ric}} = \mathbf{Ric} + \frac{1}{4} \text{tr}(J \circ J), \quad (8.15)$$

其中 $\check{J} = \check{\nabla}_y \mathcal{H} J$.

致谢 感谢审稿人的仔细评阅以及对本文的建议, 感谢厦门大学钟春平教授在本文撰写过程中的有益交流, 感谢沈一兵先生一直以来的鼓励和帮助.

参考文献

- 1 Abate M, Patrizio G. Finsler Metrics—A Global Approach with Applications to Geometric Function Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1591. Berlin: Springer-Verlag, 1994
- 2 Aikou T. The Chern-Finsler connection and Finsler-Kähler manifolds. Adv Stud Pure Math, 2007, 48: 343–373
- 3 Bao D, Chern S, Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. Graduate Texts in Mathematics, vol. 200. New York: Springer-Verlag, 2000
- 4 Chen B, Shen Y. Kähler Finsler metrics are actually strongly Kähler. Chin Ann Math Ser B, 2009, 30: 173–178
- 5 Chern S, Shen Z. Riemann-Finsler Geometry. Nankai Tracts in Mathematics, vol. 6. Singapore: World Scientific Publishing, 2005
- 6 Li B, Shen Z. Ricci curvature tensor and non-Riemannian quantities. Canad Math Bull, 2015, 58: 530–537
- 7 Li H, Qiu C, Zhong G. Curvatures of strongly convex Kähler-Finsler manifolds. Differential Geom Appl, 2023, 86: 101957

- 8 Shen Z. On some non-Riemannian quantities in Finsler geometry. *Canad Math Bull*, 2013, 56: 184–193
- 9 Szabó Z. Positive definite Berwald spaces. *Structure theorems on Berwald spaces*. *Tensor (NS)*, 1981, 35: 25–39
- 10 Xia H, Zhong C. On strongly convex weakly Kähler-Finsler metrics of constant flag curvature. *J Math Anal Appl*, 2016, 443: 891–912
- 11 Xia H, Zhong C. On a class of smooth complex Finsler metrics. *Results Math*, 2017, 71: 657–686
- 12 Zhong C. On real and complex Berwald connections associated to strongly convex weakly Kähler-Finsler metric. *Differential Geom Appl*, 2011, 29: 388–408

Ricci curvature of strongly convex Kähler-Finsler metrics

Bin Chen, Siwei Liu & Lili Zhao

Abstract In this paper, we study the geometric properties of strongly convex Kähler-Finsler spaces. By discussing the relationship between the real and complex spray coefficients, we obtain the weak parallelism of the complex structure, and find that the imaginary part of the complex Ricci curvature is exactly the Ξ -curvature. In addition, we show that the real Einstein and the complex Einstein are consistent for Kähler-Berwald metrics.

Keywords Kähler-Finsler, complex structure, Ricci curvature, Ξ -curvature

MSC(2020) 53C60, 53B40

doi: 10.1360/SSM-2022-0208