



贝尔不等式——2022年度诺贝尔物理学奖解读

苏洪轶¹, 陈景灵^{2*}

1. 哈尔滨工程大学物理与光电工程学院, 哈尔滨 150001;

2. 南开大学陈省身数学研究所理论物理研究室, 天津 300071

* 联系人, E-mail: chenjl@nankai.edu.cn

量子力学自诞生以来一直争议不断。爱因斯坦公开表达对量子力学的批评态度可以追溯到1927年举行的第五届索尔维会议。会议期间, 他与同为量子论奠基人的玻尔展开了激烈争论。虽然当年度的会议主题是“电子与光子”, 但讨论的焦点几乎都集中在两人的争论上。争论没有完结, 但是由玻尔、海森堡、玻恩等人推动的量子力学哥本哈根诠释借此机会得到了广泛的传播。关于这场争论, 狄拉克后来回忆道: “我没怎么参加爱因斯坦与玻尔在索尔维会议的讨论。我听了他们的争论, 但是我没有加入, 因为我不非常感兴趣。我对于获得正确的方程更感兴趣。对我而言, 一个数学物理学家的根本工作在于获得正确的方程, 而方程的诠释只具有次要意义…目前的量子力学看来还不是最终形态…我认为从长远看爱因斯坦可能会最终胜出, 尽管物理学家不得不暂时接受玻尔的概率诠释, 尤其是当他们做出检验的时候。”^[1]

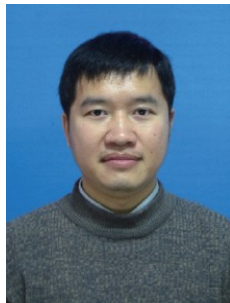
爱因斯坦1933年定居美国之后, 与政府往来日益频繁, 却仍然写出了数篇精彩的文章, 其中就包括1935年的“EPR佯谬”^[2]和“ER引力桥”^[3]。玻尔^[4]随即写了一篇同名文章对EPR佯谬做出回应。双方都认为自己赢得了这场争论, EPR文章从此转入深眠, 成为了一篇“睡美人”文章^[5]。

为了理解EPR佯谬, 我们首先引入马斯洛的“锤子定律”^[6]。如果一个人手中只有锤子, 那么他会把遇到的所有问题都当成钉子去敲打。锤子定律在自然科学研究中是否成立呢? 换句话讲, 如果人们手中只有量子理论, 当人们用量子理论研究自然时, 这个自然是否本质上就是量子的? 量子力学要求不确定关系成立, 这在数学上可表述为矩阵或者算符的性质。然而, 能否仅仅通过特定的数学工具或者物理理论就可对自然的本质做出普适性的判断? 在这一点上, 爱因斯坦质疑量子力学中无处不在的概率性——“我认为上帝不掷骰子”。

EPR文章中, 爱因斯坦、波多尔斯基与罗森在定域性假设下得到量子力学自相矛盾的结果, 以此“证明”量子力学不完备。用现代语言来说, 他们在论证过程中使用了“量子纠缠态”的性质。“量子纠缠”一词最早出自薛定谔^[7]对EPR文章的回应, 它是量子力学允许存在的状态。它具有这样的性质: 处



苏洪轶 博士, 哈尔滨工程大学物理与光电工程学院副教授, 从事量子信息的理论研究。



陈景灵 博士, 南开大学教授, 研究方向为量子物理与量子信息。

于纠缠态的两个粒子, 如果对其中之一做测量, 在得到这个粒子的测量结果的同时, 可以立即得知另一个粒子的结果, 尽管另一个粒子没有经历测量。量子纠缠态的独特性在于: 纠缠既不依赖于粒子之间的距离, 也不依赖于对每个粒子的测量方式。实际上, 对于一个粒子来说, 一般允许多种(投影)测量方式, 对于任何一种测量, 在得到测量结果的同时, 将能立即得知与之纠缠的另一个粒子的结果。举一个例子, 日常生活中存在类似于“Bertlmann袜子”的关联^[8]。Bertlmann喜欢两只脚穿不同颜色的袜子, 比如一只脚穿黑色, 另一只脚穿白色。当Bertlmann脱下一只鞋, 露出黑色袜子时, 人们立刻知道他另一只脚穿白色袜子, 尽管他没有脱下另一只鞋。然而, 这种关联不是量子纠缠。利用狄拉克符号, Bertlmann袜子由如下量子态密度矩阵表示:

$$\rho = \frac{1}{2}(|\text{左脚白}\rangle\langle\text{左脚白}| \otimes |\text{右脚黑}\rangle\langle\text{右脚黑}| + |\text{左脚黑}\rangle\langle\text{左脚黑}| \otimes |\text{右脚白}\rangle\langle\text{右脚白}|). \quad (1)$$

而如果两只袜子是量子纠缠的, 它的状态应表示为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{左脚白}\rangle \otimes |\text{右脚黑}\rangle + |\text{左脚黑}\rangle \otimes |\text{右脚白}\rangle). \quad (2)$$

显然 $\rho \neq |\psi\rangle\langle\psi|$. 如果选择另一种不同的量子测量方式, 对应的量子态是

$$\begin{aligned} |\text{左脚灰}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{左脚白}\rangle + |\text{左脚黑}\rangle), \\ |\text{左脚灰}^\perp\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{左脚白}\rangle - |\text{左脚黑}\rangle), \\ |\text{右脚灰}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{右脚白}\rangle + |\text{右脚黑}\rangle), \\ |\text{右脚灰}^\perp\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{右脚白}\rangle - |\text{右脚黑}\rangle), \end{aligned} \quad (3)$$

则 $|\psi\rangle$ 的纠缠性质仍然保持:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{左脚灰}\rangle \otimes |\text{右脚灰}\rangle - |\text{左脚灰}^\perp\rangle \otimes |\text{右脚灰}^\perp\rangle), \quad (4)$$

其中量子态 $|\text{左脚灰}^\perp\rangle$ 与 $|\text{左脚灰}\rangle$ 互相正交. 但 ρ 不具备这样的性质, 因为

$$\rho \neq \frac{1}{2}(|\text{左脚灰}\rangle\langle\text{左脚灰}| \otimes |\text{右脚灰}\rangle\langle\text{右脚灰}| + |\text{左脚灰}^\perp\rangle\langle\text{左脚灰}^\perp| \otimes |\text{右脚灰}^\perp\rangle\langle\text{右脚灰}^\perp|), \quad (5)$$

也就不会有灰色袜子与灰[⊥]色袜子的关联了.

EPR的论证如下: 考虑位置和动量两种测量方式, 如果两个粒子1和2处于纠缠态, 那么通过测量粒子1的位置, 可以立即得知粒子2的位置; 类似地, 通过测量粒子2的动量, 可以立即得知粒子1的动量. 现在, 我们测量粒子1的位置和粒子2的动量. 一方面, 按照量子力学不确定关系, 由于测量了粒子1的位置, 粒子1的动量将不能确定. 另一方面, 按照定域性假设, 当两个粒子距离遥远时, 它们各自的测量是不会互相影响的. 因此, 由于粒子2与粒子1的纠缠, 通过测量粒子2的动量是能够得知粒子1的动量的. 这就出现了矛盾: 粒子1的动量到底能不能确定?

上述论证涉及到了量子力学不确定关系、量子纠缠态以及定域性假设. 考虑到在爱因斯坦的相对论中, 定域性是其核心要素, 应该普遍适用. EPR由此得出“量子力学不完备”的论断.

沉睡中的EPR文章在随后几十年里只得到一些零星的引用. 彼时物理研究的核心领域是粒子物理: 1932年查德威克发现中子, 1935年汤川秀树提出核力的介子理论, 1939年爱因斯坦向美国总统罗斯福发信阐述有关原子能的军事用途,

1945年首枚原子弹在日本爆炸, 1946~1948年施温格、费曼、朝永振一郎提出量子电动力学重整化方法, 1956年李政道与杨振宁预言弱相互作用下宇称不守恒并由吴健雄团队实验验证, 1964年盖尔曼提出夸克模型.

量子力学基础问题的研究在粒子物理的群星闪耀下缓慢前行. 值得一提的是, 惠勒^[9]在1946年指出, 正-负电子对的湮灭产物是一对光子, 能够实现强关联的量子态. 由角动量守恒可知, 这对光子的偏振方向一定是相反的. 吴健雄和Shaknov^[10]于1950年对这一方案做了精度极高的实验检验. 7年后, 玻姆和阿哈罗诺夫^[11]意识到, 吴-Shaknov实验正是检验EPR佯谬所需要的量子纠缠态的性质. 吴-Shaknov实际上是首次在实验上实现了明确的、空间分离的量子纠缠态. 另外, 玻姆^[12]为量子力学提出过一种隐变量理论, 完善了马德隆-德布罗意的导航波理论^[13,14]. 在这个理论中, 量子势依赖于所有粒子的位置, 这意味着玻姆的隐变量理论本质上是一种非定域理论.

随后, 高能物理学家贝尔在玻姆隐变量理论和吴-Shaknov实验的基础上, 开始寻求符合EPR文章的定域隐变量理论. 1964年, 他成功地构造出一个后来以他本人命名的数学不等式^[15], 并且发现量子力学会违反这个不等式. 于是, 如果有实验能够检验量子力学是否对贝尔不等式存在违反, 那么, EPR佯谬将最终获得解决.

贝尔的定域隐变量理论可以从如下角度理解: 考虑任意二体关联几率 $P(a, b | A, B)$, 这个表达式的意思是对粒子1做A测量得到a结果, 对粒子2做B测量得到b结果, 这两个测量事件发生的概率为 $P(a, b | A, B)$. 我们有

$$\begin{aligned} P(a, b | A, B) &= \frac{1}{P(A, B)} P(a, b, A, B) \\ &= \frac{1}{P(A, B)} \sum_{\lambda} P(a, b, A, B, \lambda). \end{aligned} \quad (6)$$

最后一步中, λ 称为隐变量. 隐变量理论的起源在于EPR认为量子力学“不完备”, 那么, 通过引入额外的变量(隐变量)来使得量子力学变得完备在逻辑上就很自然了. 换句话说, 任何关联都可以看作是一种完备理论的边际概率. 接下来, 对求和里面的关联概率做如下变化:

$$\begin{aligned} P(a, b, A, B, \lambda) &= P(A, B, \lambda) P(a, b | A, B, \lambda) \\ &= P(A, B | \lambda) P(\lambda) P(a, b | A, B, \lambda). \end{aligned} \quad (7)$$

“自由意志”要求 $P(A, B | \lambda) = P(A, B)$, 即测量方式的选择是自由的, 不应该被隐变量决定. 自由意志意味着真正的随机性, 是具备科学精神的绝大多数人都认同的信念. 因此, 对粒子1(2)的测量方式A(B)的选择就如同人们考虑晚餐准备吃什么一样自由. “定域性”要求 $P(a, b | A, B, \lambda) = P(a | A, \lambda) P(b | B, \lambda)$, 即在“完备的”隐变量理论中, 两个测量事件是无关的. 于是我们最后得到

$$P(a, b | A, B) = \sum_{\lambda} P(\lambda) P(a | A, \lambda) P(b | B, \lambda). \quad (8)$$

因此, 任何定域隐变量理论中的关联概率必须满足如上所示的分解.

首次实验检验的不等式是由Clauser、Horne、Shimony和Holt改进的贝尔不等式^[16], 通常称为CHSH不等式, 表达式如下:

$$I = |Q_{11} + Q_{12}| + |Q_{21} - Q_{22}| \leq 2, \quad (9)$$

其中, $Q_{ij} = \sum_{a_i, b_j} a_i b_j P(a_i, b_j | A_i, B_j)$, 表示关联函数, 每个粒子有两种测量方式 $i, j=1, 2$, 每种测量方式下有两个测量结果, 即 $a_i, b_j = \pm 1$. 在定域隐变量理论中, 由于关联概率存在分解, 遍历 $P(\lambda)$ 、 $P(a|A, \lambda)$ 、 $P(b|B, \lambda)$ 所有可能之后, 将得到经典上界为 2. 量子力学中的关联概率由投影算子和量子态得出:

$$P(a, b | A, B) = \text{tr}[(\hat{p}_A^a \otimes \hat{p}_B^b) |\psi\rangle\langle\psi|] \quad (10)$$

其中 $\hat{p}_A^a = \frac{1+(-1)^a \hat{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}$, $\hat{p}_B^b = \frac{1+(-1)^b \hat{m} \cdot \vec{\sigma}}{2}$ 表示投影算符,

$\hat{n}$ 、 $\hat{m}$ 表示测量方向. 当选择纠缠态 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle \otimes |-1\rangle - |-1\rangle \otimes |+1\rangle)$ (即单态) 时, 适当选取测量方向

$$\hat{n}_1 = \hat{x}, \hat{n}_2 = \hat{y}, \hat{m}_1 = -\frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}, \hat{m}_2 = \frac{\hat{y} - \hat{x}}{\sqrt{2}}, \quad (11)$$

得到

$$Q_{11} = Q_{12} = Q_{21} = -Q_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (12)$$

于是获得贝尔不等式的最大量子违反值为

$$I = 2\sqrt{2} > 2, \quad (13)$$

即由定域隐变量理论导致的贝尔不等式是能够被量子力学违反的. 这里必须注意的是, 非定域并不意味着超光速通信的可能. 量子力学虽然不能用定域隐变量理论来解释, 但它仍满足无信号传播条件:

$$\begin{aligned} \sum_b P(a, b | A, B) &= \sum_b P(a, b' | A, B'), \\ \sum_a P(a, b | A, B) &= \sum_a P(a', b | A', B), \end{aligned} \quad (14)$$

这里 A' 表示对粒子 1 采用与 A 不同的测量方式, 得到测量结果 a' ; B' 表示对粒子 2 采用与 B 不同的测量方式, 得到测量结果 b' . 就是说, 粒子 1(2) 的边缘概率与粒子 2(1) 的测量方式无关. 无信号传播条件表示一种平均意义上的因果律, 是判断关联是否满足因果律的必要条件. 利用投影算子的性质可以直接验证上式在量子力学中是成立的.

检验贝尔最初得到的不等式在实验上存在困难, 其原因

在于原始的贝尔不等式要求存在一个测量方向, 当两个粒子均沿着这个方向测量时, 测量数据必须是完美关联的^[16]. 具体来说, 我们对式(9)做一个等价变化, 即把粒子 1 的两个测量方式互换, 得到

$$I' = |Q_{11} - Q_{12}| + |Q_{21} + Q_{22}| \leq 2, \quad (15)$$

当取 $\hat{n}_2 = \hat{m}_2$ 时, 则对于单态有完美关联 $Q_{22} = -1$, 所以 $|Q_{21} + Q_{22}| = 1 - Q_{21}$. 这样, CHSH 不等式就退化成原始的贝尔不等式^[15]:

$$|Q_{11} - Q_{12}| \leq 1 + Q_{21}. \quad (16)$$

相比之下, CHSH 不等式不需要假设这种完美关联, 因此在实验上是更加可行的.

接下来, 接力棒交到了实验物理学家的手中. 贝尔不等式的实验检验主要有三个不平凡之处: 定域性、探测效率、选择测量方式的自由. 由前面定域隐变量理论的推导可知, 两个粒子的测量不能互相影响, 所以这两个测量事件必须是类空间隔的. 实际的测量不是瞬时的, 需要一定的时间 t , 这就要求两个粒子的间距要大于 ct (c 是光速), 才能保证定域性漏洞的关闭. 另一方面, 两个纠缠粒子在飞往探测器过程中可能会丢失, 或者进入探测器后探测器没有发火, 不能触发探测计数. 不完美的探测效率会严重影响贝尔检验的可信度^[17], 原因如下: 考虑一个制备量子态的源, 它制备出的态不是纠缠态, 而是最大混合态 $(1 \otimes 1)/4$. 如果探测效率完美, 则探测数据不会出现强关联. 但是, 在不完美探测效率下, 如果 $++$ 、 $--$ 的数据没有探测到, 只测到 $+-$ 、 $-+$ 的数据, 实验结果将展现出强关联. 这种结果显然不能证明贝尔不等式的违反. 探测效率漏洞也因此被称为公平采样漏洞. 在贝尔检验中考虑探测效率的方法并不唯一, 对不同形式贝尔不等式的检验, 探测效率的要求一般不同. 最后, 为了保证对每个粒子的测量是自由的, 对测量方式的选择必须是真正随机的, 即所谓“自由意志漏洞”^[8]. 早期贝尔检验使用伪随机数来控制测量方式, 使用真随机数来控制测量方式是近年来的进展.

1972 年, Freedman 和 Clauser^[18] 首次对贝尔不等式做出实验检验. 他们使用钙原子级联跃迁生成纠缠光子对. Freedman-Clauser 实验引起了众多研究者的兴趣, 包括吴健雄团队^[19] 利用高能光子做出的贝尔检验. Freedman-Clauser 实验的不足之处在于光子对的生成效率低, 测量时间长, 且两个光子之间的距离很短, 因此他们的实验存在定域性漏洞, 他们采用的测量方式也不是随机选择的. Aspect 团队^[20] 于 1982 年首次关闭了贝尔检验中的定域性漏洞. 他们改进了钙原子生成纠缠光子对的效率, 同时实现了测量方式的快速切换, 使得两个光子的测量事件始终保持在类空间隔. Zeilinger 团队^[21] 利用 BBO(β -BaB₂O₄) 晶体, 通过自发参量下转换的方式生成纠缠光子对. 他们使用物理随机数生成器来控制测量方

式的选择,光子探测器的距离进一步增加至400 m,在更严格的意义上关闭了定域性漏洞。同时关闭定域性漏洞和探测效率漏洞又经历了数十年。2015年,三个国际团队做出了同时关闭两个漏洞的贝尔检验^[22~24], Zeilinger团队是其中之一。两年后, Zeilinger团队^[25]尝试关闭自由意志漏洞。Zeilinger团队也是首次做出了量子隐形传态实验^[26]和量子纠缠交换实验^[27]的团队。Aspect、Clauser和Zeilinger三位诺贝尔奖获得者在利用纠缠光子检验贝尔不等式方面作出了重要贡献,他们的实验证实了自然界的非定域性,并且开创了量子信息科学(<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/summary/>)。

回首百年,一个围绕“EPR佯谬”的哲学争论竟导致了如今量子信息科学与量子技术的发展(表1)。对单个量子系统的精密操控是一场人类文明的革命,利用量子纠缠交换、量子传态、量子擦除等方法,人们有望组建以量子计算机为节点、以量子通信为链路的量子网络^[28]。同时,量子传感技术的发展将有望实现对更加微弱信号的探测。在期待量子科技群星闪耀的美好前景时,量子力学基础问题的研究依然没有停下脚步:在发现量子力学与局域隐变量理论存在矛盾之前,贝尔^[29]曾发现量子力学与非互文隐变量理论也存在矛盾;Kochen和Specker^[30]构建出明确的观测测量来展示量子力学的互文性;Leggett^[31]指出有一大类的非定域隐变量理论与量子力学存在矛盾。如此等等,不一而足。时过境迁,EPR文章的引用已近万次——沉睡的美人已然苏醒,向世人展现她独有的魅力。贝尔1964年对EPR佯谬的深入思索导致了贝尔不等式与贝尔定理的诞生,贝尔定理被评论为“科学中最深刻的发现”^[32]。贝尔1990年逝世,1998年英国*Physics World*杂志专题报道了贝尔的生平及科学发现,评述说:“量子力学是所有时代里最成功的科学理论。许多伟大的名字与量子理论联系在一起。海森堡与薛定谔建立了理论的数学形式,爱因斯坦和玻尔分析了其许多重要的特性。尽管如此,还是贝尔对理论的考察最深刻,他建立的理论能够告诉我们物质世界最基础的本质”(<https://physicsworld.com/a/john-bell-profound-discovery-science/>)。由于贝尔的杰出贡献以及为了纪念贝尔,2009

表1 贝尔不等式相关理论、实验、应用年表

Table 1 Chronicle of theory, experiment, and application of the Bell inequalities

年份	贝尔不等式相关理论、实验、应用
1927	第五届索尔维会议,爱因斯坦-玻尔之争
1935	EPR佯谬 ^[2] ,玻尔 ^[4] 回应,薛定谔 ^[7] 回应
1946	惠勒 ^[9] 指出由正-负电子对湮灭产生的光子对偏振存在关联
1950	吴-Shaknov实验 ^[10] ,首次制备明确的、空间分离的量子纠缠态
1952	马德隆-德布罗意-玻姆非定域隐变量理论 ^[12~14]
1957	玻姆和阿哈罗诺夫 ^[11] 讨论EPR佯谬检验方案
1964	贝尔不等式 ^[15] ,定域隐变量理论与量子力学存在矛盾
1969	贝尔-Clauser-Horne-Shimony-Holt不等式 ^[16]
1972	Freedman-Clauser实验 ^[18] ,首次检验贝尔-Clauser-Horne-Shimony-Holt不等式
1975	Kasday-Ullman-吴实验 ^[19] ,利用高能光子检验贝尔-Clauser-Horne-Shimony-Holt不等式
1982	Aspect-Dalibard-Roger实验 ^[20] ,首次关闭定域性漏洞
1991	Ekert91量子密钥分发方案 ^[33]
1993	Bennett-Brassard-Cr�peau-Jozsa-Peres-Wootters量子隐形传态方案 ^[34]
1997	Zeilinger团队 ^[26] 实验,首次实现量子隐形传态
1998	Zeilinger团队 ^[27] 实验,首次实现量子纠缠交换
2007	Zeilinger团队 ^[35] 实验,演示Ekert91量子密钥分发方案
2009	学术界设立贝尔奖
2015	Hanson团队 ^[22] 实验、Zeilinger团队 ^[23] 实验和Nam团队 ^[24] 实验,同时关闭两种漏洞
2017	Zeilinger团队 ^[25] 实验,尝试关闭自由意志漏洞
2018	The BIG Bell Test团队 ^[36] 实验,尝试关闭自由意志漏洞
2022	Aspect、Clauser和Zeilinger获2022年度诺贝尔物理学奖

年学术界成立贝尔奖,用以表彰在量子力学基本问题及其应用研究方面作出突出贡献的科学家。2022年度诺贝尔物理学奖的颁发,一方面是对贝尔等量子前辈们工作重要性的认可,另一方面昭示着人们迈入了量子信息的新时代。

致谢 感谢国家自然科学基金(11875167, 11905209, 12275136)资助。

推荐阅读文献

- Holton G, Elkana Y. Albert Einstein, Historical and Cultural Perspectives. Princeton: Princeton University Press, 1982. 79
- Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys Rev*, 1935, 47: 777
- Einstein A, Rosen N. The particle problem in the general theory of relativity. *Phys Rev*, 1935, 48: 73–77
- Bohr N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys Rev*, 1935, 48: 696
- Cressey D. ‘Sleeping beauty’ papers slumber for decades. *Nature*, 2015, <https://doi.org/10.1038/nature.2015.17615>
- Maslow A. The Psychology of Science. New York: HarperCollins, 1966
- Schrödinger E. Discussion of probability relations between separated systems. *Math Proc Camb Phil Soc*, 1935, 31: 555–563
- Bell J S. Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1987

- 9 Wheeler J A. Polyelectrons. *Ann New York Acad Sci*, 1946, 48: 219–238
- 10 Wu C S, Shaknov I. The angular correlation of scattered annihilation radiation. *Phys Rev*, 1950, 77: 136
- 11 Bohm D, Aharonov Y. Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Phys Rev*, 1957, 108: 1070–1076
- 12 Bohm D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “Hidden” variables. I. *Phys Rev*, 1952, 85: 166–179
- 13 Madelung E. Quantentheorie in hydrodynamischer form. *Z Physik*, 1927, 40: 322–326
- 14 De Broglie L. Reports on the Solvay Congress. Paris: Gauthiers-Villars et Cie, 1928. 105
- 15 Bell J S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Phys Physique Fizika*, 1964, 1: 195–200
- 16 Clauser J F, Horne M A, Shimony A, et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys Rev Lett*, 1969, 23: 880–884
- 17 Pearle P M. Hidden-variable example based upon data rejection. *Phys Rev D*, 1970, 2: 1418–1425
- 18 Freedman S J, Clauser J F. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys Rev Lett*, 1972, 28: 938–941
- 19 Kasday L R, Ullman J D, Wu C S. Angular correlation of compton-scattered annihilation photons and hidden variables. *Nuov Cim B*, 1975, 25: 633–661
- 20 Aspect A, Dalibard J, Roger G. Experimental test of Bell’s inequalities using time- varying analyzers. *Phys Rev Lett*, 1982, 49: 1804–1807
- 21 Weihs G, Jennewein T, Simon C, et al. Violation of Bell’s inequality under strict Einstein locality conditions. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 5039–5043
- 22 Hensen B, Bernien H, Dréau A E, et al. Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*, 2015, 526: 682–686
- 23 Giustina M, Versteegh M A M, Wengerowsky S, et al. Significant-loophole-free test of Bell’s theorem with entangled photons. *Phys Rev Lett*, 2015, 115: 250401
- 24 Shalm L K, Meyer-Scott E, Christensen B G, et al. Strong loophole-free test of local realism. *Phys Rev Lett*, 2015, 115: 250402
- 25 Handsteiner J, Friedman A S, Rauch D, et al. Cosmic Bell test: Measurement settings from Milky Way stars. *Phys Rev Lett*, 2017, 118: 060401
- 26 Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, et al. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 1997, 390: 575–579
- 27 Pan J W, Bouwmeester D, Weinfurter H, et al. Experimental entanglement swapping: Entangling photons that never interacted. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 3891–3894
- 28 Kimble H J. The quantum internet. *Nature*, 2008, 453: 1023–1030
- 29 Bell J S. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev Mod Phys*, 1966, 38: 447–452
- 30 Kochen S, Specker E P. The problem of hidden variables in quantum mechanics. *J Math Mech*, 1967, 17: 59
- 31 Leggett A J. Nonlocal hidden-variable theories and quantum mechanics: An incompatibility theorem. *Found Phys*, 2003, 33: 1469–1493
- 32 Stapp H P. Bell’s theorem and world process. *Nuovo Cim B*, 1975, 29: 270–276
- 33 Ekert A K. Quantum cryptography based on Bell’s theorem. *Phys Rev Lett*, 1991, 67: 661–663
- 34 Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys Rev Lett*, 1993, 70: 1895–1899
- 35 Ursin R, Tiefenbacher F, Schmitt-Manderbach T, et al. Entanglement-based quantum communication over 144 km. *Nat Phys*, 2007, 3: 481–486
- 36 Abellan C, Acín A, Alarcon A, et al. Challenging local realism with human choices. *Nature*, 2018, 557: 212

Summary for “贝尔不等式——2022年度诺贝尔物理学奖解读”

The Bell inequalities: Commentary on the Nobel Prize in Physics 2022

Hong-Yi Su¹ & Jing-Ling Chen^{2*}

¹ College of Physics and Optoelectronic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China;

² Theoretical Physics Division, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin 300071, China

* Corresponding author, E-mail: chenjl@nankai.edu.cn

The Nobel Prize in Physics 2022 was awarded to three experiment physicists: Alain Aspect, John F. Clauser and Anton Zeilinger, for their contributions to “experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science”. In this paper, the history, basics, and applications related with the Bell inequalities are reviewed.

The discussion of fundamental issues on quantum mechanics dated back to the year 1927 when the fifth Solvay conference was held, highlighting intense arguments between Albert Einstein and Niels Bohr. At the time, Einstein expressed, publicly for the first time, his critical attitude towards quantum mechanics. While the arguments did not reach a decisive conclusion, Bohr’s probabilistic interpretation of quantum mechanics, the Copenhagen interpretation, had since been well circulated among the community.

Einstein’s arguments with Bohr lasted many years after the conference. The arguably most famous one was the Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) paradox, proposed in a 1935 paper written by the three authors. They stated, by flawless reasoning, that quantum mechanics is ‘incomplete’. Bohr replied immediately. So did Erwin Schrödinger, who, in particular, coined the term ‘entangled’ for the first time to describe the bizarre quantum mechanical property. Nevertheless, the EPR paper received few citations at its publication, until 1990’s when quantum information science started blossoming. From today’s perspective, the paper resembles the ‘sleeping beauty’ who slumbered for decades before fully awakening.

It has been widely accepted that it was John S. Bell who eventually resolved the EPR paradox. But many important figures before him should not go unnoticed, including John A. Wheeler, Chien-Shiung Wu, David Bohm, to name a few. In 1964, Bell wrote down a mathematical inequality which satisfies local hidden variable theory but which can be violated in quantum mechanics. The significance is that Bell’s inequality brings the rather philosophic debates on the EPR paradox down to be experimentally testable. Hence, an experiment is here appealing, as is the case in all fields of physics.

To the end, John F. Clauser, alongside Stuart J. Freedman, conducted an experiment in 1972 to test a Bell inequality, the Bell-Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) inequality, proposed by him and his collaborators in 1969. The results, however, leaves loopholes open. One of the loopholes was closed in a later experiment led by Alain Aspect in 1982. The Bell-CHSH inequality was later tested under a much stricter condition by Anton Zeilinger’s team. Two most important loopholes were both closed by three teams in 2015 independently. Zeilinger’s team was among them. Almost all experiments to date have confirmed quantum mechanical predictions. Zeilinger’s team also performed the first teleportation of unknown quantum states, the first entanglement swapping, along with other contributions pioneering the quantum information science.

In retrospect, the foundational study of quantum theory has been developed over a century. It once drew much of quantum physics founders’ attention, went virtually unnoticed while other physical fields advanced, had for quite a while been considered to have very weak relationship with major physics, and finally revived in recent decades leading to rapid progress in quantum information science and quantum technology. We believe that the Nobel Prize in Physics this year is not only an award and recognition to past achievements, but also heralds a new era of science in future.

Einstein-Podolsky-Rosen paradox, quantum entanglement, the Bell inequalities, the Nobel Prize in Physics

doi: [10.1360/TB-2022-1023](https://doi.org/10.1360/TB-2022-1023)