



透镜化引力波的散射问题及其应用

范锡龙

武汉大学物理科学与技术学院, 武汉 430072

E-mail: xilong.fan@whu.edu.cn

2020-09-15 收稿, 2020-12-13 修回, 2020-12-16 接受, 2020-12-21 网络版发表

国家自然科学基金(11673008, 11922303)和湖北省自然科学基金(2019CFA052)资助

摘要 引力波的直接探测开启了引力波天文学时代. 引力波传播路径中的大质量天体, 例如黑洞、星系、星系团会散射引力波, 发生引力透镜化引力波现象. 这种现象包含动态引力场(引力波)、静态引力场(透镜体)以及宇宙学信息. 透镜化引力波是引力波探测器重要科学目标之一. 本文介绍了利用测地线方程、透镜方程和波动方程研究透镜化引力波的定态散射问题, 回顾了利用透镜化引力波-电磁波系统研究引力波张量特性、干涉和衍射效应, 以及其在引力波速度、哈勃常数、宇宙曲率、透镜体质量和子结构等方面的应用.

关键词 引力波, 引力透镜, 衍射, 宇宙学

LIGO/Virgo(地面激光干涉仪引力波探测器)对引力波的直接探测^[1-7]验证了广义相对论的预言^[8], 开启了引力波天文学和多信使天文学的新篇章^[9]. 伴随着日本神冈引力波探测器KAGRA加入LIGO/Virgo联测, 以及未来第三代探测器(如爱因斯坦望远镜)的运行, 越来越多的有趣引力波信号将被探测到. 其中, 透镜化引力波信号携带了动态强引力场、静态弱引力场和宇宙学信息, 此类信号的直接探测必将加深我们对宇宙的理解.

在线性爱因斯坦方程的近似下, 引力波作为一个张量扰动, 其传播满足波动方程^[10]. 对于地面激光干涉仪探测到的引力波, 其波长 λ_{gw} 远小于哈勃半径 $1/H$, 因此, 引力波短波近似通常是满足的^[11]. 在宇宙背景中自由传播时, 引力波的振幅反比于光度距离^[12,13]. 在“局域引力场”(引力透镜)背景下, 会发生引力透镜现象^[14-18], 此时, 引力波的传播行为可以看作是一个散射问题.

一般情况下, 采取薄透镜假设(即引力波源和观测者都在无穷远处)研究定态问题, 即假定引力透镜不会改变引力波的频率. 因此, 我们不讨论极端质量比-旋

近双星问题^[19], 同时假定引力透镜背景也是稳定的, 忽略入射引力波对背景的反作用引起诸如黑洞准似正模式的效应^[20,21]. 透镜化引力波的振幅发生变化, 传播方向发生偏折^[22], 体现其张量特性的极化偏振面会发生转动^[16,23], 还可能产生法拉第旋转^[24-26]. 透镜化后, 不同引力波像的信号也会产生干涉^[27,28].

在积函近似(eikonal limit)下, 类似于光波变为用几何光学描述的光线, 引力波可以被认为是“引力波线”, 沿测地线传播. 在此“几何光学”的极限近似下, 引力波可以被当成引力子, 零质量的引力子在一个弯曲的时空背景中沿着类光测地线运动. 如果引力子有质量, 引力波的传播速度也不会是光速, 引力波会发生色散现象, 它沿类时测地线传播, 经过透镜时的偏折角也会发生变化^[29]. 强场或者超越广义相对论时空背景中光子和有质量粒子的轨道也被详细地研究, 如最近在透镜情况下的相关文献^[30,31]. 当引力透镜作为时空背景时, 光子/引力子的运动轨道可以由一个唯象的透镜方程描述(参见文献^[22,32]), 而不必使用测地线进行研究.

当引力波的波长与透镜尺寸相当时, 必须使用波

引用格式: 范锡龙. 透镜化引力波的散射问题及其应用. 科学通报, 2021, 66: 2516-2528

Fan X L. Lensed gravitational waves: Scattering and applications (in Chinese). Chin Sci Bull, 2021, 66: 2516-2528, doi: 10.1360/TB-2020-1170

动方程来处理衍射效应^[33]。当透镜是黑洞等强场背景时, 对于小角入射, 会产生光晕(glory)以及引力波泊松-阿拉贡斑的现象^[34]。关于引力波在黑洞等强场背景中的散射问题, 请参考文献^[35,36]及其中的文献。

透镜化引力波系统作为一个多信使工具, 在基础物理、宇宙学、天文学方面有着广泛的应用。最近, Oguri^[32]综述了引力透镜的应用。透镜化引力波信号的探测事件率与几个因素相关: 引力波源发生率(如致密双星并合率)、镜模型(透镜体质量分布)、引力透镜统计信息和引力波信号的探测率。致密双星并合率与恒星形成率模型相关, 是关于源的红移和质量的函数, 可以通过延迟时间分布的方法计算得到。透镜模型包含透镜体的质量、透镜天体三维结构参数、透镜天体的不对称性、透镜天体所处宇宙环境的引力场影响以及选择效应的影响等信息。引力透镜统计信息的主要参量为光深(某红移处, 给定信噪比, 引力波信号被透镜化的概率)。光深计算中涉及以下信息: 观测者与源之间共动体积的积分, 即透镜星系总数; 透镜星系速度弥散函数的积分; 投影的短长轴比的分布函数的积分; 剪切系数的分布函数的二维积分; 放大偏差效应, 即由引力透镜的放大效应引起的观测事件率的变化; 透镜截面。引力波信号的探测率与探测器噪声功率谱、探测器天线响应(源相对于探测器的位置方向)相关。

在第三代地面干涉仪探测器的背景下, 以爱因斯坦望远镜(Einstein Telescope, ET)为例, 一系列研究探索了通过ET观测引力透镜化的并合致密天体的前景, 相关研究分别使用了SIS透镜模型^[37-39]和更为真实的透镜模型^[40]。Piórkowska等人^[37]最初发现, 对于ET而言, 乐观估计是每年可以探测到几十起透镜化引力波事件, 最坏的情况是每10年才可以探测到1起透镜化的致密双星并合的引力波事件。Biesiada等人^[38]、Ding等人^[39]在此工作基础上, 使用StarTrack星族合成代码计算出来的致密双星并合率^[41], 发现ET可以每年探测到50~100起透镜化的致密双星并合事件。这些将由占总比率91%~95%的双黑洞并合事件所主导, 取决于考虑的演化场景的细节。进一步考虑透镜天体的不对称性、透镜天体所处宇宙环境以及选择效应对透镜化的恒星级双黑洞并合产生的引力波信号的影响, Li等人^[40]最终发现, 当使用Strolger等人^[42]的恒星形成率时, aLIGO可以探测到每年1起透镜化的引力波事件, ET可以探测到每年80起透镜化的引力波事件; 当使用Madau和Dickinson^[43]的恒星形成率时, aLIGO仍可以探测到

每年1起透镜化的引力波事件, 而ET可以探测到每年约40起透镜化的引力波事件。此外, 针对四重像系统在透镜化引力波信号中的比例, 发现对于aLIGO, 四重像比例将近30%; 对于ET, 四重像比例接近6%。此外, 针对LIGO探测器, Ng等人^[44]预测, 它可以探测到每年0.2起透镜化的双黑洞并合, 如果LIGO达到了设计灵敏度, 那么就会上升到每年大约14.2起。最近, Yang等人^[45]发现, 地球旋转会对透镜化引力波探测率的估计带来一定影响, 其中, 对双中子星系统影响最大, 为40%, 对双黑洞系统影响为10%, 因为双黑洞系统占总比率最高, 所以地球旋转对透镜化引力波事件总的影响约为10%。

未来, 激光干涉仪空间天线(Laser Interferometer Space Antenna, LISA)可能会探测到被星系强引力透镜化的大质量黑洞双星并合产生的引力波。针对LISA探测器, Sereno等人^[46]讨论了透镜化大质量黑洞双星并合发出的引力波的探测率问题, 发现最乐观的模型是在LISA的五年任务期内, 给定每一个像信噪比8的条件, 最多可以探测到4个多像事件。关于空间透镜化引力波的宇宙学应用, 可参见文献^[46,47]。针对空间decihertz探测器DECIGO, Piórkowska等人^[48]预测, 它可以每年探测到5~50起透镜化双中子星并合, 以及数百起透镜化双黑洞并合; 而对于它的小型版本B-DECIGO而言, 最乐观的估计是每年几起透镜化双黑洞并合。Hou等人^[49]研究了引力波干涉拍现象的事件率, 结果发现, DECIGO和B-DECIGO每年可以探测到几十到几百起透镜化引力波拍现象事件, 这取决于导致双致密星形成的演化场景。双黑洞是主要的透镜源, 在透镜源中拍频模式可以揭示出这一点。然而, DECIGO也可以记录来自双中子星的大量透镜信号, 这些信号可能伴随着电磁对应体。

本文将集中讨论笔者参与的引力透镜引力波方面的工作^[18,23,27,28,34,50-54]。引力透镜散射理论问题和引力透镜化引力波在基础物理、宇宙学、天文学方面的应用。

1 测地线方程

除本小节外, 接下来的所有讨论都针对零测地线, 即光子和引力波的速度都为 c 。

利用欧拉公式及光子的拉氏量, 可以得到测地线方程。因此, 只要给定背景度规, 就可以得到光子的轨道方程。例如, 在球对称的引力势中, 径向-角向方程为

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-1/2}, \quad (1)$$

其中, b 是碰撞参数(impact parameter), 由光子的角动量和能量决定: $b=L/E$.

在弱场近似下, $\frac{M}{r} \ll 1$, 光线的折射角为

$$\Delta\varphi = \frac{4M}{b}. \quad (2)$$

这个结果由爱因斯坦首次计算, 由爱丁顿于1919年通过日食现象检验. 到目前为止, 我们没有考虑宇宙学的影响, 即距离为欧几里得距离.

我们关心的许多天文透镜系统是在宇宙学尺度, 因此有必要讨论在宇宙背景度规下粒子的运动. 可以证明, 在宇宙学尺度上, 利用短波近似, 上述距离变为角直径距离^[22]. 图1展示了这个问题的几何构型.

因为引力波的波长远大于电磁波的波长, 有必要考虑式(1)对短波近似的修正(在 $\lambda_{\text{gw}}H$ 这一阶产生效应^[55-57]). 除了对距离的修正之外, 这项短波近似修正也受到宇宙随红移演化的影响. 最近, Hou等人^[50]给出了宇宙演化对引力波在宇宙距离上传播的短波近似修正. 此影响极其微弱, 对于未来的第三代地面探测器来说, 探测到引力波波形的整体修正(mismatch) 10^{-6} , 在下面的讨论中, 我们将忽略.

角直径距离是从光子的测地线运动出发定义的, 因此不适合于研究有质量粒子在宇宙学背景中的透镜系统. 通过薄透镜假设(透镜的尺寸远远小于源、透

镜、观测者之间的距离), 我们把有质量粒子在宇宙传播过程中经过引力透镜的问题分为两部分: 一个是求出在宇宙学背景下的径向运动, 另一个是透镜作为局域引力场下有质量粒子的折射角.

有质量 m_{GW} 的引力子沿着类时测地线运动. 考虑平直弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃尔克(Flat-FLRW)宇宙, 对于光子和有质量引力子, 引力波的径向传播距离 r_{GW} 和波源的共动距离 r_{γ} 之间的关系为

$$r_{\text{GW}} = r_{\gamma} - \Delta r_{\text{GW}}, \quad (3)$$

其中, Δr_{GW} 是宇宙学相关的函数. 式(3)表明, 如果发射和探测时刻固定, 那么引力波源比电磁波源近 Δr_{GW} ; 如果引力波源和电磁波源在同一位置同时发射, 那么引力波信号应该比电磁波信号晚到 $\Delta t_{\text{GW}} = \Delta r_{\text{GW}}/c$. 也就是说, 如果引力波源处于比 Δr_{GW} 更远的位置, 那么引力波信号传播时间将多出 Δt_{GW} .

利用有静止质量 μ 粒子在点质量 M 产生的引力势中轨道方程和偏折角的修正^[29], 有质量 m_{GW} 引力子的爱因斯坦半径为

$$\theta_{\text{E,GW}} = \theta_{\text{E}} \left(1 + \frac{m_{\text{GW}}^2 c^4}{2E^2} \right). \quad (4)$$

2 透镜方程

通过上一节的讨论, 原则上, 通过测地线方程就可以得到任何时空背景下粒子的轨道方程, 通过轨道方程就可以研究天文上的观测量, 例如恒星对于星光的

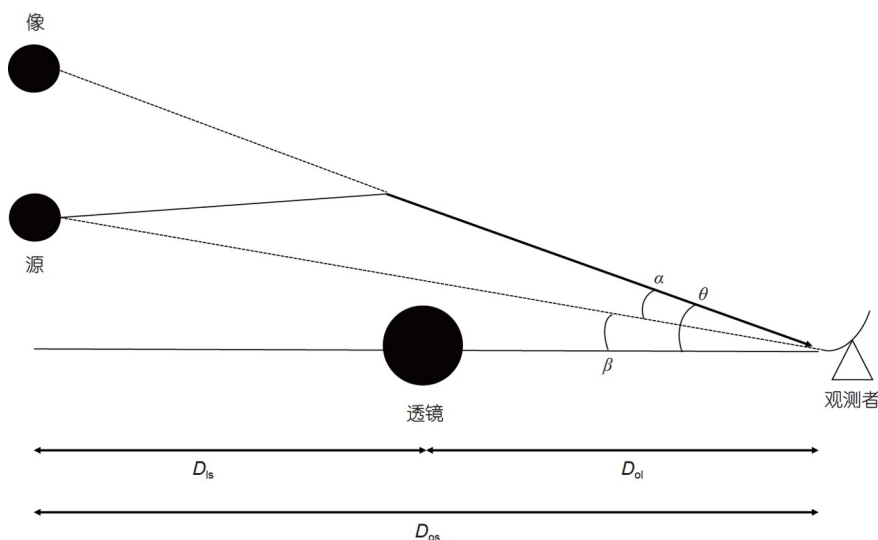


图1 引力透镜系统示意图
Figure 1 The schematic diagram of lensing system

偏折角(式(2)). 在天文应用上, 一个能联系源-透镜-观测者的位置, 并且包含源-透镜基本物理量(如透镜质量、源的亮度和形变)的方程更为实用. 在小折射角、弱场近似下, 通过线性化测地线方程, 可以得到一个唯一的透镜方程来描述上述物理量.

本文仅列举一些透镜方程相关的公式, 相关公式的推导和证明请参见文献[22]. 虽然透镜方程对于波传播路径采用了程函近似, 利用引力波相位稳定演化的特点, 类比于托马斯杨的双缝干涉, 仍然可以利用波的叠加性原理论其干涉行为(参见4小节). 在薄透镜近似下, 透镜方程是一个关于源、像的位置以及折射角的方程:

$$\beta = \theta - \alpha(\theta), \quad (5)$$

其中, β 和 θ 分别为描述天空中源和像的二维矢量, 折射角 α 由透镜质量在透镜平面的投影决定.

2.1 折射角

对于轴对称引力透镜, 透镜方程(式(5))变成一维方程:

$$\beta = \theta - \alpha(\theta), \quad (6)$$

其中, β 是源的视线方向与光轴的夹角. $\theta_E = \sqrt{4M \frac{D_{ls}}{D_{os}D_{ol}}}$ 是爱因斯坦角, D_{os} 、 D_{ol} 和 D_{ls} 分别是观测者-源、观测者-透镜和透镜-源的角直径距离. 当 $\beta \rightarrow 0$ 时, 像变为具有爱因斯坦半径 θ_{Ein} 的环:

$$\theta_{Ein} - \alpha(\theta_{Ein}) = 0. \quad (7)$$

2.2 透镜体质量

通过式(7), 可以得到爱因斯坦半径内的投影质量:

$$M(<\theta_{Ein}) = \pi D_{ol}^2 \theta_{Ein}^2 \sum_{cr}. \quad (8)$$

通过一定的透镜模型, 可以测量出强引力透镜的爱因斯坦半径. 如果再测量出源和透镜的红移, 根据宇宙学知识, 就可以知道角直径距离, 进而得到这个投影的透镜质量. 引力波不能成像, 因此爱因斯坦半径不能像电磁波引力透镜系统那样被测量出来, 必须通过别的方法推测出透镜的信息(参见6.4小节).

2.3 时间延迟

不同像的传播路径不一样, 因此传播时间也不一样. 与没有透镜相比, 每一个像的时间延迟为 Δt . 我们

只能观测到两个像(i 和 j)的到达时间延迟 $\Delta t_{ij} = \Delta t_i - \Delta t_j$:

$$\Delta t_{ij} = \frac{(1+z_l)}{c} \frac{D_{ol}(z_l)D_{os}(z_s)}{D_{ls}(z_l, z_s)} \Delta \phi_{ij}, \quad (9)$$

其中, 费马势的差 $\Delta \phi_{ij}$ 包含了透镜引力势 ψ 的信息, 因此可以用来研究透镜本身的性质(参见第6.3小节).

除局域的透镜引力势信息外, 时间延迟还与宇宙学信息有关. 给定宇宙学信息, 角直径距离是红移的确定函数, 式(9)中三个角直径距离的组合定义“时间延迟距离”($D_{\Delta t}$)为

$$D_{\Delta t} = \frac{D_{ol}(z_l)D_{os}(z_s)}{D_{ls}(z_l, z_s)}. \quad (10)$$

该时间延迟距离提供了一个距离-红移关系, 可以用来进行宇宙学研究(参见6.2小节).

2.4 光度放大率

通过粒子数守恒可知, 位于 θ 的像被放大了 $k(\theta)$ 倍. 光度放大率为

$$k(\theta) = \frac{1}{\det A(\theta)}, \quad (11)$$

其中, 雅可比矩阵 $A(\theta)$ 由透镜方程决定:

$$A(\theta) = \frac{\partial \beta}{\partial \theta}. \quad (12)$$

2.5 奇点

在某些情况下(如正入射 $\beta=0$), 雅可比矩阵(式(12))的行列式 $\det A(\theta)=0$, 这就意味着式(11)会出现发散的结果, 放大率 $k(\theta)$ 变为无穷大. 这些满足 $\det A(\theta)=0$ 的点在像平面上构成临界曲线(“critical curves”), 通过透镜公式(5), 可以得到其对应源平面的焦散曲线(“caustics”). 出现这类问题是因为我们到目前为止仅仅利用了几何光学来描述波的传播. 要想解决这类问题, 就需要用波动方程来描述这类物理系统. 我们将在3小节讨论引力波的波动方程.

2.6 引力透镜模型

最简单的引力透镜模型是质量为 M 的牛顿引力势点模型, 对应的透镜方程^[22]为

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right), \quad (13)$$

其中, 爱因斯坦半径 $\theta_E = \sqrt{4M \frac{D_{ls}}{D_{ol}D_{os}}}$ 由透镜质量及系

统的相对位置确定. 系统成两类像, 其振幅放大率分别为

$$\mu_{\pm} = \sqrt{|k_{\pm}|} = \frac{|\theta_{\pm}|}{\sqrt{|\theta_{\pm}^2 - \theta_{\pm}^2|}}, \quad (14)$$

两个像的时间延迟为

$$\Delta t = 4M(1+z_1) \left(\frac{\theta_+^2 - \theta_-^2}{2\theta_{\pm}^2} + \ln \frac{\theta_+}{\theta_-} \right). \quad (15)$$

更接近真实早型星系情况的是等温奇异球模型. 这个模型的透镜方程为

$$\theta_{\pm} = \beta \pm \theta_E, \quad (16)$$

其中, 爱因斯坦半径 $\theta_E = \frac{4\pi\sigma_v^2 D_{ls}}{D_{os}}$ 由星系的视向速度弥散 σ_v 确定. 其振幅放大率为

$$\mu_{\pm} = \sqrt{|k_{\pm}|} = \sqrt{\left| \frac{\theta_{\pm}/\theta_E}{|\theta_{\pm}/\theta_E| - 1} \right|}, \quad (17)$$

时间延迟公式(9)变为

$$\Delta t_{\text{SIS}} = \frac{1+z_1}{2c} \frac{D_l D_s}{D_{ls}} (g_+^2 - g_-^2), \quad (18)$$

带入爱因斯坦半径, 时间延迟还可以写为

$$\Delta t_{\text{SIS}} = 16\pi^2 \sigma_v^4 (1+z_1) \frac{D_l D_s}{D_s} \frac{\theta_+ + \theta_-}{\theta_E}. \quad (19)$$

3 引力波振幅的波动方程

在弱场近似下, 度规可以写成

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(B)} + h_{\mu\nu}, \quad (20)$$

其中, $g_{\mu\nu}^{(B)}$ 为背景度规, $h_{\mu\nu}$ 为引力波扰动. 在一阶近似下, 极化张量 $e_{\mu\nu}$ 沿着零测地线平行移动(参见6小节), 研究可以作为标量场的引力波振幅 ϕ 经过透镜的波动效应:

$$h_{\mu\nu} = \phi e_{\mu\nu}, \quad (21)$$

其中, 标量场 ϕ 的传播方程为

$$\partial_{\mu} \left(\sqrt{-g^{(L)}} g_{\mu\nu}^{(L)} \partial_{\nu} \phi \right) = 0, \quad (22)$$

这里, g 是 $g_{\mu\nu}$ 的行列式. 类似于费马原理对于光子传播路径方程的导出, 上述方程也可以从最小作用量原理推导出.

接下来, 我们考虑频率为 f 的引力波振幅 $\phi(x, t) = \tilde{\phi}(x) e^{-2\pi i f t}$ 在薄透镜引力场中的传播问题(定态问题).

3.1 弱背景场

在弱场背景近似下, 频域中近单频标量波 $\tilde{\phi}(f, r)$ ($f \ll 1$) 的波动方程(式(22))变为亥姆霍兹方程. 透镜化的引力波振幅 $\tilde{\phi}$ 由 Nakamura 和 Deguchi^[33] 通过路径积分方法得到的基尔霍夫衍射积分公式给出:

$$\tilde{\phi}^L(f) = F(f) \tilde{\phi}(f), \quad (23)$$

其中, $F(f)$ 是无量纲放大系数, 由透镜模型确定; $\tilde{\phi}^L$ 和 $\tilde{\phi}$ 分别是透镜化和未透镜化的标量波振幅.

根据费马原理, 在几何光学近似下, $f \rightarrow \infty$ 时:

$$|F(f, \beta)|^2 \approx \sum_j \left| \chi(\theta_j) \right| + 2 \sum_{j < k} \left| \chi(\theta_j) \chi(\theta_k) \right|^{1/2} \cos \left[\omega \Phi(\theta_j, \theta_k) - \pi \Delta n_{jk} \right], \quad (24)$$

其中, $\Phi(\theta_j, \theta_k)$ 是爱因斯坦半径和像位置的函数; $\chi(\theta)$ 为光度放大率(式(11)), 注意, 此光度放大率为振幅放大率(如式(14)和(17))的平方; $\Delta n_{jk} = n_j - n_k$, $n_j = 0, 1/2$ 和 1 , 分别对应费马原理决定的最小点、鞍点和最大点的情况(对于两个像, $n_+ = 0$, $n_- = 1/2$). 式(24)的第一项就是简单的几何光学像的叠加, 第二项体现了波动性, 即几个像的衍射效果. 对于电磁波信号, 频率很高, $f \rightarrow \infty$, 第二项振荡得十分迅速, 一个有限大小的天体源就可以抹掉这个干涉效果. 对于引力波, 这一项的效果十分明显(参见4小节).

在点质量的情况下, 衍射积分公式具有解析解^[58,59], 正入射 $\beta=0$ 时, 放大率取最大值:

$$|F(f, \beta=0)|^2 = \frac{\pi\omega}{1 - e^{-\pi\omega}}. \quad (25)$$

当 $\omega \rightarrow 0$ (长波近似) 时, $|F(f, \beta=0)|^2 \rightarrow 1$. 这正体现了波的衍射效应: 任何尺寸远小于波长的遮挡物都不会对波的传播造成任何影响.

值得一提的是, 这个点质量模型在 $\beta=0$ 时不一定适合天文源, 因为天体有边界(或者黑洞的视界). 基尔霍夫积分对此边界条件的缺陷, 使得上述结论直接推广到恒星系统的实用性有待验证. 另外, 致密星(如中子星、黑洞)很明显不能用弱场描述, 因此不能用于检验广义相对论(如中子星质量-半径关系, 是否存在黑洞的近亲). 好处是, 处理有边界条件的波动方程问题时, 可以使用更一般的分波法.

3.2 强背景场

处理波动方程更一般的方法是分波法. 可以把标量波写成傅里叶分解的形式解:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{-i\omega t} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\phi}_{lm}(\omega, r), \quad (26)$$

其中, Y_l^m 是球谐函数. 在程函近似下, 碰撞参数 b 为

$$b = \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\omega}, \quad (27)$$

因此, 每一分波可以看作距离对称轴 b 的入射. 通常, 级数展开解(公式(26))对于 $1/r$ 场(如引力场)来说是发散的, 必须采取截断近似来处理一些有趣的问题, 比如 glory 现象.

标量波的径向解 $\hat{\phi}_l(\omega, r)$ 满足薛定谔类型方程. 具体地, 径向方程是一个合流赫伦方程(confluent Heun equation), 具有24个独立的解析解. 设定边界条件可以确定解的具体形式. 合流赫伦方程的复杂性不利于天文学讨论, Zhang等人^[34]使用WKB近似以及菲涅耳半波法(Fresnel half wave zone method)得到了夫琅和费衍射($r \gg \lambda$)的公式, 成功地处理了正入射黑洞的泊松斑($\theta=0$)问题.

$$\begin{aligned} h &= \mu_+ [A^+ \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A^\times \sin(\omega_1 t + \phi_1)] + \mu_- [A^+ \cos(\omega_2 t + \phi_2) + A^\times \sin(\omega_2 t + \phi_2)] \\ &= \mu_s \left[A^+ \cos(\omega_f t + \phi_f) \cos(\omega_b t + \phi_b) + A^\times \cos\left(\omega_f t + \phi_f - \frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega_b t + \phi_b) \right] \\ &\quad + \mu_d \left[A^+ \cos\left(\omega_f t + \phi_f + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega_b t + \phi_b - \frac{\pi}{2}\right) + A^\times \cos(\omega_f t + \phi_f) \cos\left(\omega_b t + \phi_b - \frac{\pi}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $A^{+/\times}$ 为探测到的引力波振幅, $\mu_s = \mu_+ + \mu_-$, $\mu_d = \mu_+ - \mu_-$. 这里, 假定两个像的探测器响应函数相同, 具体的透镜效应的修正参见6.1.3小节.

非常容易验证式(29)中时域信号与波动方程给出的几何近似(式(24))频域信号是一致的. 两个像总的频域信号振幅为

$$|\tilde{h}(f)| = \sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2 + 2\mu_+ \mu_- \cos(2\pi f \Delta t)} |\tilde{h}_u(f)|, \quad (30)$$

其中, $\tilde{h}_u(f)$ 是未被透镜化的波形的傅里叶变换. 可以看到, 与光学信号相同, 透镜化引力波信号的振幅被放大了 $\mu_\pm$ 倍(光学信号的测量量是光度而不是振幅, 所以通常说光学(像)信号被放大了 $\mu_\pm^2$ 倍). 引力波源的距离是通过振幅来确定的, 因此, 如果不考虑透镜放大效应, 将会低估引力波源的光度距离. 式(29)为我们提供了一

4 引力透镜化引力波的干涉现象

通常, 恒星发出的光子的频率和相位杂乱无章, 没有相干性. 旋近双星引力波的相位随时间的变化是确定的. 如果到达地球探测器的时间延迟不大, 引力透镜化引力波的两个像会产生叠加, 产生类似双峰干涉的现象. 两列波频率相差不大, 在时域上还会出现“拍”的现象^[27,28].

设 ω_1 和 ω_2 分别为两个引力波信号到达探测器的角频率, ϕ_1 和 ϕ_2 为它们的初始相位及其相对值:

$$\begin{aligned} \omega_f &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \phi_f = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \\ \omega_b &= \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \phi_b = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

对于恒星级质量的透镜, 时间延迟 Δt 很小, 因此 $\omega_1 \simeq \omega_2$. 时域信号可以形成拍频为 ω_b 的“拍”现象. 随着时间的演化, ω_f 变大, $\omega_b / \omega_f \propto \omega_f^{-8/3}$ 变大, 最终“拍”现象消失. 图2展示了一个点质量透镜系统的上述行为.

如果两个像引力波信号可以同时到达探测器, $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ 可以表示为

个同时测量放大率和双星系统参数的机会.

5 透镜引力波极化张量的旋转

前文我们仅仅讨论了引力波振幅(如式(21)中的 ϕ)受引力透镜的影响, 忽略了极化张量 $e_{\mu\nu}$ 的变化. 激光干涉仪引力波探测器的响应为张量响应 $h = D^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, 因此, 讨论透镜化极化张量 $e_{\mu\nu}$ 的变化是有必要的. 忽略具体的推导过程, 系统的示意图见图3, 展示了在几何光学中, 牛顿弱场近似下透镜化 $e_{\mu\nu}$ 平面的旋转效应. 此示意图也忽略了引力波法拉第旋转效应^[23]. 图中S为双星系统位置, O为引力波干涉仪, L为引力透镜. 粗点线为光轴. 方框从左到右依次为观测者、透镜、源平面. β 为O到S方向与光轴的夹角. 两束引力波1和2从分别在 $\vec{l}_1$ 和 $\vec{l}_2$ 方向有光源发出. 通过透镜后, 它们的传播方向变为

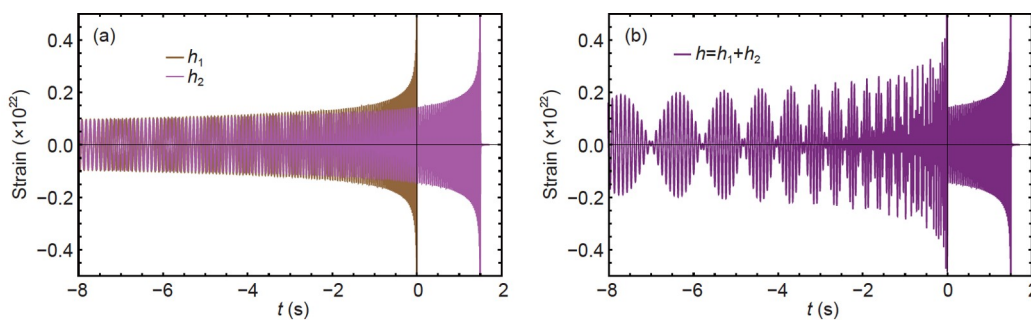


图 2 (网络版彩色)引力波时域“拍”现象的示意图. (a) 两列波的时域信号; (b) 两列波的时域信号叠加

Figure 2 (Color online) The schematic diagrams showing the strains and the beat pattern in the time domain. (a) Two strains in time domain; (b) superposition of two strains in time domain

$\vec{l}_1$ 和 $\vec{l}_2$, 分别与光轴形成角度 $\theta_{\pm}$. 对应的折射角分别为 α_1 和 α_2 .

6 透镜化引力波的应用

6.1 基础物理

6.1.1 引力波速度

检测引力波速度的传统方法是观察引力波信号和电磁对应体信号之间的时间延迟. 然而, 这种方法中不确定的因素在于, 我们不知道电磁信号和引力波信号发射的时间是否一致. 透镜引力波系统中(如透镜化双中子星并合引力波), 多个电磁信号或多个引力波信号的时间延迟是绝对的, 比较它们可以巧妙地绕过固有发射时间不确定问题, 从而准确地对引力波传播速度进行检验^[51]. 如果能精确地分别测量引力波时间延迟 Δt_{GW} 、电磁波时间延迟 Δt_{γ} , 发现两者不同, 引力波速度不为光速, 就需要修改广义相对论.

在许多修改引力的理论中, 引力波速度 v_{GW} 不为光速 c 可以理解为有质量的引力子 m_{GW} 沿着类时测地线运动(参见1.1小节). 具体地, 利用平直FLRW宇宙中、薄透镜假设下, 等温奇异球透镜模型中有质量粒子在透镜中的偏折角公式(4)(忽略地球、银河系等其他局域引力场的影响), 以及有质量粒子在宇宙中的传播共动距离公式(3)(忽略本动速度), 得到透镜化电磁波与有质量引力子时间延迟的区别为

$$\Delta t_{\text{SIS,GW}} - \Delta t_{\text{SIS},\gamma} = \Delta t_{\text{SIS},\gamma} \frac{m_{\text{GW}}^2 c^4}{E^2} F_{\text{lens}}(z_1, z_s), \quad (31)$$

其中, $F_{\text{lens}}(z_1, z_s) \sim O(1)$ 依赖于宇宙学背景和透镜模型.

利用引力子的色散关系:

$$\frac{m_{\text{GW}}^2 c^4}{E^2} = 1 - \left(\frac{v_{\text{GW}}}{c} \right)^2, \quad (32)$$

引力波速度通过式(33)来限制:

$$1 - \left(\frac{v_{\text{GW}}}{c} \right)^2 \leq \frac{\delta T}{\Delta t_{\gamma} F_{\text{lens}}(z_1, z_s)}, \quad (33)$$

其中, δT 是时间延迟测量精度, 对于强引力透镜的引力波-电磁波系统, 其大小由电磁波测量时间延迟的精度决定.

6.1.2 引力波弱场衍射振幅

引力波的衍射信号还没有被探测到, 因此, 探测引力波弱场衍射振幅是一个非常有趣的课题. 我们提出, 利用银河系内微引力透镜时间, 观测(近似)单频引力波的衍射信号, 以验证引力波弱场近似下的衍射振幅^[18]. 具体地, 利用引力透镜系统的相对运动, 可以实现对衍射图样的探测. 透镜系统相对于宇宙微波背景本动运动的观测者速度 v_{obs} 、透镜速度 v_l 以及源速度 v_s 可以组成一个源的有效速度^[60]:

$$v_{\text{eff}} = v_s - \frac{1+z_s}{1+z_l} \frac{D_s}{D_l} v_l + \frac{1+z_s}{1+z_l} \frac{D_{ls}}{D_l} v_{\text{obs}}, \quad (34)$$

假定 $v_{\text{eff}} \ll c$. 利用此有效速度, 爱因斯坦半径穿越时间 $t_E = \frac{R_E}{v_{\text{eff}}}$ 给出了观测衍射图样的时间尺度. 我们期望这种调制可以和地球自转及公转的调制区别开. 具体信号探测方法的相关研究正在进行中.

6.1.3 引力波的张量性

根据系统示意^{图3}及其背后的数学关系, 可以看到, 透镜化的两列引力波(h_1 和 h_2)的不同来自三部分: 第一部分来自时间延迟 Δt 引起的相位差, 以及传播方向不同

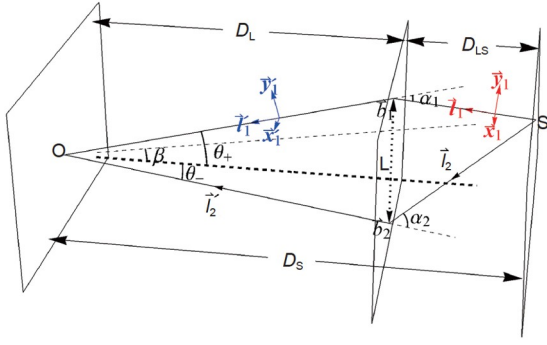


图3 (网络版彩色)施瓦西透镜系统的几何构型
Figure 3 (Color online) Geometry of a Schwarzschild lens

引起的相位差;第二部分来自放大率($\mu_{\pm}$)的区别;第三部分来自极化平面旋转带来的影响.原则上,如果引力波信号足够强,仅仅利用引力波信号,通过匹配滤波法,可以探测到极化平面旋转的效应以及得到放大率等透镜系统的信息.一般来说,两束引力波传播方向的区别很小,因此在讨论引力波干涉效应及其应用时(参见6.4小节),我们忽略此极化平面旋转的效应.

6.2 宇宙学

6.2.1 哈勃常数

在FLRW度规中,角直径距离^[61]为

$$D(z) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k} H_0 (1+z)} \times \sinh \left[\sqrt{\Omega_k} \int_{1/z}^1 \frac{x}{\sqrt{\Omega_r + \Omega_m x + \Omega_k x^2 + \Omega_\Lambda x^4}} dx \right], \quad (35)$$

其中, H_0 是哈勃常数, Ω_r 、 Ω_m 、 Ω_k 、 Ω_Λ 分别是辐射、物质、空间曲率以及暗能量的密度参数.因此,时间延迟距离 $D_{\Delta t}$ (式(10))可以用来限制宇宙学参数,特别是哈勃常数 H_0 ^[53,62].因为时间延迟距离反比于哈勃常数 H_0 ,所以相对于其他宇宙学参数,它对哈勃常数的数值更敏感.利用引力透镜时间延迟公式(9),可以通过强引力透镜化引力波-电磁波系统测量哈勃常数.

透镜、源的红移通常容易获得.除此之外,还需要观测的量有两个:一是分裂信号之间的时间延迟,二是透镜体的费马势.常规方法是利用类星体-椭圆星系系统.时间延迟由AGN的光变曲线得到,精确度为~3%.费马势由高精度的光弧观测得到,精确度也为~3%.对于透镜引力波系统,引力波信号为瞬变源,相对于信号之间的时间延迟(几天至几十天)而言,其误差可以完全

忽略,因此时间延迟可以测量得非常精确.另一方面,不同于AGN会污染光弧,双中子星的电磁对应体如千新星,持续时间最多几个月.我们可以在其爆发前后测量到完整的寄主星系光弧,从而有效地测量费马势.这两方面的提高使得透镜引力波可以非常精确地测量哈勃常数^[53].

通过数值模拟数据,我们发现,基于第三代引力波探测器(如爱因斯坦望远镜)的灵敏度,在平直 Λ CDM模型中,使用10个强引力透镜化引力波-电磁波系统,我们对哈勃常数的限制精确度在0.7%以内.

6.2.2 宇宙几何

一个均匀、各向同性的宇宙用FLRW度规描述.因此,通过检验FLRW度规的可靠程度,可以得到宇宙的几何结构信息.已经有很多传统方法可以用来检验FLRW度规,例如,Clarkson等人^[63]提出的利用宇宙膨胀速率与宇宙距离的关系,Räsänen等人^[64]提出的利用本动距离与角直径距离的关系,Räsänen等人^[65]提出的利用距离求和法则(Distance Sum Rule).基于距离求和法则,利用独立的超新星数据和透镜化活动星系核系统,更多的宇宙学参数可以被限制^[65,66].

透镜化引力波-电磁波系统提供了一个利用距离求和法则获得宇宙几何信息的新系统.利用距离求和法则,时间延迟距离可以写为^[52,66]

$$D_{\Delta t} = \frac{c}{H_0(1+z_l)(T(z_l) - T(z_s))}, \quad (36)$$

其中,

$$T(z) = \frac{1}{d(z)} \sqrt{1 - kd(z)^2}, \quad (37)$$

k 是宇宙曲率(cosmic curvature), $d(z)$ 是共动距离.在均匀、各向同性的宇宙中,FLRW度规为

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{a(t)^2}{(1 - Kr^2)} dr^2 + a(t)^2 r^2 d\Omega^2, \quad (38)$$

其中,宇宙曲率为 $k = K/(H_0)^2 = -\Omega_k$, Ω_k 和 H_0 分别为空间曲率密度参数和哈勃常数.因此,只要能获得共动距离 $d(z)$ 以及时间延迟距离 $D_{\Delta t}$,就可以通过式(36)限制宇宙曲率 k ,得到宇宙几何信息.可以构建一个参数化近似共动距离 $d(z)$ 函数,使用数据同时限制此函数的参数:

$$d(z) = z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + a_3 z^4. \quad (39)$$

此参数化共动距离 $d(z)$ 的形式应该是与系统无关的,应该用不同的数据来确保函数形式的可靠程度.因此,可

以联合一组超新星数据 $\{D_L, z\}$ 来增强对参数 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 限制的可靠性, 去掉系统误差。

时间延迟距离 $D_{\Delta t}$ 可以利用透镜化引力波-电磁波系统测量获得。式(9)给出了时间延迟 Δt_{ij} 与时间延迟距离 $D_{\Delta t}$ 和透镜体费马势的差 $\Delta\phi_{ij}$ 的关系。原则上^[52], 透镜化引力波提供时间延迟 Δt_{ij} 信息, 其电磁对应体或其宿主星系提供源的红移信息 z_s , 透镜星系提供费马势 $\Delta\phi_{ij}$ 和 z_l , 就可以利用时间延迟公式(9)得到 $D_{\Delta t}$, 进而通过式(36)限制参数 $\{a_1, a_2, a_3, H_0, k\}$ 。

通过数值模拟数据, 我们发现^[52], 基于第三代引力波探测器(如爱因斯坦望远镜)的灵敏度, 利用上述多信使系统对宇宙学参数进行了限制, 其限制能力比传统电磁透镜系统更好。具体来说, 10个强引力透镜化的引力波-电磁波系统可以将宇宙学曲率参数限制为 $k = 0.01^{+0.05}_{-0.05}$, 哈勃常数限制为 $H_0 = 69.7^{+0.35}_{-0.35}$ 。

6.3 天文学: 透镜体的子结构

到目前为止, 我们关于费马势的差 $\Delta\phi_{ij}$ 的讨论是基于透镜的引力势 ϕ 为光滑的假定。我们知道, 星系暗物质晕有子结构。冷暗物质模型在星系尺度上存在一些问题。其中, “卫星缺失疑难”指的是, 按照模拟, 银河系这样的星系中应该有数以万计的暗物质子晕(子结构), 并且以矮星系的形式存在。然而, 实际观测中才发现了十几个矮星系。在宇宙学尺度上进一步探测暗物质子结构尤为重要。

这些未知的子结构分布会影响透镜费马势的差 $\Delta\phi_{ij}$, 进而影响时间延迟。于是, 原则上, 可以通过强引力透镜系统的时间延迟研究暗物质子结构。通常提出的手段为观测AGN多像的异常, 包括流量比、位置和时间延迟。对于时间延迟异常, 由于AGN测量的精度受限, 在实际应用中几乎无法实现。

引力波对时间的测量精度非常高, 可以很好地探测时间延迟异常, 再利用引力波和电磁波不同波长对子结构响应的不同, 就可以更准确地研究透镜星系暗物质子结构^[54]。通过数值模拟, 我们发现, 基于第三代引力波探测器(如爱因斯坦望远镜)的灵敏度, 利用强引力透镜多信使系统, 可以把透镜星系暗物质子结构对费马势的影响限制在测量精度10%。

6.4 透镜化引力波干涉效应的应用

以上透镜化引力波-电磁波系统的应用都只利用了

引力波对于到达时间测量的信息, 并且依赖透镜化电磁波的测量信息(如光学成像对于费马势的重构)。如5小节所讨论, 通过匹配滤波技术, 地面激光干涉仪引力波探测器可以获取引力波相位的信息。利用这些信息, 可以摆脱对透镜化电磁波的依赖^[28]。这对利用透镜化双黑洞并合引力波研究科学问题起到至关重要的作用。

引力波频率和相位随时间变化, 特别是双星引力波, 信号有一个明显的并合截止过程。利用引力透镜化的引力波干涉时域信号(式(29)), 原则上不依赖于电磁波信号, 我们有两种方法测量时间延迟 Δt 。一种方法是直接测量透镜化两个像的截止时间延迟, 另一种方法是绕转前期通过“拍”频 ω_b 、引力波频率 ω_t 的测量, 以及单独部分第二列信号给出的 M 得到。无论哪种方法, 时间延迟 Δt 的测量精度都会小于 ~ 0.1 s, 相比于其他物理量的测量误差, 在大部分情况下, 其误差几乎可以忽略不计。

另一方面, 原则上, 利用匹配滤波法, 根据式(29), 可以测量 μ_s/μ_d 。如果 μ_d 太小以致不能测到, 依然可以通过测量第一列波 h_1 结束后的第二列波 h_2 那部分与前半段 h_1+h_2 的比值, 得到 μ_s/μ_- 。因此, 两个像的相对放大率 $r_{\pm} \equiv \mu_+/\mu_-$ 可以得到:

$$\frac{\mu_+}{\mu_-} = \frac{1 + \mu_s/\mu_d}{1 - \mu_s/\mu_d} = \frac{\mu_s}{\mu_-} - 1. \quad (40)$$

对于点质量模型, 通过式(14)可知, $r_{\pm} \equiv \mu_+/\mu_- = \theta_+/\theta_-$ 。把测量得到的 $r_{\pm}$ 带回式(14), 可以获得真正的放大率:

$$\mu_+ = \frac{1}{\sqrt{|1 - r_{\pm}^{-2}|}}, \mu_- = \frac{1}{\sqrt{|r_{\pm}^2 - 1|}}. \quad (41)$$

有了放大率, 通过引力波的振幅信息, 就可以获得引力波源的真实光度距离。更进一步, 通过式(13)和(14), 利用测量得到的 $r_{\pm}$, 可以得到 β/θ_E 。再通过式(13)和(15), 可以得到红移化的透镜质量:

$$M(1+z_l) = \frac{\Delta t}{4} \left[\frac{1}{2} \left| r_{\pm} - \frac{1}{r_{\pm}} \right| + \ln(-r_{\pm}) \right]^{-1}. \quad (42)$$

因此, 只要锁定点质量透镜所在星系, 获得透镜红移, 就能推算出透镜的质量。

对于等温奇异球模型, 由式(16)可得:

$$\frac{\theta_+}{\theta_E} - \frac{\theta_-}{\theta_E} = 2.$$

利用通过式(40)测量得到的 $r_{\pm} \equiv \mu_+/\mu_-$, 有:

$$\frac{\theta_+}{\theta_E} = \frac{2r_{\pm}^2}{r_{\pm}^2 + 1}, \frac{\theta_-}{\theta_E} = \frac{-2}{r_{\pm}^2 + 1}. \quad (43)$$

带回式(17),可以得到真实的放大率:

$$\mu_+ = \sqrt{\frac{2r_+^2}{r_+^2-1}}, \mu_- = \sqrt{\frac{2}{r_+^2-1}}. \quad (44)$$

因此,也可以获得引力波源的真实光度距离. 同样,如果透镜星系被确定,通过式(19),也可以获得时间延迟距离 $D_{\Delta t}$:

$$D_{\Delta t} = \frac{\Delta t}{32\pi^2\sigma_v^2(1+z_1)} \frac{r_+^2+1}{r_+^2-1}. \quad (45)$$

与引力透镜电磁波系统相比,利用透镜化引力波形成的“拍”,不需要测量透镜的费马势.

利用强引力透镜化引力波的衍射积分公式(24),也

可以获得一些诸如放大率、透镜质量等有用的信息^[27].

7 展望

透镜化引力波作为不久的将来能被探测到的新型引力波信号必将加深我们对宇宙的理解. 除了本文介绍的理论框架和应用之外,含时透镜散射问题、超越广义相对论框架下的透镜理论研究以及透镜化引力波-电磁波全新的应用等方面的问题都在逐步开展. 另外,为了检验理论预言,开创引力波天文学的新篇章,透镜化引力波-电磁波联合数据处理技术等实际操作层面的问题也需要进一步探索和完善.

致谢 感谢武汉大学侯绍齐、武汉理工大学廖恺、国家天文台李玉丰和济南大学张宏升对本文草稿的阅读以及给出的宝贵意见.

参考文献

- Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 061102
- Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. GW151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 241103
- Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. GW170104: Observation of a 50-solar-mass binary black hole coalescence at redshift 0.2. *Phys Rev Lett*, 2017, 118: 221101
- Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. GW170814: A three-detector observation of gravitational waves from a binary black hole coalescence. *Phys Rev Lett*, 2017, 119: 141101
- Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys Rev Lett*, 2017, 119: 161101
- Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. GW170608: Observation of a 19 solar-mass binary black hole coalescence. *Astrophys J*, 2017, 851: L35
- Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. GWTC-1: A gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by LIGO and Virgo during the first and second observing runs. *Phys Rev X*, 2019, 9: 031040
- Einstein A. Über Gravitationswellen. Berlin: Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1918. 154–167
- Fan X L. Bayesian approach to gravitational wave multi-messenger astronomy (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2018, 48: 079804 [范锡龙. 贝叶斯引力波多信使天文学. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 079804]
- Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A. Gravitation. San Francisco: W H Freeman and Company Limited, 1973
- Caprini C, Figueroa D G. Cosmological backgrounds of gravitational waves. *Class Quantum Grav*, 2018, 35: 163001
- Isaacson R A. Gravitational radiation in the limit of high frequency. I. The linear approximation and geometrical optics. *Phys Rev*, 1968, 166: 1263–1271
- Maggiore M. Gravitational Waves. Vol 1: Theory and Experiments. Oxford: Oxford University Press, 2007
- Lawrence J K. Focusing of gravitational radiation by interior gravitational fields. *Nuov Cim B*, 1971, 6: 225–235
- Lawrence J K. Focusing of gravitational radiation by the galactic core. *Phys Rev D*, 1971, 3: 3239–3240
- Ohanian H C. On the focusing of gravitational radiation. *Int J Theor Phys*, 1974, 9: 425–437
- Takahashi R, Nakamura T. Wave effects in the gravitational lensing of gravitational waves from chirping binaries. *Astrophys J*, 2003, 595: 1039–1051
- Liao K, Biesiada M, Fan X L. The wave nature of continuous gravitational waves from microlensing. *Astrophys J*, 2019, 875: 139
- Chen X, Han W B. Extreme-mass-ratio inspirals produced by tidal capture of binary black holes. *Commun Phys*, 2018, 1: 53
- Kokkotas K D, Schmidt B G. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Rev Relativ*, 1999, 2: 2

- 21 Berti E, Cardoso V, Starinets A O. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Class Quantum Grav*, 2009, 26: 163001
- 22 Schneider P, Ehlers J, Falco E E. Gravitational Lenses. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992
- 23 Hou S, Fan X L, Zhu Z H. Gravitational lensing of gravitational waves: Rotation of polarization plane. *Phys Rev D*, 2019, 100: 064028
- 24 Piran T, Safier P N. A gravitational analogue of faraday rotation. *Nature*, 1985, 318: 271–273
- 25 Piran T, Safier P N, Stark R F. general numerical solution of cylindrical gravitational Waves. *Phys Rev D*, 1985, 32: 3101–3107
- 26 Wang A. Gravitational Faraday rotation induced from interacting gravitational plane waves. *Phys Rev D*, 1991, 44: 1120–1131
- 27 Sun D Z, Fan X L. Pattern of lensed chirp gravitational wave signal and its implication on the mass and position of lens. 2019, arXiv: [1911.08268](#)
- 28 Hou S, Fan X L, Liao K, et al. Gravitational wave interference via gravitational lensing: Measurements of luminosity distance, lens mass, and cosmological parameters. *Phys Rev D*, 2020, 101: 064011
- 29 Lowenthal D D. Limits on the photon mass. *Phys Rev D*, 1973, 8: 2349–2352
- 30 Panpanich S, Ponglertsakul S, Tannukij L. Particle motions and gravitational lensing in de Rham-Gabadadze-Tolley massive gravity theory. *Phys Rev D*, 2019, 100: 044031
- 31 Jia J, Liu H. Time delay of timelike particles in gravitational lensing of the Schwarzschild spacetime. *Phys Rev D*, 2019, 100: 124050
- 32 Oguri M. Strong gravitational lensing of explosive transients. *Rep Prog Phys*, 2019, 82: 126901
- 33 Nakamura T T, Deguchi S. Wave optics in gravitational lensing. *Prog Theor Phys Suppl*, 1999, 133: 137–153
- 34 Zhang H S, Fan X L. Poisson-Arago spot for gravitational waves. 2018, arXiv: [1809.06511](#)
- 35 Futterman J A H, Handler F A, Matzner R A. Scattering from Black Holes. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. 150
- 36 Andersson N, Jensen B P. Scattering by black holes. 2000, arXiv: [gr-qc/0011025](#)
- 37 Piórkowska A, Biesiada M, Zhu Z H. Strong gravitational lensing of gravitational waves in Einstein Telescope. *J Cosmol Astropart Phys*, 2013, (10): 022
- 38 Biesiada M, Ding X, Piórkowska A, et al. Strong gravitational lensing of gravitational waves from double compact binaries—Perspectives for the Einstein Telescope. *J Cosmol Astropart Phys*, 2014, (10): 080
- 39 Ding X, Biesiada M, Zhu Z H. Strongly lensed gravitational waves from intrinsically faint double compact binaries—Prediction for the Einstein Telescope. *J Cosmol Astropart Phys*, 2015, (12): 006
- 40 Li S S, Mao S, Zhao Y, et al. Gravitational lensing of gravitational waves: A statistical perspective. *Mon Not R Astron Soc*, 2018, 476: 2220–2229
- 41 Dominik M, Belczynski K, Fryer C, et al. Double compact objects. II. Cosmological merger rates. *Astrophys J*, 2013, 779: 72
- 42 Strolger L G, Riess A G, Dahlen T, et al. The Hubble higher z supernova search: Supernovae to $z \approx 1.6$ and constraints on Type Ia progenitor models. *Astrophys J*, 2004, 613: 200–223
- 43 Madau P, Dickinson M. Cosmic star-formation history. *Annu Rev Astron Astrophys*, 2014, 52: 415–486
- 44 Ng K K Y, Wong K W K, Broadhurst T, et al. Precise LIGO lensing rate predictions for binary black holes. *Phys Rev D*, 2018, 97: 023012
- 45 Yang L L, Ding X H, Biesiada M, et al. How does the Earth's rotation affect predictions of gravitational wave strong lensing rates? *Astrophys J*, 2019, 874: 139
- 46 Sereno M, Sesana A, Bleuler A, et al. Strong lensing of gravitational waves as seen by LISA. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 251101
- 47 Sereno M, Jetzer P, Sesana A, et al. Cosmography with strong lensing of LISA gravitational wave sources. *Mon Not R Astron Soc*, 2011, 415: 2773–2781
- 48 Piórkowska A K, Hou S Q, Biesiada M, et al. Inspiral double compact object detection and lensing rate—Forecast for DECIGO and B-DECIGO. 2020, arXiv: [2005.08727](#)
- 49 Hou S Q, Yu H, Biesiada M, et al. Lensing rates of gravitational wave signals displaying beat patterns detectable by (B-)DECIGO. 2020, arXiv: [2009.08116](#)
- 50 Hou S Q, Fan X L, Zhu Z H. Corrections to the gravitational wave phasing. 2019, arXiv: [1911.04182](#)
- 51 Fan X L, Liao K, Biesiada M, et al. Speed of gravitational waves from strongly lensed gravitational waves and electromagnetic signals. *Phys Rev Lett*, 2017, 118: 091102
- 52 Li Y, Fan X, Gou L. Constraining cosmological parameters in the FLRW metric with lensed GW+EM signals. *Astrophys J*, 2019, 873: 37
- 53 Liao K, Fan X L, Ding X H, et al. Precision cosmology from future lensed gravitational wave and electromagnetic signals. *Nature Commun*, 2017, 8: 1148
- 54 Liao K, Ding X, Biesiada M, et al. Anomalies in time delays of lensed gravitational waves and dark matter substructures. *Astrophys J*, 2018, 867: 69
- 55 Seto N, Kawamura S, Nakamura T. Possibility of direct measurement of the acceleration of the universe using 0.1 Hz band laser interferometer gravitational wave antenna in space. *Phys Rev Lett*, 2001, 87: 221103
- 56 Nishizawa A, Yagi K, Taruya A, et al. Cosmology with space-based gravitational-wave detectors: Dark energy and primordial gravitational waves. *Phys Rev D*, 2012, 85: 044047

-
- 57 Bonvin C, Caprini C, Sturani R, et al. Effect of matter structure on the gravitational waveform. [Phys Rev D](#), 2017, 95: 044029
- 58 Deguchi S, Watson W D. Diffraction in gravitational lensing for compact objects of low mass. [Astrophys J](#), 1986, 307: 30
- 59 Deguchi S, Watson W D. Wave effects in gravitational lensing of electromagnetic radiation. [Phys Rev D](#), 1986, 34: 1708–1718
- 60 Kayser R, Refsdal S, Stabell R. Astrophysical applications of gravitational microlensing. *Astron Astrophys*, 1986, 166: 36–52
- 61 Weinberg S. *Cosmology*. Oxford: Oxford University Press, 2008. 593
- 62 Liu B, Li Z, Zhu Z H. Complementary constraints on dark energy equation of state from strongly lensed gravitational wave. [Mon Not R Astron Soc](#), 2019, 487: 1980–1985
- 63 Clarkson C, Bassett B, Lu T H C. A general test of the Copernican principle. [Phys Rev Lett](#), 2008, 101: 011301
- 64 Räsänen S. A covariant treatment of cosmic parallax. *J Cosmol Astropart Phys*, 2014, (3): 035
- 65 Räsänen S, Bolejko K, Finoguenov A. New test of the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric using the distance sum rule. [Phys Rev Lett](#), 2015, 115: 101301
- 66 Liao K, Li Z, Wang G J, et al. Test of the FLRW metric and curvature with strong lens time delays. [Astrophys J](#), 2017, 839: 70

Summary for “透镜化引力波的散射问题及其应用”

Lensed gravitational waves: Scattering and applications

Xilong Fan

*School of Physics and Technology, Wuhan University, Wuhan 430072, China*E-mail: xilong.fan@whu.edu.cn

The direct detection of gravitational waves from stellar-mass compact binary merger by ground-based laser interferometer gravitational wave detector LIGO/Virgo has verified the prediction of general relativity and opened a new chapter in gravitational wave astronomy. Up to now, a total of 50 gravitational wave events have been detected and published in GWTC-1 and GWTC-2 catalogue. In the near future, the third-generation ground based gravitational wave detector, such as the Einstein Telescope (ET), will be constructed with sensitivity improved by at least a factor of 10. Tens of thousands of gravitational wave signals are expected to be detected per year in the third-generation detector era. These gravitational wave signals will inevitably overlap with foreground massive celestial bodies (such as black hole, galaxy and galaxy cluster), thus leading to lensed gravitational wave signals which will undoubtedly be another important test of general relativity once detected. Furthermore, strongly lensed gravitational wave signals by galaxy from massive binary black hole could possibly be detected by future space detector, e.g., LISA and DECIGO. Since the wavelengths of gravitational waves are comparable with the size of some lens, the lensed gravitational waves play a unique role in studying the phenomena of wave nature, e.g., interference and diffraction.

Lensed gravitational wave-electromagnetic wave system will have a wide range of applications in fundamental physics, cosmology and astrophysics when a series of lensed gravitational wave events and their corresponding electromagnetic counterparts have been detected. The most obvious advantage of lensed gravitational wave-electromagnetic wave system lies in that gravitational wave could provide time delay information with high accuracy, and electromagnetic wave could provide Fermat potential difference with high precision because a relatively complete arc of light could be obtained by electromagnetic wave observations and this is the most important step in measuring the Fermat potential. Thus, by combining the information from both approaches, lensed gravitational wave-electromagnetic wave system could be applied to study the speed of gravitational waves, constrain cosmological parameters, explore the substructure of the dark matter halo and investigate the lens model and so on.

In this paper, we will review in detail how to use geodesic equation, lens equation, as well as wave equation to tackle the stationary scattering problem of lensed gravitational waves, and introduce how lensed gravitational wave-electromagnetic wave system could be applied to study the tensor properties, interference and diffraction effects of gravitational wave, as well as its applications in gravitational wave velocity, Hubble constant, cosmic curvature, lens mass, substructure and so on.

gravitational wave, gravitational lens, diffraction, cosmologydoi: [10.1360/TB-2020-1170](https://doi.org/10.1360/TB-2020-1170)