中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 11 期: 1877～1894
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

# 次分数 Black-Scholes 模型的套利机会

献给严加安院士 80 华诞

肖炜麟[1], 周清[2*], 吴卫星[3]

1. 浙江大学管理学院, 杭州 310058;
2. 北京邮电大学理学院, 北京 100876;
3. 对外经济贸易大学金融学院, 北京 100029
E-mail: wlxiao@zju.edu.cn, zqleii@bupt.edu.cn, wxwu@uibe.edu.cn

收稿日期: 2020-05-21; 接受日期: 2020-12-21; 网络出版日期: 2021-11-08; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 71871202, 11871010, 11971040 和 71733004) 资助项目

**摘要** 为了刻画金融时间序列的长记忆性和非平稳性, 众多学者采用次分数 Brown 运动来描述金融资产价格变化的行为模式. 然而, 次分数 Brown 运动不是半鞅, 能否直接将其应用于金融市场一直是金融数学领域的热点问题. 基于 Hurst 指数 $H > 1/2$ 情形下次分数 Brown 运动 Donsker 逼近定理, 本文研究几何次分数 Brown 运动框架下金融市场的套利问题. 首先, 采用 Skorokhod 拓扑下的随机游走理论, 构建一个弱收敛于次分数 Brown 运动驱动的 Black-Scholes 市场模型. 其次, 利用积分不等式和次分数二元市场理论证明次分数 Brown 运动驱动的 Black-Scholes 金融模型存在套利机会. 最后, 采用 Monte Carlo 模拟说明套利发生的可能性, 并展示套利发生过程.

**关键词** 次分数 Brown 运动 弱收敛 随机游走 套利机会

**MSC (2020) 主题分类** 60G15, 60J55, 60H05, 91B70

## 1 引言

金融市场的套利研究是现代金融数学领域的基石, 也是期权定价和金融风险管理的理论基础. 自从著名的 Black-Scholes 期权定价模型 (参见文献 [1]) 问世以来, 众多学者在此基础上, 不断地对该模型进行修正研究. 为了刻画金融资产的随机跳跃特性, 文献 [2–4] 采用跳跃扩散模型描述金融资产价格变化的行为模式, 很好地刻画了金融资产的随机跳跃特性, 并在跳跃扩散框架下研究了期权定价问题. 特别值得一提的是, 严加安为了克服流行的套利定价理论依赖于计价单位选取的不合理性, 提出了一种基于客观概率和不依赖于计价单位的框架, 并与合作者澄清了套利定价理论中的若干基本概念和结果 (参见文献 [5,6]). 文献 [7,8] 基于金融市场的实证研究发现, 金融资产的收益率之间具有长期相依性和自相似性. 为了刻画金融资产价格之间的长期相关性和自相似性, 文献 [9] 将分数 Brown 运

**英文引用格式:** Xiao W L, Zhou Q, Wu W X. Arbitrage opportunities in sub-fractional Black-Scholes model (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1877–1894, doi: 10.1360/SSM-2020-0156

© 2021《中国科学》杂志社 

动引入金融市场, 提出了分形市场假说, 并对分数 Brown 运动的性质进行了深入研究. 一方面, 由于分数 Brown 运动满足加法不变性、自相似性和长期相依性等, 这些性质使得分数 Brown 运动成为刻画金融资产价格变化行为模式的良好工具, 并能解释有效市场理论无法解释的金融市场异象. 因此, 在对金融资产定价和金融风险管理时, 运用几何分数 Brown 运动比有效市场假说更能准确地刻画市场的真实特性. 从而, 文献 [10] 基于 Wick 乘积, 建立了一个关于分数 Brown 运动的随机积分, 称为分数 Itô 积分, 并指出分数 Brown 运动可以用来描述金融资产的随机波动性. 基于分数 Itô 积分理论, 文献 [11–13] 进一步研究了几何分数 Brown 运动驱动的投资组合选择问题和期权定价问题. 另一方面, 由于分数 Brown 运动不是半鞅, 在 Wick 乘积的随机积分下, 分数 Black-Scholes 市场存在金融套利机会 (参见文献 [14–17]) 或自融资策略不符合经济学理论 (参见文献 [18]). 采用分数 Brown 运动刻画金融资产价格变化过程在一定程度上弥补了几何 Brown 运动的缺陷, 然而, 基于金融市场的众多实证研究发现, 金融市场中股票的收益率的变化呈现非平稳特性, 参见文献 [19–22]. 因此, 寻找一种合适的模型来刻画标的资产价格变化的行为模式, 具有十分重要的理论意义和现实意义.

由于分数 Brown 运动的增量是平稳的, 因此不能较好地刻画金融时间序列的非平稳性, 从而众多学者采用具有增量非平稳的随机过程刻画金融资产价格变化的行为模式, 次分数 Brown 运动便应运而生 (参见文献 [23]). 与分数 Brown 运动相比, 次分数 Brown 运动是一类更为广泛的 Gauss 过程, 它不仅保持了分数 Brown 运动的自相似性和长记忆性等重要性质, 还具有更快的退化速度和非平稳的二阶矩增量. 此外, 文献 [24] 指出次分数 Brown 运动可以用来刻画金融资产的随机波动性. 因此, 相比于分数 Brown 运动, 次分数 Brown 运动能够更好地刻画金融资产价格的变动过程. 文献 [25–30] 研究了次分数 Brown 运动的许多性质及其应用. 文献 [31,32] 进一步利用文献 [33,34] 定义的关于次分数 Brown 运动的随机积分, 研究了金融衍生品的定价问题. 近年来, 文献 [35] 研究了混合分数 Brown 运动下常方差弹性系数模型的期权定价问题. 文献 [36] 采用偏微分方程方法, 进一步研究了混合次分数 Brown 运动下常方差弹性系数模型的欧式期权定价问题.

在过去十几年里, 次分数 Brown 运动的性质及其在金融领域的应用已经取得长足的发展, 但正如文献 [25] 所述, 次分数 Brown 运动不是半鞅, 因此直接将其应用于金融市场需要检验模型中是否存在套利机会. 本文基于次分数 Brown 运动 Donsker 逼近定理, 研究几何次分数 Brown 运动驱动的 Black-Scholes 市场是否存在金融套利机会. 进一步, 利用二叉树模型, 基于次分数 Black-Scholes 市场框架, 研究如何产生金融套利机会. 借鉴文献 [15] 研究分数 Brown 运动金融市场套利的方法, 利用文献 [27,28] 提出的次分数 Brown 运动 Donsker 逼近定理, 本文构造一个收敛于次分数 Black-Scholes 市场的随机模型, 并证明该市场模型中存在金融套利机会. 本文的另一个贡献在于, 利用二叉树模型, 展示次分数 Black-Scholes 金融市场套利的产生过程.

本文余下内容的结构安排如下: 第 2 节给出次分数 Brown 运动的定义, 并介绍次分数 Brown 运动的重要性质, 进一步给出次分数 Brown 运动 Donsker 逼近定理. 第 3 节引入次分数二元金融市场, 讨论该市场的套利机会, 并基于二叉树模型, 展示次分数 Black-Scholes 市场套利的产生过程. 第 4 节采用 Monte Carlo 模拟方法给出数值例子. 第 5 节给出全文总结.

## 2 基于随机游走的次分数 Brown 运动逼近

金融系统是一个大自由度多维度的复杂系统, 呈现非线性和非平稳特性. 同时, 由于不同投资期限的投资者却承担着相同的风险水平, 从而不同期限尺度上的收益率具有类似的频率分布, 即时间尺

度上的不变性或自相似. 所以, 金融市场存在长记忆性, 即历史的信息不仅影响当前资产价格, 而且影响未来的资产价格. 本文采用次分数 Brown 运动刻画金融资产价格变化的波动过程, 以期客观地反映金融市场的长记忆性和非平稳性. 本节首先介绍次分数 Brown 运动的定义及其重要性质, 然后介绍次分数 Brown 运动 Donsker 型逼近定理.

分数 Brown 运动作为 Brown 运动的推广, 自从 20 世纪 60 年代以来受到了越来越多的关注, 众多著名学者在文献 [9] 研究的基础上, 对分数 Brown 运动进行了充分研究, 取得了很多有意义的成果, 这些研究成果已在金融、经济、通信、生物、医学和物理等领域广泛地应用. 近年来, 在对分数 Brown 运动充分研究的基础上, 许多学者建议采用一些更一般的自相似随机过程来刻画金融资产价格变化的行为模式. 文献 [23] 提出了一类更加一般的自相似 Gauss 随机过程, 该过程来自于具有 Poisson 初始条件的分支粒子系统的占位时流, 称之为次分数 Brown 运动.

**定义 2.1** Hurst 指数 $H \in (0,1)$ 的次分数 Brown 运动 $X^H = \{X_t^H, t \geqslant 0\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的连续 Gauss 过程, 其期望满足 $\mathrm{E}[X^H] = 0$ 且其协方差函数为

$$\mathrm{E}(X_t^H X_s^H) = t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}[(t+s)^{2H} - |t-s|^{2H}], \quad \forall\, s,t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

显然, 当 $H = 1/2$ 时, 次分数 Brown 运动退化为标准 Brown 运动. 次分数 Brown 运动具有与分数 Brown 运动相似的性质 (如自相似性、Hölder 连续性和长程相依性等), 而且对于任意 $s < t$, 满足下列不等式:

$$[(2-2^{2H-1}) \wedge 1](t-s)^{2H} \leqslant \mathrm{E}[(X_t^H - X_s^H)^2] \leqslant [(2-2^{2H-1}) \vee 1](t-s)^{2H}. \tag{2.2}$$

由 (2.1) 和 (2.2) 易知次分数 Brown 运动不具有平稳增量性. 由文献 [25] 知次分数 Brown 运动不是半鞅, 因此也不能利用经典的 Itô 随机分析进行研究. 令 $W_t$ 表示标准 Brown 运动, 则根据文献 [37] 可知次分数 Brown 运动具有如下 Volterra 积分表达形式:

$$X_t^H = c_H \int_0^t (n_H(t,s)) dW_s,$$

其中 $\mathbf{1}_{(0,t)}(s)$ 为示性函数且

$$n_H(t,s) = \frac{\sqrt{\Gamma(1+2H)}\sqrt{\sin(\pi H)}}{2^H \Gamma(H+\frac{1}{2})} s^{3/2-H} \left( \frac{(t^2-s^2)^{H-\frac{1}{2}}}{t} + \int_s^t \frac{(u^2-s^2)^{H-\frac{1}{2}}}{u^2} du \right) 1_{(0,t)}(s). \tag{2.3}$$

特别地, 当 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, $X^H$ 具有下面关于标准 Brown 运动的积分表达式:

$$X_t^H = c_H \int_0^t (n_H(t,s)) dW_s, \tag{2.4}$$

其中 $c_H^2 = \frac{2^{2-2H}\Gamma(1+2H)\sin(\pi H)}{\Gamma^2(H-\frac{1}{2})}$, 并且

$$n_H(t,s) = s^{\frac{3}{2}-H} \int_s^t (x^2-s^2)^{H-\frac{3}{2}} dx \mathbf{1}_{(0,t)}(s). \tag{2.5}$$

由 (2.5) 可知, 对于 $t > s$, 有

$$\frac{\partial n_H(t,s)}{\partial t} = s^{\frac{3}{2}-H}(t^2-s^2)^{H-\frac{3}{2}}.$$

现在考虑一系列独立同分布的随机变量 $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 且满足 $\mathrm{E}\xi_i=0$ 和 $\mathrm{E}\xi_i^2=1$. 令 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 $x$ 的最大整数, $W_t^N=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{\lfloor Nt\rfloor}\xi_i$, 则 Donsker 定理告诉我们 $W_t^N$ 在 Skorohod 拓扑空间上弱收敛于标准 Brown 运动. 事实上, 当 $H\in(\frac{1}{2},1)$ 时, 分数 Brown 运动也具有类似于 (2.4) 的关于 Brown 运动的积分表达式. 令

$$K^N(t,s):=N\int_{s-\frac{1}{N}}^{s}\left(K\left(\frac{\lfloor Nt\rfloor}{N},u\right)\right)du,\quad N\geqslant 1,$$

其中 $K(\cdot,\cdot)$ 是核函数, 即

$$K(t,s)=\sqrt{\frac{2H\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(2-2H)}}\left(H-\frac{1}{2}\right)s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t(u-s)^{H-\frac{3}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}du.$$

进一步, 在假设 $H>\frac{1}{2}$ 情形下, 令

$$B_t^N=\int_0^t K^N(t,s)dW_s^N=\sum_{i=1}^{\lfloor Nt\rfloor}N\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}}\left(K\left(\frac{\lfloor Nt\rfloor}{N},s\right)\right)ds\frac{\xi_i}{\sqrt{N}},\quad N\geqslant 1.$$

根据 Donsker 定理, 文献 [15] 证明了 $B^N$ 弱收敛于分数 Brown 运动. 受文献 [15] 的启发, 在 $H>\frac{1}{2}$ 假设下, 文献 [27,28] 定义了如下过程:

$$X_t^{H,N}=\sum_{i=1}^{\lfloor Nt\rfloor}\sqrt{N}\left(\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}}c_Hn_H\left(\frac{\lfloor Nt\rfloor}{N},s\right)ds\right)\xi_i,\tag{2.6}$$

其中 $n_H(t,s)$ 由 (2.5) 给出. 进一步, 文献 [27,28] 不仅证明了 $X_t^{H,N}$ 的有限维分布收敛于次分数 Brown 运动 $X_t^H$, 而且还证明了 $X_t^{H,N}$ 是紧的. 从而利用 Donsker 定理, 文献 [27,28] 从不同角度证明了 $X_t^{H,N}$ 在 Skorohod 拓扑空间上弱收敛于次分数 Brown 运动 $X_t^H$.

**引理 2.1** 当 $H\in(\frac{1}{2},1)$ 时, 随机游走 $X_t^{H,N}$ 在 Skorohod 拓扑空间上弱收敛于次分数 Brown 运动 $X_t^H$.

**注 2.1** 需要指出的是, 尽管 $X_t^{H,N}$ 是 $X_t^H$ 的一种近似逼近, 但是 $X_t^{H,N}$ 却保持了 $X_t^H$ 的重要性质, 如长记忆性、自相似性和非平稳性等. 因此, $X_t^{H,N}$ 可以看作是 $X_t^H$ 的一种较好的逼近.

## 3 次分数 Black-Scholes 市场的套利机会

一方面, 无套利假设是金融学的基本假设, 只有金融市场是无套利市场, 才能在此基础上进行资产定价、投资组合和风险管理研究. 另一方面, 即使金融市场存在套利机会, 投资者也会迅速实施套利策略而使得金融市场又立即回到无套利机会的均衡当中. 因此, 无套利假设是资产定价和投资组合基本定理成立的前提. 从而, 任何一个随机模型在将其应用于金融市场之前, 需要研究该模型驱动的金融市场是否存在套利机会. 由于分数 Brown 运动不是半鞅, 因此, 文献 [14–17] 从不同角度研究了分数 Brown 运动驱动的 Black-Scholes 市场的套利问题. 尽管近年来, 一些学者采用次分数 Brown 运动代替分数 Brown 运动, 构建次分数 Brown 运动驱动的 Black-Scholes 金融市场, 但是鲜有学者研究该市场是否存在套利机会.

### 3.1 次分数 Black-Scholes 模型

首先引入次分数 Brown 环境下的 Black-Scholes 市场. 假设次分数 Black-Scholes 市场由无风险资产 (债券) 和风险资产 (股票) 组成, 在时间段 $[0,T]$ 上交易, 其中 0 表示当前时刻, $T$ 表示终止时刻,

进一步假设时刻 $T$ 是固定的常数. 令 $B$ 表示无风险资产或债券, 资产 $B$ 的价格动态变化过程表示为

$$B_t = \int_0^t r_s B_s ds, \tag{3.1}$$

其中 $r_t$ 表示确定的利率. 采用 $S_t$ 表示风险资产或股票的价格动态变化过程:

$$S_t = S_0 + \int_0^t a_s S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dX_s^H, \tag{3.2}$$

其中 $X^H$ 表示 $H > \frac{1}{2}$ 的次分数 Brown 运动, $\sigma > 0$ 表示风险资产的波动率, $a_t$ 表示风险资产的确定性偏移项. 由于次分数 Brown 运动是阶数为 $\delta < H$ 的 Hölder 连续的, 因此可以采用顺向 (pathwise) 积分来定义方程 (3.2) 的随机积分, 具体定义可参见文献 [33,34].

假设 $r_t$ 和 $a_t$ 在区间 $[0,T]$ 连续可微且为确定性有界函数, 则利用文献 [33,34], 我们得到方程 (3.1) 和 (3.2) 的解可以分别表示为

$$B_t = B_0 \mathrm{e}^{\int_0^t r_s ds}, \quad t \in [0,T] \tag{3.3}$$

和

$$S_t = S_0 \mathrm{e}^{\int_0^t a_s ds + \sigma X_t^H}, \quad t \in [0,T]. \tag{3.4}$$

### 3.2 次分数二元市场模型

首先介绍一般的二元市场模型. 借鉴文献 [38] 的框架, 考虑一个证券市场, 其中有两种证券在时刻 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ 逐次交易, 且债券和股票的价格动态变化过程分别为

$$B_n = (1 + r_n) B_{n-1} \tag{3.5}$$

和

$$S_n = (a_n + (1 + Z_n)) S_{n-1}, \tag{3.6}$$

其中 $n \geqslant 1$, $B_n$ 和 $S_n$ 分别表示 $[t_n, t_{n+1}]$ 内债券和股票的价格, $r_n$ 和 $a_n$ 分别表示相应时间间隔内利率和股票的漂移项.

现在考虑一个适应的二元随机过程 $Z = (Z_n)_{n=1}^N$. 在时刻 $n$, 二元随机过程 $Z_n$ 有两个可能的取值: $d_n$ (向下) 或者 $u_n$ (向上) 且满足 $d_n < u_n$. 显然, 当 (3.6) 中的 $a_n$ 是确定的, $u_n$ 和 $d_n$ 的值可能依赖于从初始时刻一直到 $n-1$ 时刻 $Z$ 的路径. 所以, 风险资产股票的价格 $S_n$ 在时刻 $n$ 处于 $2^n$ 种状态中的一种状态, 且所有的状态不必不同. 然而股票价格有 $2^n$ 种不同的可能路径变化到时刻 $n$. 事实上, $u_n$ 和 $d_n$ 常视为 $\{-1,1\}^{n-1}$ 上的实函数 (此时, $u_1$ 和 $d_1$ 均为常数). 根据文献 [38, 命题 3.6.2] 可知, 一个二元市场不存在套利机会当且仅当对所有的 $n \in \{1,\ldots,N\}$, 都有下面关系式成立:

$$d_n < r_n - a_n < u_n. \tag{3.7}$$

事实上, (3.7) 与等价鞅测度的存在性紧密相连. 令 $\mathbb{P}$ 表示 (3.6) 中 $Z_n$ 的概率测度, 现在需要找到一个概率测度 $\mathbb{Q}$, 使之与 $\mathbb{P}$ 等价, 即使得 $\frac{S}{B}$ 是 $\mathbb{Q}$- 鞅. 显然, 这样的测度 $\mathbb{Q}$ 必须满足条件

$$u_n \mathbb{Q}(Z_n = u_n \mid Z_1,\ldots,Z_{n-1}) + d_n \mathbb{Q}(Z_n = d_n \mid Z_1,\ldots,Z_{n-1}) = r_n - a_n,$$

即满足

$$\mathbb{Q}(Z_n = u_n \mid Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = \frac{r_n - a_n - d_n}{u_n - d_n} \in (0,1). \tag{3.8}$$

注意到, 条件 (3.8) 和 (3.7) 显然等价. 更进一步地, 条件 (3.8) 定义了一个唯一的等价鞅测度, 也就是二元市场模型是完备的, 可参见文献 [38, 第 3 章]. 定义了一般的二元市场模型, 现在考虑次分数 Brown 运动驱动的二元市场. 采用如下方式定义 (3.6) 中的 $Z$:

$$Z_n = \Delta X^{H,N}_{\frac{n}{N}}, \quad n = 0, \ldots, [NT], \tag{3.9}$$

其中 $X^{H,N}_{\frac{n}{N}}$ 由 (2.6) 给出. 定义

$$r_n = \frac{1}{N} r_{\frac{n}{N}}, \quad a_n = \frac{1}{N} a_{\frac{n}{N}}, \tag{3.10}$$

其中 $a$ 和 $r$ 分别是 (3.1) 和 (3.2) 中出现的函数. 通过合理地选择 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $X^{H,N}_{\frac{1}{N}}$, 可以得到二元市场模型, 而且发现该模型近似逼近次分数 Black-Scholes 模型.

**定理 3.1** 当 $N \to \infty$ 时, 由 (3.5) 给出的 $B_n$ 和由 (3.6) 给出的 $S_n$ 构成的二元金融市场弱收敛于由 (3.1) 和 (3.2) 组合的二元次分数 Black-Scholes 市场.

**证明** 考虑跳跃过程 $\Delta X^{H,N}_t = X^{H,N}_t - X^{H,N}_{t-}$ 和二次变差变量 $[X^{H,N}]_t = \sum_{s\leqslant t}(\Delta X^{H,N}_s)^2$. 首先证明 $[X^{H,N}]$ 在 $L^1([0,T]\times\Omega)$ 下趋近于 0. 由于跳跃点发生在时刻 $\frac{k}{N}$, 利用 (2.2), 有

$$\mathrm{E}|\Delta X^{H,N}_t|^2 \leqslant \mathrm{E}|X^{H,N}_t - X^{H,N}_{t-\frac{1}{N}}|^2 \leqslant \frac{C}{N^{2H}}.$$

从而得到

$$\mathrm{E}[X^{H,N}]_t \leqslant Nt\frac{1}{N^{2H}} = tN^{1-2H}. \tag{3.11}$$

根据 (3.11) 可知, 当 $N \to \infty$、$H > \frac{1}{2}$ 且 $T$ 有界时, 易得

$$\int_0^T [X^{H,N}]_s ds \leqslant C(T)N^{1-2H} \to 0,$$

其中 $C(T)$ 表示依赖于 $T$ 的一个常数.

令 $\Delta X^{H,N}_s = X^{H,N}_s - X^{H,N}_{s-}$, 则根据 (3.6), 下面只需证明

$$S^N_t := S^N_0 \prod_{s\leqslant t}(1 + \Delta X^{N,H}_s) \tag{3.12}$$

弱收敛于几何次分数 Brown 运动 $S^N_0 \mathrm{e}^{X^H}$ 即可, 其中 $X^H$ 表示次分数 Brown 运动. 根据跳跃情形, 我们把过程 $X^{H,N}$ 分解成

$$X^{1,H,N}_t = \sum_{s\leqslant t} \Delta X^{H,N} \mathbf{1}_{\{\Delta X^{H,N}_s < \frac{1}{2}\}} \quad 和 \quad X^{2,H,N}_t = \sum_{s\leqslant t} \Delta X^{H,N} \mathbf{1}_{\{\Delta X^{H,N}_s \geqslant \frac{1}{2}\}}$$

两个部分. 在这样的分解下, 可以把 $S^N$ 写成

$$S^N = S^{1,N} S^{2,N},$$

其中 $S^{i,N}_t = \prod_{s\leqslant t}(1 + \Delta X^{i,N}_s)$ $(i = 1, 2)$. 从而类似于文献 [15, 定理 3] 的证明, 我们易得 $S^{1,N}$ 弱收敛于 $\mathrm{e}^{X^H}$, 并且 $S^{2,N}$ 依概率收敛于 1, 证毕. □

下面证明二元次分数 Black-Scholes 金融市场存在套利机会. 令

$$k(n,i)=\sqrt{N}\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}}\left(n_H\left(\frac{n}{N},s\right)\right)ds, \tag{3.13}$$

其中 $n_H$ 是由 (2.5) 给出的核函数.

利用 (3.9) 和 (3.13), 对于任意 $n\geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}Z_n&=\sigma\sqrt{N}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}}\left(n_H\left(\frac{n}{N},s\right)-n_H\left(\frac{n-1}{N},s\right)\right)ds\right)\xi_i\\&=\sigma\sum_{i=1}^{n}(k(n,i)-k(n-1,i))\xi_i,\end{aligned}$$

其中 $(\xi_i;i\geqslant 1)$ 假设为二元变量, 且对任意的 $i\geqslant 1$, 满足

$$\mathrm{P}(\xi_i=1)=\mathrm{P}(\xi_i=-1)=\frac{1}{2}.$$

从而, 对于任意 $n\geqslant 1$, 可以把 $Z_n$ 写成

$$Z_n=f_{n-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})+g_n(\xi_n),$$

其中

$$f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})=\sigma\sum_{i=1}^{n-1}(k(n,i)-k(n-1,i))x_i$$

且

$$g_n(x)=\sigma k(n,n)x.$$

显然, 该模型是二元模型且满足 $u_n=f_{n-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})+g_n(1)$ 和 $d_n=f_{n-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})+g_n(-1)$. 下面给出本文的重要结论.

**定理 3.2** 当 $N\to\infty$ 时, 由 (3.5) 给出的 $B_n$ 和由 (3.6) 给出的 $S_n$ 构成的二元市场存在套利机会.

**证明** 为了方便起见, 在定理证明中, 我们采用 $C(H)$ 表示仅依赖于 $H$ 的常数. 根据二元市场无套利理论, 我们只需证明在某些 $n\geqslant 2$ 下, 条件 (3.7) 不成立即可. 根据对称性, 借鉴文献 [15], 我们只需证明

$$f_{n-1}(1,1,\ldots,1)-g_n(1)\geqslant 0. \tag{3.14}$$

首先, 通过简单计算易知,

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}}\left(n_H\left(\frac{n}{N},s\right)-n_H\left(\frac{n-1}{N},s\right)\right)ds\\&\quad=C(H)\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}}s^{\frac{3}{2}-H}\left[\int_s^{\frac{n}{N}}(x^2-s^2)^{H-\frac{3}{2}}dx-\int_s^{\frac{n-1}{N}}(x^2-s^2)^{H-\frac{3}{2}}dx\right]ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C(H)\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} s^{\frac{3}{2}-H}\int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}}(x^2-s^2)^{H-\frac{3}{2}}dxds\\
&\geqslant C(H)\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} s^{\frac{3}{2}-H}\left(\left(\frac{n}{N}\right)^2-s^2\right)^{H-\frac{3}{2}}ds\\
&= C(H)\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} s^{\frac{3}{2}-H}\left(\frac{n}{N}+s\right)^{H-\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{N}-s\right)^{H-\frac{3}{2}}ds\\
&\geqslant C(H)\left(\frac{n}{N}-\frac{i-1}{N}\right)^{H-\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{N}+\frac{i}{N}\right)^{H-\frac{3}{2}}\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} s^{\frac{3}{2}-H}ds\\
&= C(H)\left(\frac{n}{N}-\frac{i-1}{N}\right)^{H-\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{N}+\frac{i}{N}\right)^{H-\frac{3}{2}}\frac{1}{\frac{5}{2}-H}\left[\left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{5}{2}-H}-\left(\frac{i-1}{N}\right)^{\frac{5}{2}-H}\right]\\
&= C(H)\left(\frac{1}{N}\right)^{H-\frac{1}{2}}(n-i+1)^{H-\frac{3}{2}}(n+i)^{H-\frac{3}{2}}(i^{\frac{5}{2}-H}-(i-1)^{\frac{5}{2}-H}).
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

利用 (3.15), 有

$$
\begin{aligned}
f_{n-1}(1,1,\ldots,1) &= \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}}\left(n_H\left(\frac{n}{N},s\right)-n_H\left(\frac{n-1}{N},s\right)\right)ds\\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n-1}C(H)N^{\frac{1}{2}-H}(n-i+1)^{H-\frac{3}{2}}(n+i)^{H-\frac{3}{2}}(i^{\frac{5}{2}-H}-(i-1)^{\frac{5}{2}-H})\\
&\geqslant C(H)N^{\frac{1}{2}-H}(n-1+1)^{H-\frac{3}{2}}(n+n-1)^{H-\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{n-1}(i^{\frac{5}{2}-H}-(i-1)^{\frac{5}{2}-H})\\
&= C(H)N^{\frac{1}{2}-H}n^{H-\frac{3}{2}}(2n-1)^{H-\frac{3}{2}}[(n-1)^{\frac{5}{2}-H}-1]\\
&= C(H)N^{\frac{1}{2}-H}n^{H-\frac{1}{2}}\ .
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

现在, 考虑 $g_n(1)$ 的上确界. 利用放缩法可得

$$
\begin{aligned}
g_n(1) &= C(H)\int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} s^{\frac{3}{2}-H}\int_s^{\frac{n}{N}}(x^2-s^2)^{H-\frac{3}{2}}dxds\\
&= C(H)\int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} s^{\frac{3}{2}-H}\int_s^{\frac{n}{N}}(x-s)^{H-\frac{3}{2}}(x+s)^{H-\frac{3}{2}}dxds\\
&\leqslant C(H)\int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} s^{\frac{3}{2}-H}\int_s^{\frac{n}{N}}(x-s)^{H-\frac{3}{2}}(2s)^{H-\frac{3}{2}}dxds\\
&= C(H)\int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} s^{\frac{3}{2}-H}s^{H-\frac{3}{2}}\int_s^{\frac{n}{N}}(x-s)^{H-\frac{3}{2}}dxds\\
&= C(H)\int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}}\left(\frac{n}{N}-s\right)^{H-\frac{1}{2}}ds\\
&\leqslant C(H)N^{\frac{1}{2}-H}\ .
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

根据 (3.16) 和 (3.17), 可以得到 (3.14), 证毕. □

下面构造一个显式的套利机会. 首先假定修正漂移项 $\tilde{a} := a - r$ 满足 $\tilde{a}_{n_0} < 0$ (存在 $n_0 \geqslant n_H$), 在这种情形下可选取下面的策略: 如果股票价格到时刻 $n_0 - 1$ 有一个向下的跳跃, 则卖空 $M$ 股股

票, 接着用卖股票的钱买进债券. 显然, $u_{n_0} < 0$, 所以, $MS_{n+1} < MS_{n_0}(1+\tilde{a}_n) < MS_{n_0}$ 成立. 从而投资者的财富在时刻 $n_0+1$ 时是正的. 另一方面, 如果 $\tilde{a}$ 仍是非负的, 则可以构造下面的策略: 如果股票直到时刻 $n \geqslant n_H - 1$ 一直只有向上的跳跃, 则买入 $M$ 股股票. 此时, 易得 $d_n > 0$, 从而有 $MS_{n+1} > MS_n$, 即投资者的财富在时刻 $n+1$ 是正的. 最后注意到时刻 $n_H$ 至少有两条路径容许套利机会, 即 $(-1,-1,\ldots,-1)$ 和 $(1,1,\ldots,1)$, 这是由于这些路径不依赖于 $N$, 假定 $N \geqslant n_H$, 易得

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\text{套利路径}}{2^N} \geqslant \frac{2}{2^{n_{H-1}}} = 2^{2-n_H} > 0.$$

**注 3.1** 当 $H > \frac{1}{2}$ 时, 文献 [15] 研究的分数 Black-Scholes 二元市场和文献 [39] 研究的 Rosenblatt 随机过程驱动的 Black-Scholes 二元市场均存在金融套利机会, 因此, 当采用一个新的随机过程刻画金融资产价格波动时, 需要考虑该市场是否存在套利机会.

**注 3.2** 当 $H > \frac{1}{2}$ 时, 由于很难得到其他分数 Gauss 随机过程 (如双分数 Brown 运动、加权分数 Brown 运动和调和分数 Brown 运动) 的 Volterra 积分表达式, 因此, 无法采用本文的 Donsker 逼近理论研究这些分数 Gauss 过程驱动的 Black-Scholes 二元市场的金融套利机会. 但是可以借鉴文献 [40], 研究它们的金融套利机会.

**注 3.3** 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, 次分数 Brown 运动退化成标准 Brown 运动, 此时由 (3.5) 和 (3.6) 构成的二元市场不存在金融套利机会.

**注 3.4** 当 $H < \frac{1}{2}$ 时, 次分数 Brown 运动的核函数由 (2.3) 给出. 因此, 为了研究 $H < \frac{1}{2}$ 时几何次分数 Brown 运动下二元金融市场的套利问题, 我们首先需要研究 $H < 1/2$ 情形下次分数 Brown 运动 Donsker 逼近定理, 然后再利用该逼近理论研究由 (3.5) 和 (3.6) 构成的二元市场的金融套利机会.

## 4 Monte Carlo 模拟

本节通过 Monte Carlo 模拟的方法给出一些数值例子用以说明次分数 Black-Scholes 二元市场的套利机会. 为此, 首先需要模拟次分数 Brown 运动. 相比于模拟分数 Brown 运动 (参见文献 [41]), 次分数 Brown 运动的数值模拟方法并不多. 本文采用 (2.6) 的方法, 并假设 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一系列独立同分布的二元随机变量情形下模拟次分数 Brown 运动. 然后, 利用 (3.9), 我们容易得到弱收敛于几何次分数 Brown 运动的随机过程 (3.12). 现在令 $t_1,\ldots,t_n$ 为模拟得到 $S_t^N$ 的时间点, 则整个模拟 $S_t^N$ 的流程归纳如下:

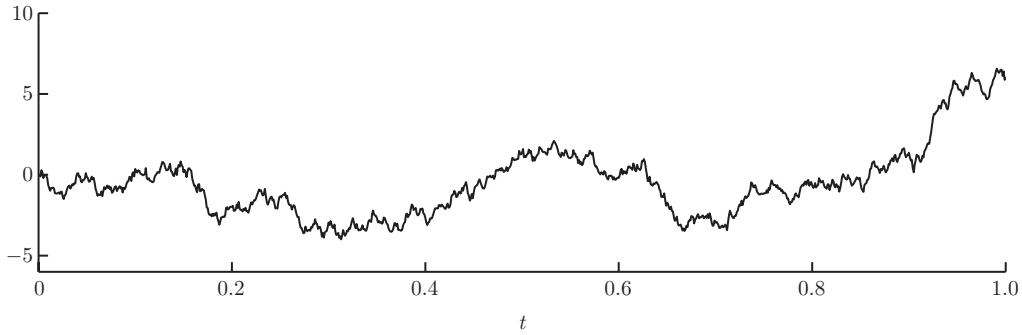
(i) 构建一个具有 $n$ 个随机变量 $(\xi_i)_{i\geqslant 1}$ 的向量, 且满足 $\mathrm{E}\xi_i = 0$ 和 $\mathrm{E}\xi_i^2 = 1$;

(ii) 对于每个 $t_j$, 计算

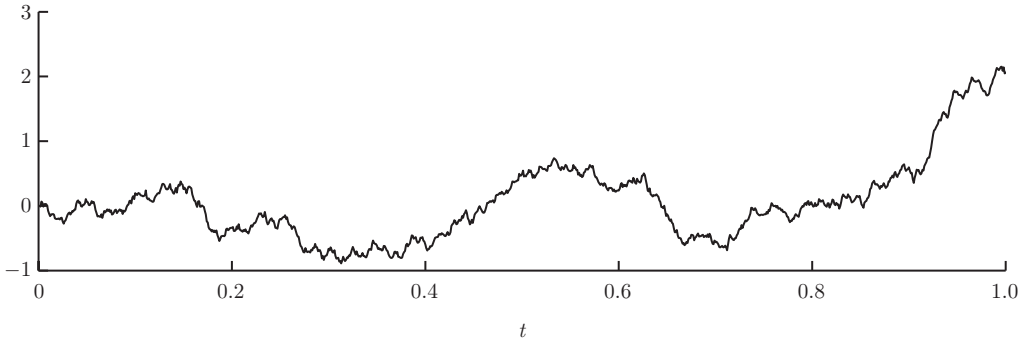
$$X_{t_j}^{H,N} = \sum_{i=1}^{j} \sqrt{N}\bigg(\int_{t_i}^{t_{i+1}} c_H n_H(t_j,s)ds\bigg)\xi_i;$$

(iii) 利用 (3.9) 得到 $Z_n$.

根据上面模拟次分数 Brown 运动的方法, 我们可以得到次分数 Brown 运动的模拟路径. 图 1 和 2

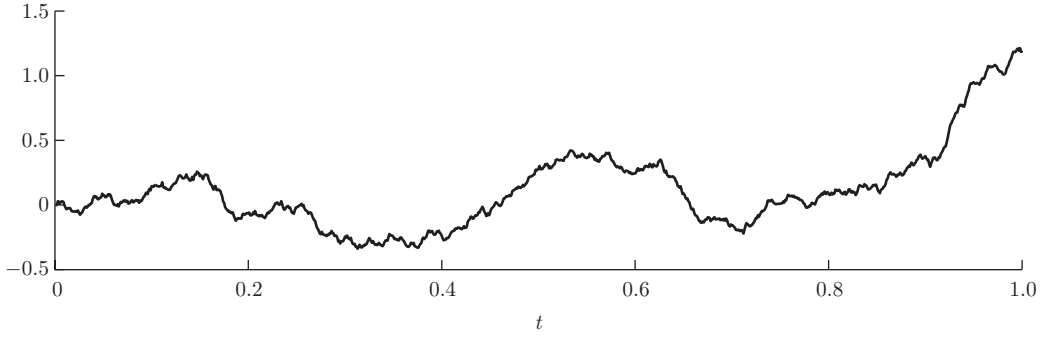



(a)

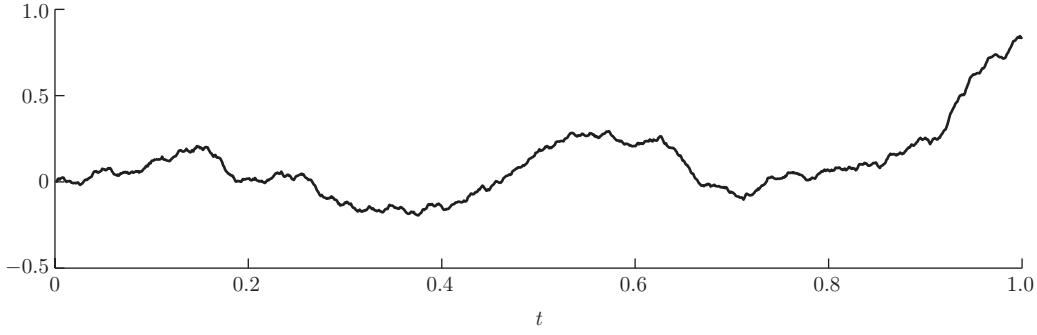



(b)

**图 1　$H = 0.56$ (a) 和 $H = 0.66$ (b) 情形下次分数 Brown 运动的模拟路径图**




(a)




(b)

**图 2　$H = 0.76$ (a) 和 $H = 0.86$ (b) 情形下次分数 Brown 运动的模拟路径图**

给出了不同 Hurst 指数下次分数 Brown 运动的模拟路径. 从图中可以看出次分数 Brown 运动的主要特性: 随着 Hurst 指数越大, 次分数 Brown 运动的路径越光滑.

接下来对次分数 Black-Scholes 模型的二元离散模型进行套利模拟分析. 众所周知, 由 Cox 等 [42] 在 1979 年建立的二叉树方法不仅能够较好地逼近连续模型, 还为期权和其他金融衍生品的估值提供了一个普遍适用的数值方法, 而且二叉树模型能够更直观地对美式期权、亚式期权及其他奇异期权进行合理定价. 事实上, 二叉树模型假设任意时刻, 标的资产股票的价格存在上涨和下跌两种可能, 且上涨和下跌的概率和为 1. 虽然这一假设非常简单, 但由于可以把一个给定的时间段细分为更小的时间单位, 因而, 二叉树期权定价模型适用于处理更为复杂的期权, 特别是期权定价公式没有显式解的问题. 随着要考虑的价格变动数目的增加, 二叉树期权定价模型的分布函数越来越趋向于正态分布, 从而二叉树期权定价模型和 Black-Scholes 期权定价模型相一致. 显然, 二叉树期权定价模型简化了期权定价的计算并增加了直观性, 因此成为全世界各大证券交易所的主要定价标准之一. 此外, 二叉树定价模型也可用于研究金融随机模型的套利机会, 可参见文献 [15,39,43]. 受以上文献的启发, 下面利用二叉树模型构建次分数 Black-Scholes 市场的套利机会.

为了研究的方便, 进一步假设 (2.6) 中 $\xi_i$ 取值 $\{-1,1\}$, 根据第 3 节的分析易知我们这样的假设取值可以近似逼近次分数 Black-Scholes 模型. 设定 $n=4$ 且 $S_0^4=1$, 图 3–6 分别展示了 Hurst 指数为 0.88、0.90、0.96 和 0.98 的次分数 Brown 运动驱动的二叉树模型. 值得一提的是, 当 $H=\frac{1}{2}$ 时, 所生成的标准二叉树是对称的且在 $n$ 期只有 $n+1$ 个节点. 而次分数 Brown 运动驱动的二叉树模型不再满足对称性, 而且在 $n$ 期有 $2^n$ 个节点. 仔细观察图 3 和 4, 我们可以发现在第 5 期出现了套利机会. 具体来说, 对图 3, 在第 4 期时刻, 当资产价格达到 1.7841 时, 借钱买入该资产, 则能保证下一时期稳定获益. 相反地, 在第 4 期时刻, 当资产价格达到 0.5037 时, 迅速卖出该资产, 则能保证下一时期稳定获益. 类似地分析图 4, 在第 4 期时刻, 当资产价格达到 1.7019 时, 借钱买入该资产, 则能保证下一时期稳定获益. 相反地, 在第 4 期时刻, 当资产价格达到 0.7456 或 0.5374 时, 迅速卖出该资产, 则能保证下一时期稳定获益. 再观察图 5 和 6, 我们可以发现在第 4 期时刻出现了套利机会. 因此, 对图 5 来说, 在第 3 期时刻, 当资产价格达到 1.2559 时, 借钱买入该资产, 则能保证下一时期稳定获益. 相反地, 在第 3 期时刻, 当资产价格达到 0.7800 时, 迅速卖出该资产, 则能保证下一时期稳定获益. 同样地, 对图 6 来说, 在第 3 期时刻, 当资产价格达到 1.1760 时, 借钱买入该资产, 则能保证下一时期稳定获益. 相反地, 在第 3 期时刻, 当资产价格达到 0.8417 时, 迅速卖出该资产, 则能保证下一时期稳定获益. 从而, 图 3–6 展示了在次分数 Black-Scholes 二元市场下的套利机会.

最后, 考虑次分数 Black-Scholes 环境下的期权定价问题. 由图 3–6 可以看出, 次分数 Black-Scholes 模型不能应用于期权定价研究当中, 这是由于当 $H\neq 1/2$ 时, 次分数 Brown 运动不是半鞅, 因而, 次分数 Black-Scholes 市场不存在唯一的等价鞅测度. 当然, 如果改变交易规则, 例如, 通过引入交易费用等, 可以进一步研究次分数 Brown 运动环境下的期权定价和投资组合问题. 实际上, 当我们在次分数 Brown 运动环境下研究期权定价问题时, 需要注意到标的资产的价格不仅跟当期价格有关而且跟历史价格相关, 从而定价模型将更为复杂. 换而言之, 次分数 Brown 运动环境下到期日为 $T$ 的期权价格不仅依赖于 $T-t$ 时刻的价格, 而且依赖于 $t$ 时刻的价格. 在经典的 Black-Scholes 市场中, 假设投资者甲在 $t_1$ 时刻进入资本市场, 投资者乙在 $t_2>t_1$ 时刻进入资本市场, 则在投资者甲和乙认同的市场波动率 $\sigma$ 下, 定价任意时刻 $t\geqslant t_2$ 下的期权价格是相等的. 然而, 在次分数 Black-Scholes 环境下, 尽管假设投资者甲和乙认同相同的市场波动率 $\sigma$, 为了复制投资者甲的期权价值, 投资者乙需要知道投资者甲进入资本市场时刻 $t_1$ 时期权的价值, 因此, 定价公式不仅与市场波动率 $\sigma$ 有关, 而且与时间点 $t_2$ 和 $t_1$ 有关.

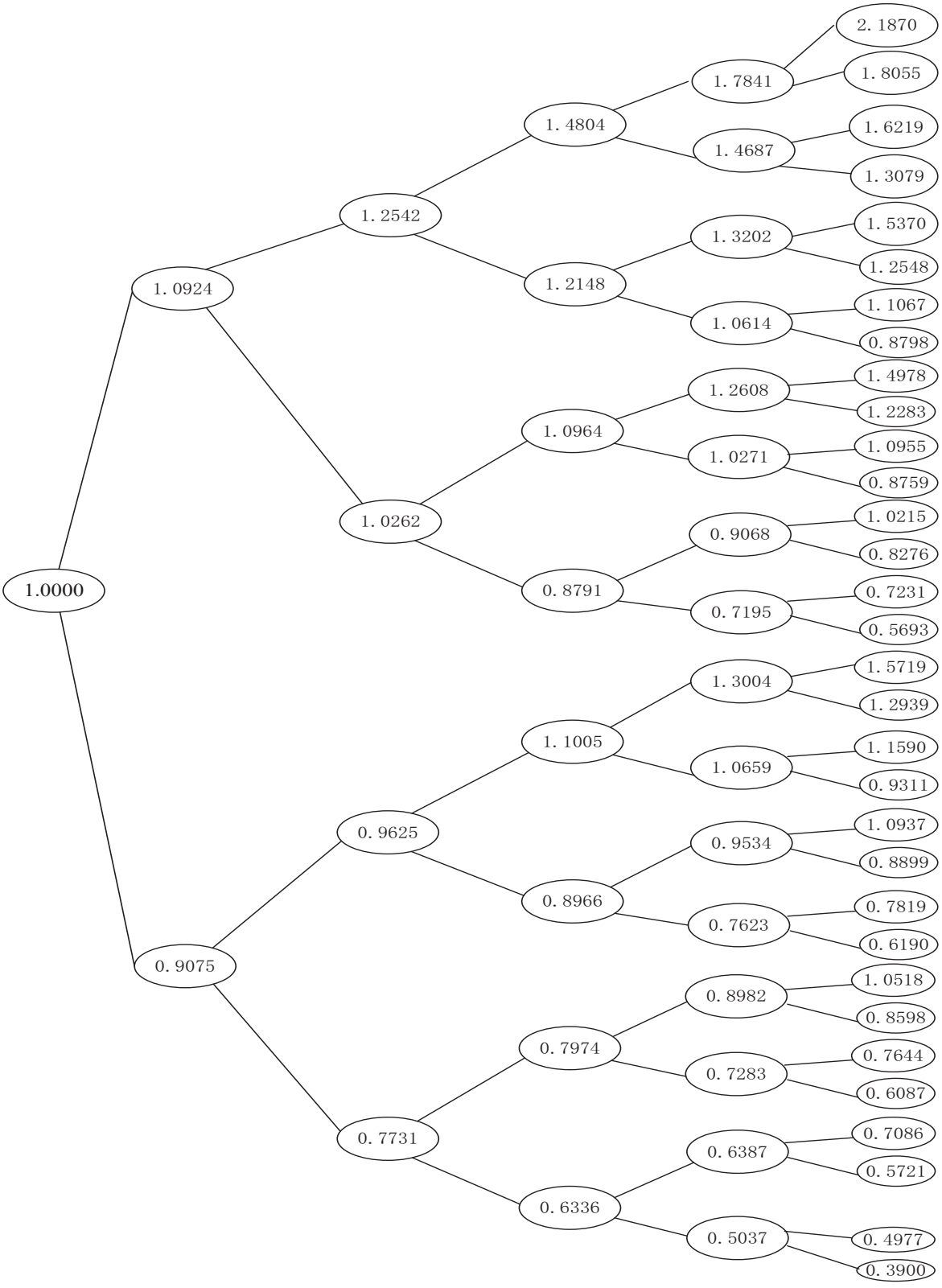



**图 3　$H = 0.88$ 情形下次分数 Black-Scholes 二元市场的五步模拟结果**

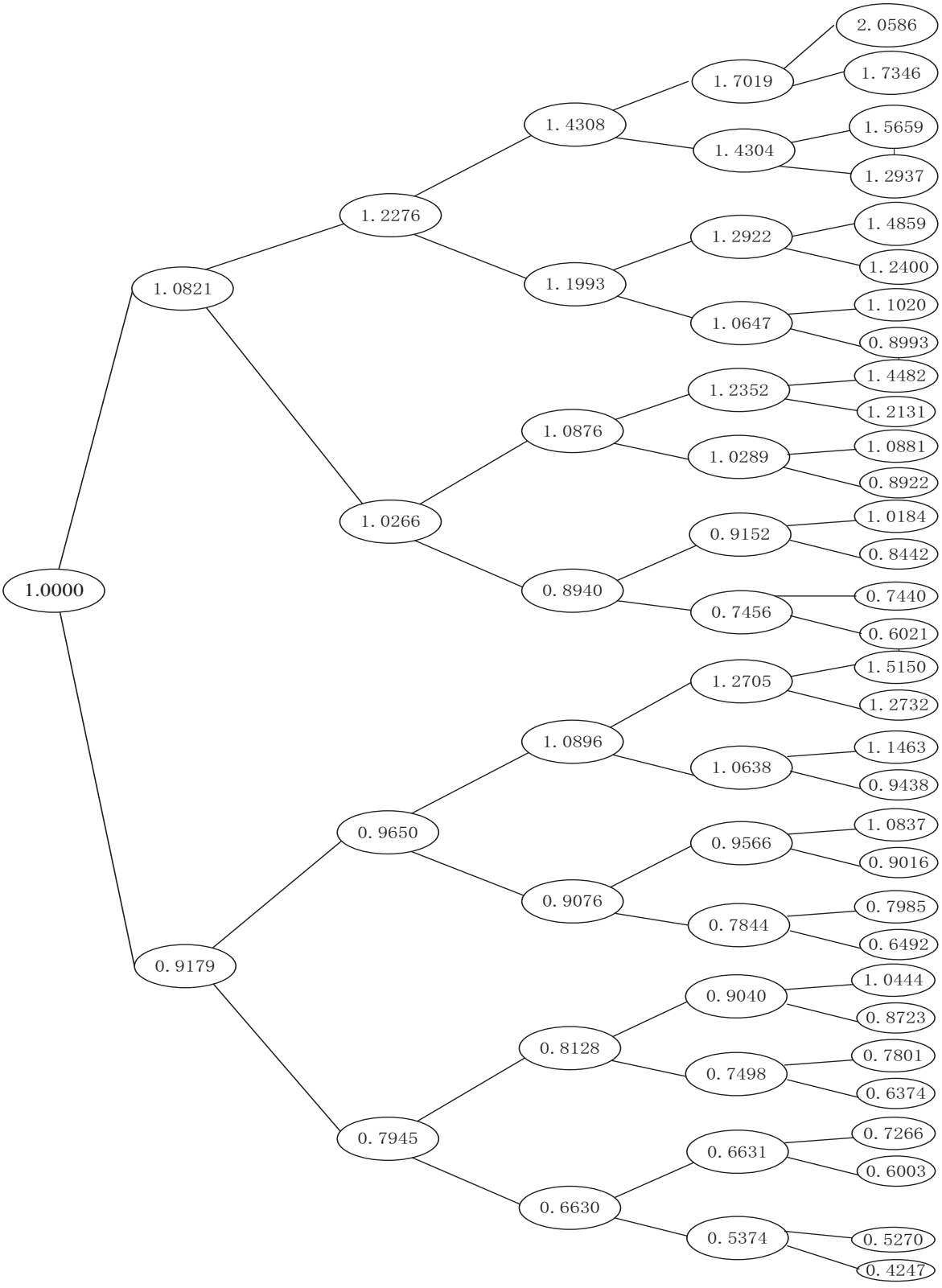



**图 4 $H = 0.90$ 情形下次分数 Black-Scholes 二元市场的五步模拟结果**

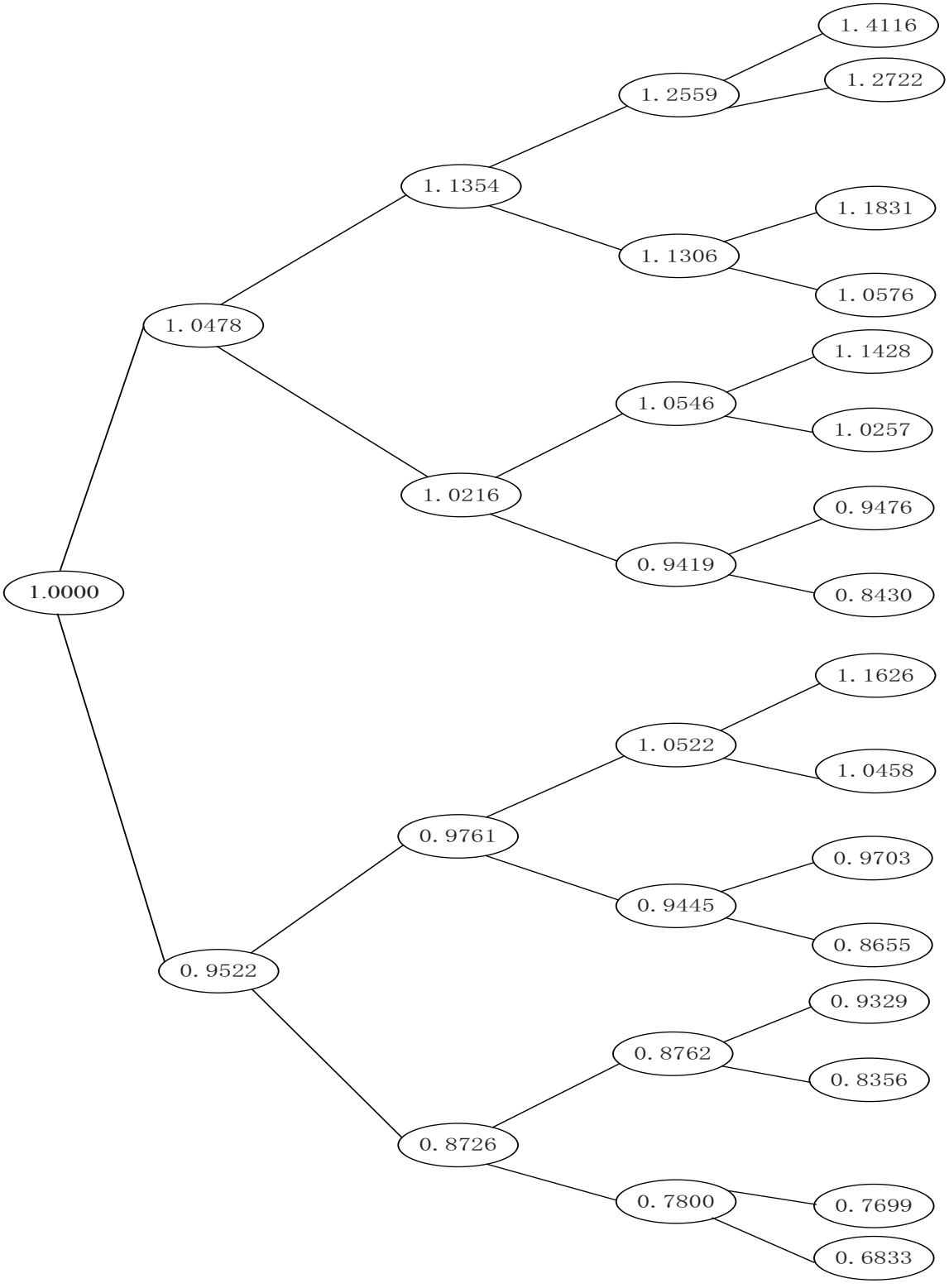



**图 5　$H = 0.96$ 情形下次分数 Black-Scholes 二元市场的五步模拟结果**

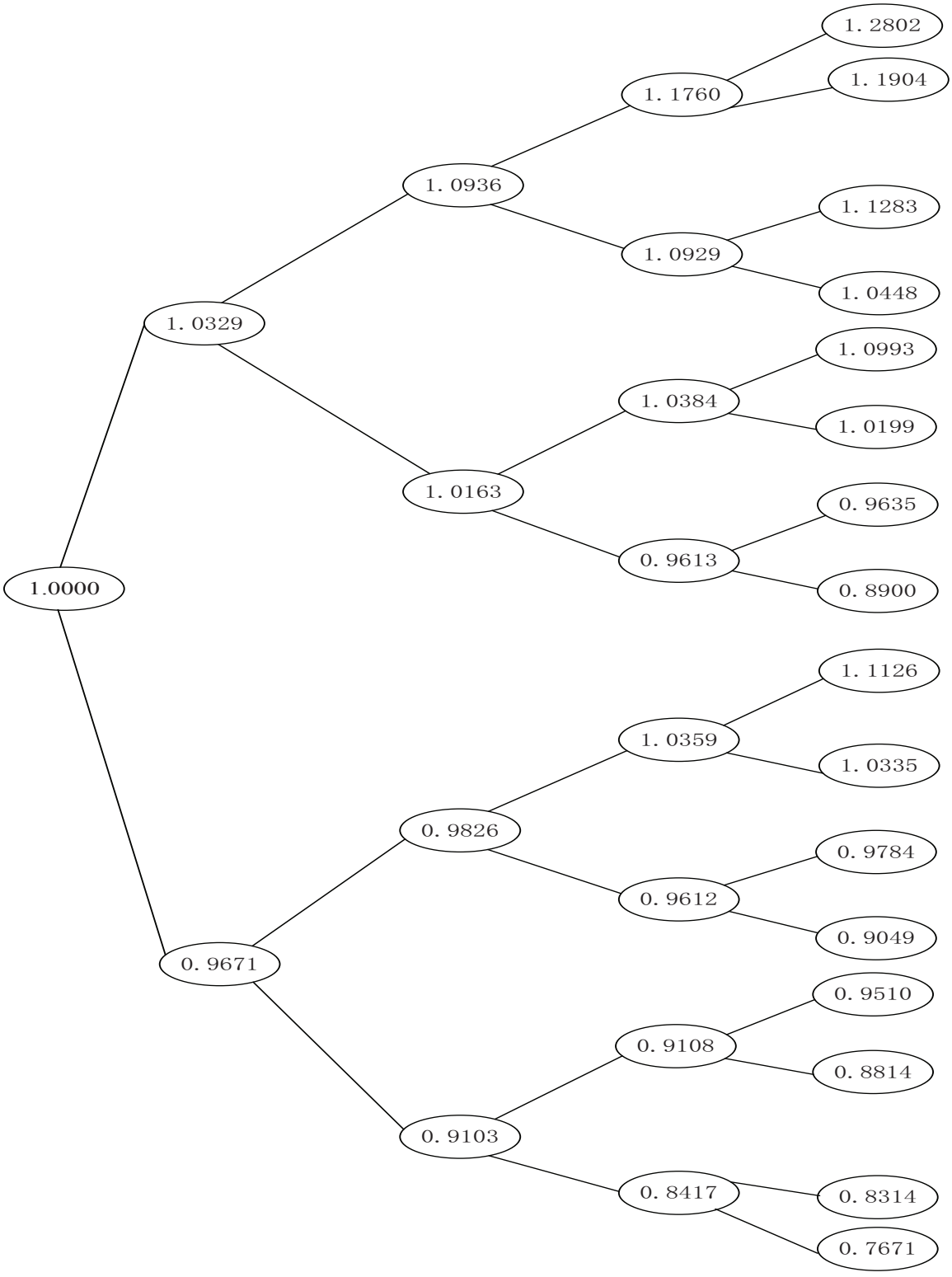



**图 6 $H = 0.98$ 情形下次分数 Black-Scholes 二元市场的五步模拟结果**

## 5 结论

传统金融工程领域经常采用 Markov 模型刻画金融资产价格变化的行为模式, 然而基于金融市场的实证研究发现, 具有 Markov 性的 Brown 运动和 Lévy 过程并不能较好地刻画金融时间序列的长记忆性和非 Markov 性, 因此, 众多学者采用分数 Brown 运动描述金融资产的价格变化过程. 然而分数 Brown 运动不能刻画金融时间序列的非平稳性, 从而一些学者建议采用次分数 Brown 运动来刻画金融资产价格变化过程. 由于次分数 Brown 运动、双分数 Brown 运动和加权分数 Brown 运动等随机过程都不是半鞅, 因此将这些模型应用于金融市场需要进行金融市场的套利研究.

金融随机模型的套利问题一直是金融数学的热点问题, 本文在 Hurst 指数 $> 1/2$ 的假设下, 利用次分数 Brown 运动 Donsker 逼近定理, 构建了次分数 Brown 运动驱动的 Black-Scholes 市场模型, 并研究了二元次分数 Black-Scholes 模型的金融套利机会. 进一步, 采用 Monte Carlo 模拟说明了套利发生的可能性, 并展示了套利发生过程. 次分数 Black-Scholes 模型的二元近似市场容许套利机会, 这是由于当 Hurst 指数 $> 1/2$ 时, 次分数 Brown 运动的长期相关性使得股票价格有一个足够长的上涨 (下跌) 趋势, 则投资者总可以在这段较长的上涨 (下跌) 时间内获得套利机会.

采用 Donsker 逼近理论研究次分数 Brown 运动驱动的 Black-Scholes 二元市场模型的套利机会, 有一定的新颖性. 但是并不是杜绝了将次分数 Brown 运动应用于金融市场的可能性. 事实上, 借鉴文献 [16], 我们可以在交易间隔不能无限小的条件下, 引入可容许策略集, 从而得到次分数 Brown 运动驱动的无套利机会的 Black-Scholes 金融市场. 此外, 文献 [44] 引入交易费用的思想, 可以在次分数 Black-Scholes 金融市场中, 引入比例交易成本来消除次分数 Black-Scholes 市场的套利机会. 再者, 可以借鉴文献 [32] 的方法, 通过引入混合次分数 Brown 运动来刻画资产价格收益率的随机变化过程, 并在模型中考虑特定套利税来消除次分数 Black-Scholes 市场的套利机会. 因此, 对于次分数 Brown 运动、双分数 Brown 运动和加权分数 Brown 运动驱动的 Black-Scholes 二元市场模型是否存在套利机会仍然需要进行深入研究. 此外, 在次分数 Brown 运动驱动的 Black-Scholes 金融市场下考虑人的行为和个人的风险偏好等因素, 对已有的期权定价模型进行修正, 可以为期权定价提供新视角.

**致谢** 感谢两位评审专家对 Monte Carlo 模拟部分和论文定理证明提出的宝贵意见.

## 参考文献

1 Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. J Political Economy, 1973, 81: 637–654
2 Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. J Financ Econ, 1976, 3: 125–144
3 Kou S G. A jump-diffusion model for option pricing. Manage Sci, 2002, 48: 1086–1101
4 Cai N, Kou S G. Option pricing under a mixed-exponential jump diffusion model. Manage Sci, 2011, 57: 2067–2081
5 Yan J A. A new look at the fundamental theorem of asset pricing. J Korean Math Soc, 1998, 35: 659–673
6 Xia J M, Yan J A. A new look at some basic concepts in arbitrage pricing theory. Sci China Ser A, 2003, 46: 764–774
7 Greene M T, Fielitz B D. Long-term dependence in common stock returns. J Financ Econ, 1977, 4: 339–349
8 Lo A W. Long-term memory in stock market prices. Econometrica, 1991, 59: 1279–1313
9 Mandelbrot B B, Van Ness J W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Rev, 1968, 10: 422–437
10 Duncan T E, Hu Y, Pasik-Duncan B. Stochastic calculus for fractional Brownian motion I: Theory. SIAM J Control Optim, 2000, 38: 582–612
11 Hu Y, Øksendal B. Fractional white noise calculus and applications to finance. Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top, 2003, 6: 1–32
12 Elliott R J, Chan L. Perpetual American options with fractional Brownian motion. Quant Finance, 2004, 4: 123–128
13 Kalantari R, Shahmorad S. A stable and convergent finite difference method for fractional Black-Scholes model of American put option pricing. Comput Econ, 2019, 53: 191–205

14 Rogers L C G. Arbitrage with fractional Brownian motion. Math Finance, 1997, 7: 95–105
15 Sottinen T. Fractional Brownian motion, random walks and binary market models. Finance Stoch, 2001, 5: 343–355
16 Cheridito P. Arbitrage in fractional Brownian motion models. Finance Stoch, 2003, 7: 533–553
17 Bender C, Elliott R J. Arbitrage in a discrete version of the Wick-fractional Black-Scholes market. Math Oper Res, 2004, 29: 935–945
18 Björk T, Hult H. A note on Wick products and the fractional Black-Scholes model. Finance Stoch, 2005, 9: 197–209
19 De Lima P J F. Nonlinearities and nonstationarities in stock returns. J Bus Econom Statist, 1998, 16: 227–236
20 Stărică C, Granger C. Nonstationarities in stock returns. Rev Economics Stat, 2005, 87: 503–522
21 Bassler K E, McCauley J L, Gunaratne G H. Nonstationary increments, scaling distributions, and variable diffusion processes in financial markets. Proc Natl Acad Sci USA, 2007, 104: 17287–17290
22 Marmer V. Nonlinearity, nonstationarity, and spurious forecasts. J Econometrics, 2008, 142: 1–27
23 Bojdecki T, Gorostiza L G, Talarczyk A. Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times. Statist Probab Lett, 2004, 69: 405–419
24 Tudor C. Sub-fractional Brownian motion as a model in finance. Working paper of University of Bucharest, http://imar.ro/~purice/Conferinta-AMaMeF-Pitesti/Talks/Tudor.pdf, 2008
25 Tudor C. Some properties of the sub-fractional Brownian motion. Stochastics, 2007, 79: 431–448
26 Yan L T, Shen G J. On the collision local time of sub-fractional Brownian motions. Statist Probab Lett, 2010, 80: 296–308
27 Shen G J, Yan L T. An approximation of subfractional Brownian motion. Comm Statist Theory Methods, 2014, 43: 1873–1886
28 Dai H S. Random walks and subfractional Brownian motion. Comm Statist Theory Methods, 2016, 45: 2834–2841
29 Sun X C, Yan L T. A central limit theorem associated with sub-fractional Brownian motion and an application (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1055–1076 [孙西超, 闫理坦. 次分数 Brown 运动一个积分泛函的中心极限定理及其应用. 中国科学: 数学, 2017, 47: 1055–1076]
30 Yu Q. Statistical inference for Vasicek-type model driven by self-similar Gaussian processes. Comm Statist Theory Methods, 2020, 49: 471–484
31 Liu J F, Li L, Yan L T. Sub-fractional model for credit risk pricing. Int J Nonlinear Sci Numer Simul, 2010, 11: 231–236
32 Xu F, Zhou S G. Pricing of perpetual American put option with sub-mixed fractional Brownian motion. Fract Calc Appl Anal, 2019, 22: 1145–1154
33 Tudor C. On the Wiener integral with respect to a sub-fractional Brownian motion on an interval. J Math Anal Appl, 2009, 351: 456–468
34 Yan L T, Shen G J, He K. Itô's formula for a sub-fractional Brownian motion. Commun Stoch Anal, 2011, 5: 135–159
35 Araneda A A. The fractional and mixed-fractional CEV model. J Comput Appl Math, 2020, 363: 106–123
36 Araneda A A, Bertschinger N. The sub-fractional CEV model. Phys A, 2021, 573: 125974
37 Tudor C. Some aspects of stochastic calculus for the sub-fractional Brownian motion. Ann Univ Bucuresti Math, 2008, 57: 199–230
38 Dzhaparidze K. Introduction to option pricing in a securities market I: Binary models. CWI Quart, 1996, 9: 319–355
39 Torres S, Tudor C A. Donsker type theorem for the Rosenblatt process and a binary market model. Stoch Anal Appl, 2009, 27: 555–573
40 Zhang X, Xiao W. Arbitrage with fractional Gaussian processes. Phys A, 2017, 471: 620–628
41 Coeurjolly J F. Simulation and identification of the fractional Brownian motion: A bibliographical and comparative study. J Stat Soft, 2000, 5: 1–53
42 Cox J C, Ross S A, Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach. J Financ Econ, 1979, 7: 229–263
43 Nelson D B, Ramaswamy K. Simple binomial processes as diffusion approximations in financial models. Rev Financ Stud, 1990, 3: 393–430
44 Guasoni P. No arbitrage under transaction costs, with fractional Brownian motion and beyond. Math Finance, 2006, 16: 569–582

# Arbitrage opportunities in sub-fractional Black-Scholes model

Weilin Xiao, Qing Zhou & Weixing Wu

**Abstract** In order to capture the long range dependence and the nonstationary of financial time series, many scholars have used the sub-fractional Brownian motion to describe the price fluctuations of the underlying asset. Since the sub-fractional Brownian motion fails to be a semimartingale, its application in financial markets is in doubt and becomes a hot topic in mathematical finance. Using the Donsker type approximation for the sub-fractional Brownian motion with Hurst parameter $H > 1/2$, this paper considers the arbitrage opportunities in the geometric sub-fractional Brownian motion. First, using the random walk theory in the Skorokhod topology with $H > 1/2$, we construct a model, which converges weakly to the sub-fractional Black-Scholes model. Then, using the integral inequality and the theory of the sub-fractional binary market, we prove that there exist arbitrage opportunities in the sub-fractional Black-Scholes model. Finally, the Monte Carlo simulation illustrates the possibility of arbitrage opportunities and shows the generation of arbitrage opportunities.

**Keywords** **sub-fractional Brownian motion, weak convergence, random walk, arbitrage opportunity**

**MSC(2020)** **60G15, 60J55, 60H05, 91B70**

**doi: 10.1360/SSM-2020-0156**