



基于 Black-Litterman 模型的因子投资组合

解雯佳¹, 黄忠亿^{1*}, 张东朔²

1. 清华大学数学科学系, 北京 100084;

2. 中国建设银行风险度量中心, 上海 200120

E-mail: jiewj20@mails.tsinghua.edu.cn, zhongyih@mail.tsinghua.edu.cn, dongshuo.zhang@outlook.com

收稿日期: 2023-05-05; 接受日期: 2023-11-30; 网络出版日期: 2024-03-11; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12025104 和 11871298) 资助项目

摘要 近年来, 风险因子投资受到学术研究人员和市场从业者的青睐, 但仅关注因子既无法充分反映投资者的观点, 也不足以生成有竞争力的投资组合. Black-Litterman 模型同时考虑了市场状况和投资者的主观判断, 有更高的灵活性. 本文采用不同的优化策略来构建含因子的混合投资组合, 探索市场、因子和投资组合之间的关系. 通过分析因子关于市场的 Beta 值以及投资组合关于因子的 Beta 值来解释隐含模式. 文中选择 S&P 500 和 PAAIX 作为市场基准数据集, 选择的时间区间为 2018 年 1 月至 2022 年 12 月. 总体而言, 最大化 Sharpe 比率优化优于其他投资组合, 且其风险敏感性保持在可接受的水平.

关键词 资产配置 Black-Litterman 模型 投资组合优化

MSC (2020) 主题分类 91G10, 91G15

1 引言

投资组合优化一般以提高投资收益或降低投资风险为目标, 将不同标的产品重新组合. 经典的资本资产定价模型 (capital asset pricing model, CAPM)^[15] 告诉我们投资 I 的风险溢价与市场风险溢价之间的关系:

$$E[R_I] - R_f = \beta_I^M (E[R_M] - R_f), \quad (1.1)$$

这里 R_I 和 R_M 分别表示投资 I 和市场 M 的收益, R_f 为无风险利率. 通过下式计算投资 I 关于市场的 Beta 值:

$$\beta_I^M = \frac{\text{cov}(R_I, R_M)}{\text{var}(R_M)}. \quad (1.2)$$

这个式子说明投资的风险溢价与市场的风险溢价成正比, 比例常数就是该投资相对于市场的风险.

英文引用格式: Xie W J, Huang Z Y, Zhang D S. Constructing factor-bearing portfolios based on the Black-Litterman model (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1141–1156, doi: 10.1360/SCM-2023-0277

Jensen Alpha 法^[11]度量风险调整后的超额收益, 是投资 I 所实现的实际收益与 CAPM 预测收益之间的差额:

$$\begin{aligned}\alpha &= R_I^{\text{Actual}} - R_I^{\text{CAPM}} \\ &= R_I^{\text{Actual}} - R_f - \beta_I^M (E[R_M] - R_f).\end{aligned}\quad (1.3)$$

重新整理上式可得

$$\begin{aligned}R_I^{\text{Actual}} &= R_I^{\text{CAPM}} + \alpha \\ &= \underbrace{R_f + \beta_I^M (E[R_M] - R_f)}_{\text{被动收益}} + \underbrace{\alpha}_{\text{主动收益}}.\end{aligned}\quad (1.4)$$

因此, Jensen Alpha 法将实际收益拆分为两部分: 根据系统风险的暴露程度产生的被动回报和根据投资者的能力产生的主动回报.

在进行资产配置时, 充分收集和利用信息是非常重要的环节. Black 和 Litterman^[3]提出将基于其信息的主观观点纳入 MVO^[13,14]. Black-Litterman 模型利用了 Bayes 法则, 加入了均衡市场中的观点不确定性和均值估计. 虽然 Black-Litterman 模型以均值 - 方差模型为起点, 但在计算投资组合各组分的最优权重时仍然可以采取不同的优化策略. 投资组合的相对跟踪误差是指, 与基准 (通常是 Morgan Stanley 资本国际 (Morgan Stanley Capital International, MSCI) 指数) 相比, 投资组合在每个时期的回报率的差异. 该误差由这一期间的二次平均值估算取得, 进行资产重新配置以最小化跟踪误差^[4]. 此外, 投资者常用的衡量基金有效性的指标为 Sharpe 比率^[16], 该指标平衡了投资组合的收益和隐含风险.

在 CAPM 中, 一个因子相对市场的敏感度为该因子的 Beta 值, 而基金经理通常将因子相对投资组合的敏感度作为风险敞口, 这促使我们探索这两种敏感度之间的关系.

一方面, 通过分析相对于市场的盈亏情况以及计算滚动 Beta 和累积 Alpha 对所选因子进行系统性回测. 另一方面, 根据 Black-Litterman 模型的后验收益率, 采用不同的优化方法构建投资组合. 挑选相关性小的产品作为投资组合的标的资产以分散风险, 这里将股票、债券、指数、因子和加密货币作为投资组合的组成部分. 另外, 由于风险因子被视为预测市场的信号之一且用途广泛, 因此将具有低滚动和高滚动 Beta 的因子时间序列视为可投资资产, 观察不同优化策略情形下的配置. 所用数据集时间段为 2018 年 1 月至 2022 年 12 月.

从数学的角度来看, 在理想化的世界里, 基于因子的投资组合和资产配置组合并没有本质上的优劣之分 (参见文献 [10]). 本文采用 3 种优化策略, 包括均值 - 方差优化 (mean-variance optimization, MVO)、最大化 Sharpe 比率优化 (maximized Sharpe ratio optimization, MSRO) 和最小化跟踪误差优化 (minimized tracking error optimization, MTEO). 此外, 本文还构建等权重 (equal weight, EW)、多元化比率 (diversified ratio, DR) 和朴素风险平价 (naive risk parity, NRP) 资产组合以进行比较. 通过将投资组合的结果对因子进行回归探究因子本身与市场超额收益之间的关系.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节从多角度描述反映不同经济状况的因子. 第 3 节应用 Black-Litterman 模型配置所选的投资组合成分, 得到后验估计. 第 4 节介绍各种优化策略. 第 5 节进行经验性回测并比较所得结果. 第 6 节给出最终结论.

2 因子描述

本文选择的因子包括 Fama-French 五因子、部门因子、动量因子和 Beta 套利 (betting against Beta, BAB) 因子.

2.1 Fama-French 五因子

Fama-French 五因子由 Fama 和 French^[5,6] 提出, 用于解释股票收益的变化. 表 1 列出了来自 Fama-French 五因子模型的 5 个因子及其含义.

2.2 部门因子

行业风险也可被视为一个因素. 这里使用 French¹⁾ 的行业分类, 如表 2 所示.

2.3 动量因子

French¹⁾ 也提供了动量因子, 基于前 2 到 12 个月的回报率和市值规模构建了 6 个投资组合, 作为动量因子和市值规模因子组合表现的评估标准. 表 3 列出了这 6 个投资组合.

表 1 Fama-French 五因子

名称	含义
市场因子 (MKT)	市场回报率
规模因子 (SMB)	衡量小盘股和大盘股之间的差异
价值因子 (HML)	衡量高市净率股票和低市净率股票之间的差异
盈利能力因子 (RMW)	衡量高盈利能力股票和低盈利能力股票之间的差异
投资因子 (CMA)	衡量高投资股票和低投资股票之间的差异

表 2 部门因子

名称	举例
非耐用消费品 (NoDur)	食品、烟草、纺织品、服装、皮革、玩具
耐用消费品 (Durbl)	汽车、电视、家具、家用电器
制造业 (Manuf)	机械、卡车、飞机、化学品、家具、纸张、商业印刷
能源 (Enrgy)	石油、天然气和煤炭开采及产品
商业设备 (HiTec)	计算机、软件和电子设备
电信 (Telcm)	电话及电视传输
商店 (Shops)	批发、零售和一些服务 (洗衣店、修理店)
医疗保健 (Hlth)	医疗设备和药品
公用事业 (Utils)	—
其他 (Other)	矿业、建筑、运输、酒店、公共汽车服务、娱乐、金融

1) https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html

表 3 动量因子

名称	含义
SMALL LoPRIOR	小规模投资组合, 前期回报率下降
ME1 PRIOR2	中等前期回报的小型投资组合
SMALL HiPRIOR	小规模投资组合, 前期回报率上升
BIG LoPRIOR	大规模投资组合, 前期回报率下降
ME2 PRIOR2	中等前期回报的大型投资组合
BIG HiPRIOR	大规模投资组合, 前期回报率上升

2.4 BAB 因子

BAB 因子^[7]反映的是投资低 Beta 股票和高 Beta 股票的投资组合的表现, 由于低 Beta 股票受市场波动的影响较小, 因此能提供更稳定的回报, 而高 Beta 股票的波动性更大, 因此风险更高. 计算 BAB 因子需要执行以下步骤:

- (1) 获取市场成分股的历史每日交易价格, 同时对数据进行预处理以确保没有缺失值;
- (2) 使用个股和市场指数的收益数据来计算市场中的每只股票在过去 251 天中的 Beta 值;
- (3) 提取 Beta 最高的 20 只股票和 Beta 最低的 20 只股票, 构建多空投资组合, 按月调整投资组合.

3 构建 Black-Litterman 模型

Black-Litterman 模型^[9]将投资者观点与市场均衡状态相结合来计算最优投资组合权重, 是经典均值 - 方差优化模型的扩展. 考虑几种不同类型的资产, 包括股票、债券、指数、因子和加密货币作为投资组合的组成部分. 表 4 列出了这些资产, 数据集的样本期为 2018 年 1 月至 2022 年 12 月.

3.1 反向优化得到先验分布

在 Black-Litterman 模型中, 超额收益的先验分布指投资组合中标的资产的预期收益服从的概率分布, 在此之前不包含投资者的任何观点或信息. 先验分布可以通过反向优化 (也称为 “Bayes 推断”) 获得, 反向优化过程包括指定一个目标投资组合, 确定与该目标投资组合一致的均衡收益和先验资产权重. Black 和 Litterman^[3]选择了均衡 CAPM 投资组合作为先验投资组合.

表 4 投资组合标的

股票	债券	其他
美国大盘成长股 (LG)	美国短期国债 (ST)	美国商业设备行业因子 (HiTec)
美国大盘价值股 (LV)	美国中期国债 (MT)	美国耐用品行业因子 (Durbl)
美国小盘成长股 (SG)	美国长期国债 (LT)	BAB 因子 (BAB)
美国小盘价值股 (SV)		VIX 指数 (VIX)
		COMEX 黄金 (GOLD)
		比特币 (BIT)

当市场均衡时, 期望超额收益 $\tilde{R} = \tilde{\mu} + e$, 其中 $\tilde{\mu}$ 为期望超额收益的市场估计, $e \sim N(0, \Sigma)$ 是期望收益 $\tilde{\mu}$ 的估计误差. 模型中使用历史超额收益的协方差的百分比 Σ , 即 $\tau\Sigma$ 来表示预期超额收益的协方差. 由于预期超额收益的估计误差远小于历史收益的估计误差, 因此 $0 < \tau < 1$.

如果认为市场本身始终处于均衡状态, 则当前市场中的资产比例就是市场均衡状态下的比例, 那么就可以通过逆向优化方法, 从市场比例中推导出隐含均衡预期收益率的估计值. 利用 Markowitz 均值 - 方差模型^[13], 可以计算出已知资产的期望收益率时的最优投资组合权重. 根据 Markowitz 均值 - 方差模型可知

$$\max_w w' \tilde{R} - \frac{\lambda}{2} w' \Sigma w. \quad (3.1)$$

计算一阶导数并检查二阶导数后, 得到该问题的解

$$w^* = \frac{1}{\lambda} \Sigma^{-1} \tilde{R}. \quad (3.2)$$

由此可得均衡市场的隐含预期超额收益率

$$\Pi = \lambda \Sigma w_m, \quad (3.3)$$

其中, Π 为隐含均衡超额收益向量, Σ 是历史超额收益的协方差矩阵, w_m 为标的资产在市场上的权重向量. λ 为风险厌恶系数, 反映了风险与收益的权衡, 可以表示为

$$\lambda = \frac{w'_m \Pi}{\sigma_m^2} = \frac{1}{\sigma_m} S_m, \quad (3.4)$$

其中 S_m 是市场的 Sharpe 比率. Black 和 Litterman^[3] 取 Sharpe 比率为 0.5.

根据 2017 年 1 月以来各类资产的每日超额收益变化, 市场的标准差 $\sigma_m = 0.1548$. 假设 Sharpe 比率为 0.5, 则风险厌恶系数为

$$\lambda = \frac{S_m}{\sigma_m} = \frac{0.5}{0.1548} = 3.2296, \quad (3.5)$$

对应的协方差矩阵如表 5 所示.

将上述结果代入 (3.3) 可得超额收益的均衡向量:

$$\begin{aligned} \Pi &= \lambda \Sigma w_m \\ &= (4.6678, 4.2993, 4.8936, 5.4059, 6.0071, 4.9574, 0.0082, -0.0817, -0.3873, -0.1449, -18.8311, \\ &\quad 0.5658, 6.2751)^T. \end{aligned} \quad (3.6)$$

这里采用包含 T 个历史数据点的时间序列来估计模型, 并将 $\tau\Sigma$ 作为 (3.3) 中均衡向量 Π 的方差估计. 本文选择 $\tau \approx \frac{1}{T} = 0.000802$, 这里的 T 是数据集中的天数.

3.2 输入投资者的观点

Black-Litterman 模型结合了投资者的观点以及对特定资产或市场条件的置信程度来调整投资组合. 这种方法能使投资组合更灵活高效, 并反映投资者的观点. 下面选择美国银行投资部的交易理念²⁾作为观点输入.

2) <https://seekingalpha.com/news/3911439-top-10-trades-for-2023>

表 5 投资组合标的的协方差矩阵

	LG	LV	SG	SV	Durbl	HiTec	ST	MT	LT	BAB	VIX	GOLD	BIT
LG	3.0997	1.8682	2.9315	2.3659	2.5469	2.0252	-0.0263	-0.2396	-0.6706	-0.1146	-9.3067	0.0419	1.9025
LV	1.8682	2.1631	1.8522	2.3536	2.7356	2.5139	-0.0058	-0.0873	-0.2923	-0.0088	-9.4220	0.1295	1.9331
SG	2.9315	1.8522	3.2827	2.7467	2.7897	2.0442	-0.0184	-0.1939	-0.5586	-0.1510	-9.0807	0.1188	1.9842
SV	2.3659	2.3536	2.7467	3.4826	3.4859	2.7443	-0.0028	-0.0875	-0.2968	-0.1026	-10.7097	0.1913	2.5395
Durbl	2.5469	2.7356	2.7897	3.4859	6.6964	3.1266	-0.0132	-0.1291	-0.4152	-0.1274	-11.6787	0.1972	3.1872
HiTec	2.0252	2.5139	2.0442	2.7443	3.1266	3.0219	-0.0070	-0.0944	-0.3063	0.0019	-10.8546	0.1488	2.3122
ST	-0.0263	-0.0058	-0.0184	-0.0028	-0.0132	-0.0070	0.0078	0.0301	0.0540	0.0003	0.0940	0.0201	0.0127
MT	-0.2396	-0.0873	-0.1939	-0.0875	-0.1291	-0.0944	0.0301	0.1828	0.3976	0.0013	0.6903	0.1096	-0.0297
LT	-0.6706	-0.2923	-0.5586	-0.2968	-0.4152	-0.3063	0.0540	0.3976	1.0409	0.0092	1.7841	0.2113	-0.1380
BAB	-0.1146	-0.0088	-0.1510	-0.1026	-0.1274	0.0019	0.0003	0.0013	0.0092	0.1164	0.0967	-0.0067	-0.1058
VIX	-9.3067	-9.4220	-9.0807	-10.7097	-11.6787	-10.8546	0.0940	0.6903	1.7841	0.0967	86.3841	-0.1749	-10.2704
GOLD	0.0419	0.1295	0.1188	0.1913	0.1972	0.1488	0.0201	0.1096	0.2113	-0.0067	-0.1749	0.9272	0.5356
BIT	1.9025	1.9331	1.9842	2.5395	3.1872	2.3122	0.0127	-0.0297	-0.1380	-0.1058	-10.2704	0.5356	21.0246

- 过去领导者的领先趋势不太可能永远持续下去, 美国大盘成长股仍将下跌 10%.
- 当经济衰退开始时, 美国的收益率曲线将会陡峭化. 因此, 短期国债的表现将优于长期国债, 相对于长期国债, 短期国债的表现将优于长期国债 5%.
- 贵金属和加密货币都将上涨, 黄金将上涨 10%, 加密货币将上涨 20%.

观点矩阵 P 反映了投资者对资产的绝对观点和相对观点. 矩阵结构为 $K \times N$, 每个元素反映了第 K 个观点对 N 资产的看法. 每个绝对观点都被视为权重总和等于 1 的多头资产配置, 每个相对观点都被视为权重总和等于 0 的多空资产配置. 上述观点可表示为

$$M = \begin{pmatrix} \text{LG} & \text{LV} & \text{SG} & \text{SV} & \text{Durbl} & \text{HiTec} & \text{ST} & \text{MT} & \text{LT} & \text{BAB} & \text{VIX} & \text{GOLD} & \text{BIT} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

收益观点向量 Q 反映了投资者对资产绝对收益和相对收益的预期, 是一个包含 K 元素的列向量, 这里

$$Q = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.05 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

使用置信度矩阵 Ω 来反映投资者观点的不确定性. 假设投资者的观点相互独立, 主观观点的不确定性由一个随机误差项向量 ϵ 来表示, 这些误差项相互独立, 服从正态分布. 因此, 投资者的观点可以表示

为 Q 加上随机向量 ϵ :

$$Q + \epsilon = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_K \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

在 Black-Litterman 模型中, 不直接使用误差项向量 ϵ , 而是借助其协方差矩阵 Ω 来表示每种观点的不确定性程度或投资者观点的置信度. 假设投资者观点之间的相关性为 0, 则观点的协方差矩阵 Ω 可以用以下形式表示:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_K \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

模型中假设投资者观点之间的相关性为 0, 这既有助于投资者更容易地应用它, 又提高了模型结果的稳定性. He 和 Litterman^[8] 认为 Ω 与先验方差成正比, 即

$$\Omega = \text{Diag}(P(\tau\Sigma)P'). \quad (3.9)$$

对于用矩阵 M 表示的观点, 其协方差矩阵为

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0.002486 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000754 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000744 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01686 \end{pmatrix}.$$

3.3 获取新的组合回报向量

根据 Bayes 理论可知

$$P(E \| I) = \frac{P(E)P(I \| E)}{P(I)}. \quad (3.10)$$

由于 $P(I)$ 是一个常数, 因此

$$P(E \| I) \sim P(E)P(I \| E), \quad (3.11)$$

$P(E)$ 是先验分布, 代表投资者对资产预期收益率的看法, 其分布为

$$P(E) \sim N(\Pi, \tau\Sigma),$$

$P(I \| E)$ 是投资者根据自己的观点得到的均衡预期市场收益率的条件概率密度函数, 其分布为

$$P(I \| E) \sim N(Q, \Omega).$$

表 6 超额收益向量

资产名称	新组合收益率 (%)	平衡后超额收益率 (%)	差额 (%)
LG	2.1953	4.6678	-2.4725
LV	2.6971	4.2993	-1.6022
SG	2.5155	4.8936	-2.3782
SV	3.3576	5.4059	-2.0483
Durbl	3.7595	6.0071	-2.2476
HiTec	3.1947	4.9574	-1.7627
ST	0.0196	0.0082	0.0114
MT	0.0558	-0.0817	0.1375
LT	0.0248	-0.3873	0.412
BAB	-0.0478	-0.1449	0.0971
VIX	-10.8881	-18.8311	7.9431
GOLD	0.2827	0.5658	-0.2831
BIT	2.4848	6.2751	-3.7903

Black-Litterman 模型中假设资产收益率为正态分布, 均衡预期收益率和投资者观点均为正态分布, 因此 Black-Litterman 模型的结果, 即后验分布也为正态分布. 结合市场均衡预期超额收益率和投资者观点预期超额收益率的分布, 可以计算出 Bayes 后验分布如下:

$$P(E \parallel I) \sim N([(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1}[(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} Q], [(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1}). \tag{3.12}$$

进一步整理可得后验超额收益

$$\begin{aligned} \tilde{R}_I &= E[\tilde{R} \parallel I] = [(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1}[(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} Q] \\ &= (2.1953, 2.6971, 2.5155, 3.3576, 3.7595, 3.1947, 0.0196, 0.0558, 0.0248, -0.0478, -10.8881, \\ &\quad 0.2827, 2.4848)^T. \end{aligned} \tag{3.13}$$

投资者的观点会导致投资组合中每种资产的收益率与隐含均衡收益率发生变化, 如表 6 所示.

4 资产配置

一般认为后验 Black-Litterman 配置具有可持续性, 因此在本文中不进行调仓, 考虑投资组合允许进行卖空操作. 根据每种资产的属性, 对投资组合的组分施加不同限制:

- 投资组合中债券资产的比例不应大于 30%;
- VIX 指数、黄金和比特币资产在投资组合中所占的比例总和不应小于 10%;
- 比特币只能以多头头寸持有;
- 总空头头寸不应超过 50%.

可行域可以表示为

$$\mathcal{D} := \{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^N \mid \boldsymbol{w}' \mathbf{1} = 1, w_5 + w_6 + w_7 \leq 0.3, w_{10} + w_{11} + w_{12} \geq 0.1, w_{13} \geq 0, |\boldsymbol{w}' \mathbf{1}| \leq 1.5 \}, \tag{4.1}$$

其中 N 为资产组合中组分数.

4.1 MVO

在投资组合优化中, MVO 是平衡投资组合预期收益与风险之间权衡的最常用方法之一, 其目标是找到一种既能使预期收益最大化、又能使投资者主观感知的风险最小化的投资组合. MVO 问题可表述如下:

$$\max_{\mathbf{w}} R_f + \mathbf{w}' \tilde{R}_I - \frac{\lambda}{2} \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} \quad \text{s.t. } \mathbf{w} \in \mathcal{D}. \quad (4.2)$$

本文考虑在上述限制条件下, 不同风险规避类型的投资者的最优组合配置, 考虑 3 种常见的投资者类型: 信托型、市场型和 Kelley 型投资者.

- 信托型. 在这 3 类投资者中, 信托型投资者的风险承受能力最低. 为了实现投资目标, 他们只愿意接受少量风险, 最关心的是如何保住现有资本. 信托型投资者的 λ 相对较大, 在计算时选择 10.
- 市场型. 市场型投资者是适度规避风险的投资者. 为了实现投资目标, 他们愿意接受适度的风险, 最关心的是如何平衡风险与收益. 根据 (3.5) 中的计算, 这里假设市场型投资者的 λ 为 3.2296.
- Kelley 型. Kelley 型投资者是 3 个风险规避等级中风险规避程度最低的. 为了实现投资目标, 他们愿意接受高风险, 主要关注的是收益最大化. Kelley 型投资者的 λ 较低, 这里假设为 0.1.

4.2 MSRO

在投资组合优化中, Sharpe 比率用来衡量风险调整后的超额收益, 即用投资组合的超额收益除以该投资组合的波动率. Sharpe 比率较高的投资组合被认为比 Sharpe 比率较低的投资组合更有效, 因为它能提供更高的单位风险回报. MSRO 是一种投资组合优化技术, 其目的是通过最大化预期超额收益与投资组合波动率的比率, 找到 Sharpe 比率最高的投资组合:

$$\max_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}' \tilde{R}_I - R_f}{\sqrt{\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}}} \quad \text{s.t. } \mathbf{w} \in \mathcal{D}. \quad (4.3)$$

4.3 MTEO

MTEO^[4] 是另一种投资组合优化方法, 其目标是最大限度地减小投资组合收益与基准指数之间的标准差 (standard deviation, STD), 即跟踪误差 (tracking error, TE):

$$\text{TE} = \text{STD}(R_P - R_B), \quad (4.4)$$

其中, $R_P - R_B$ 为主动回报, 基准指数选为 PAAIX. 这种方法的目标是构建一个能密切跟踪基准指数表现的投资组合, 同时还能实现收益最大化. 这种方法的主要优点之一是, 它允许投资者建立一个密切跟踪基准指数表现的投资组合, 这对风险管理和业绩评估非常有用. 不过, 需要注意的是, 这种方法并不能保证投资组合的收益与基准指数相同, 还可能导致投资组合与基准指数高度相关.

4.4 直接配置

出于比较的目的, 下面给出一些直接的资产配置形式.

(1) EW 资产组合. $\frac{1}{N}$ 分配的投资组合是投资者最常用的分配方法之一 (参见文献 [2]). 这种投资组合是一种简单的策略, 它将投资组合平均分配给所有资产, 而不考虑其各自的特点或风险状况. 因此, 它不依赖于模型或数据.

(2) DR 资产组合. 投资组合的分散化是指投资组合的组成部分由分布在不同资产类别的投资组成. 60% (股票) 和 40% (债券) 是投资组合的典型划分, 而更保守的投资组合会将这两个比例颠倒过来. 市场从业者可能更倾向于通过纳入其他资产类别 (如货币、商品或房地产) 来增加分散性. 本文按 60 : 30 : 10 的比例分配投资组合中的股票资产、债券资产和其他资产, 同一类别下的资产按 $\frac{1}{N}$ 的比例平均分配.

(3) NRP 资产组合. 近年来, 学术研究人员和专业市场从业者都对基于风险或“智能 Beta” (smart Beta) 的策略产生了浓厚的兴趣 (参见文献 [1, 12]). 其中, 风险平价策略旨在为投资组合中的每种资产分配相等的风险. 特别是当标的资产之间互不相关时, 这一理念可以通过平均分配不同资产的 STD 来实现:

$$w_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}, \quad (4.5)$$

这也称为无风险平价. 在大多数情形下, 由于相关性的存在, NRP 并不是真正的风险平价 (true risk parity, TRP). 一般而言, 相关性差距越大, NRP 和 TRP 之间的差异就越大.

5 经验性测试

本文的核心目标是将各种投资组合的表现与因子和市场 (滚动 Beta) 进行独立和联合比较.

首先, 第 2 节介绍的因子与市场进行了系统的回溯测试. 由于因子主要用作股票投资的指标, 所以选择 S&P 500 作为市场. 具体而言, 图 1 绘制了这些因子的历史表现, 图 2 显示了因子的滚动

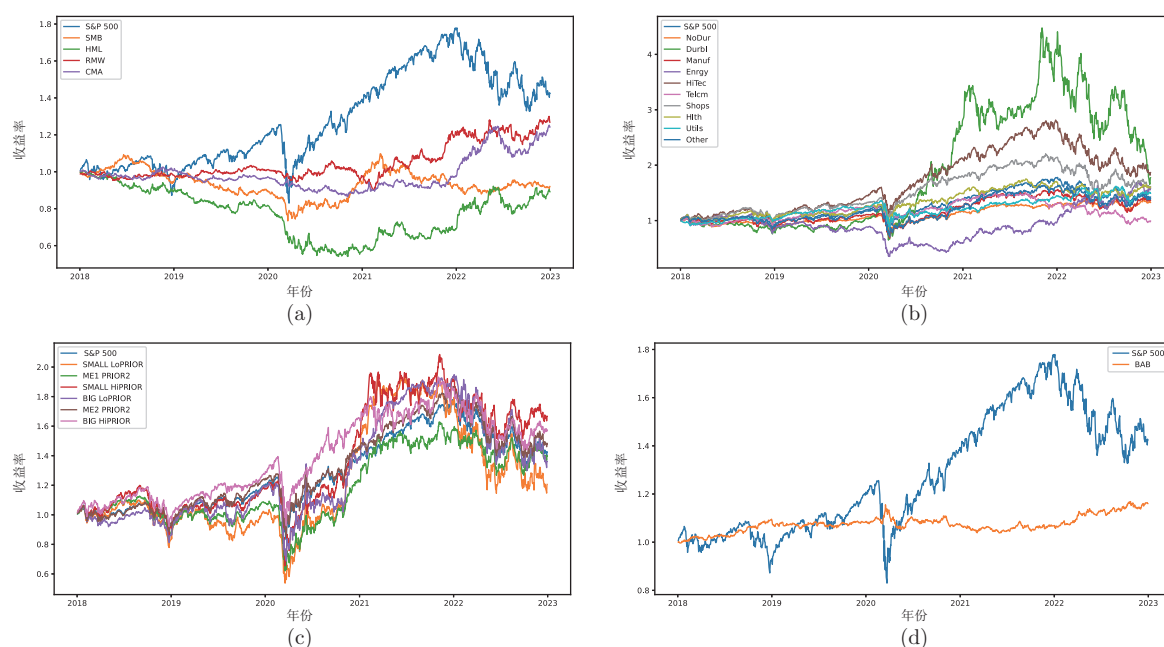


图 1 (网络版彩图) 不同类型因子的历史表现. (a) Fama-French 五因子; (b) 部门因子; (c) 动量因子; (d) BAB 因子

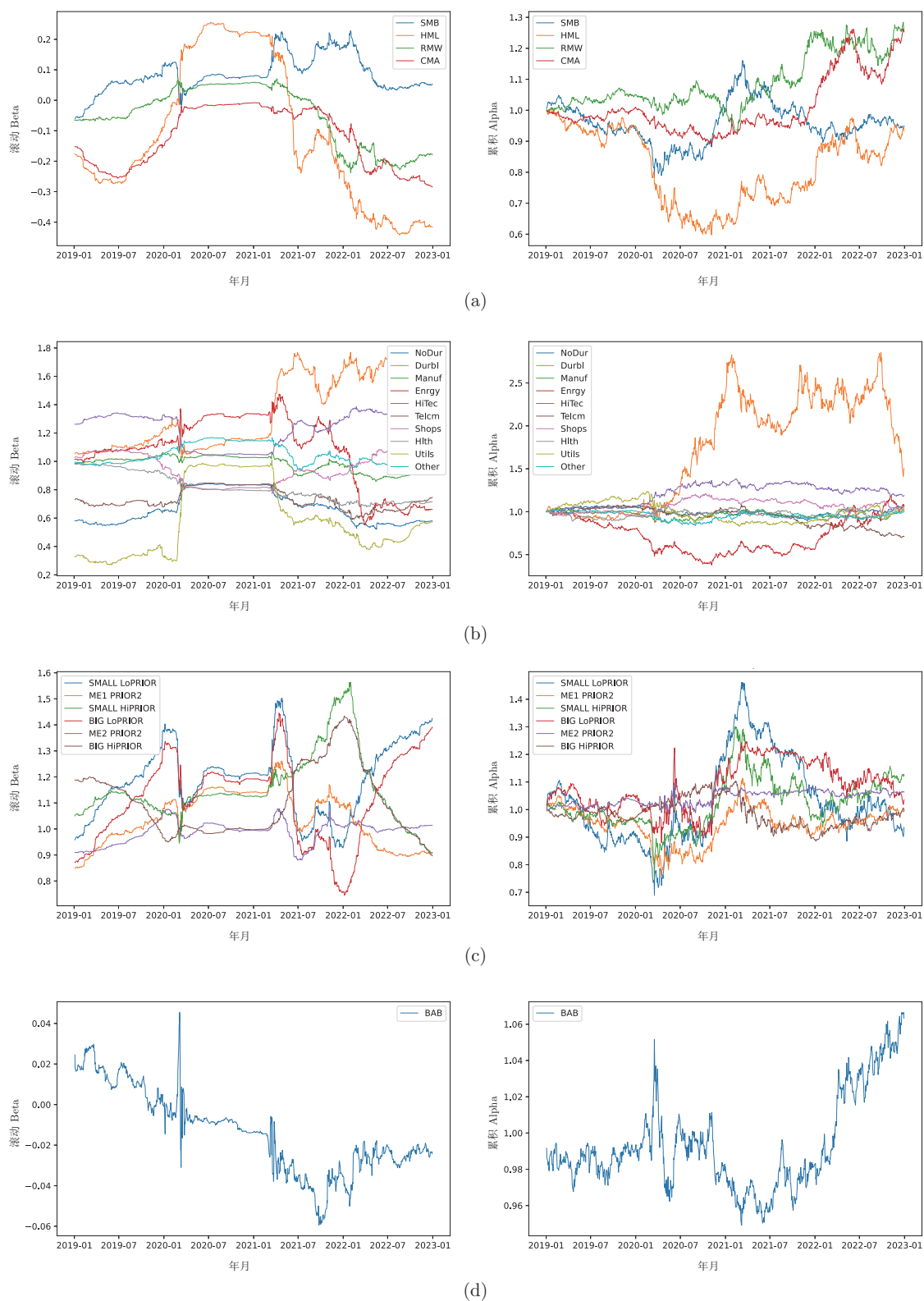


图 2 (网络版彩图) 不同类型因子的滚动 Beta 和累积 Alpha. (a) Fama-French 五因子; (b) 部门因子; (c) 动量因子; (d) BAB 因子

Beta 和累积 Alpha. 在此, 选择美国联邦储备经济数据中 3 个月美国国债的市场收益率作为无风险收益率的基准, 计算 Beta 的数据频率为每日. 可以看出, 动量因子与市场最为接近, 这意味着动量因子对市场波动最为敏感, 其 Beta 值应该相对较大. BAB 因子与市场的相关性最小, 预计其 Beta 值在各因子中最小.

表 7 显示了各因子的年化收益率和滚动 Beta, 这里 Beta 的计算公式由 (1.2) 给出. 显然, 商业设备 (HiTec) 因子的年化收益率最高, 这说明计算机、软件和电子设备等行业在过去 5 年中赚取了大量利润. 此外, BAB 因子的滚动 Beta 绝对值最小, 表明投资 Beta 值低的股票和做空 Beta 值高的股票的投资组合受经济形势的影响较小.

接下来, 使用第 4 节中的 MVO、MSRO 和 MTEO 计算最佳权重, 并列在表 8 中. 在 3 类投资者中, 美国短期国债和 BAB 因子的差异最为显著, 且呈单调趋势. 由于 λ 的值越高, 对风险的敏感度就越高, 这导致信托型投资者将大部分资金分配给美国短期国债和 BAB 因子, 这两种因子波动性较小, 如表 5 所示; Kelley 型投资者对风险不敏感, 分配给波动较大的美国耐用品行业因子绝大部分权重. MTEO 是一个相对平衡的投资组合, 不会对某些资产赋予过高或过低的权重.

本文使用 S&P 500 和 PAAIX 作为评估投资组合的基准, 因为投资组合包含大量多元化资产, 仅以 S&P 500 作为基准是不够的. 图 3 绘制了不同投资组合与两个市场基准相比较的历史表现. 随着

表 7 因子的表现

因子	年化收益率 (%) [*]	滚动 Beta ^{**}
S&P 500	7.1744	—
SMB	-1.6180	0.0533
HML	-2.1869	-0.4161
RMW	5.1015	-0.1789
CMA	4.3641	-0.2844
NoDur	6.0056	0.5793
Durbl	11.6084	1.5959
Manuf	6.2946	0.9162
Enrgy	8.8954	0.6615
HiTec	12.7070	1.3444
Telcm	-0.2782	0.7465
Shops	9.6057	1.0847
Hlth	9.3980	0.7151
Utils	8.5365	0.5739
Other	6.7046	0.9383
SMALL DOWN	3.30373	1.4244
SMALL MEDIUM	6.79069	0.9084
SMALL UP	10.4202	0.9094
BIG DOWN	6.01421	1.3909
BIG MEDIUM	7.91495	1.0143
BIG UP	9.07429	0.8968
BAB	3.00646	-0.0241

*: 基于 2018 年 1 月 1 日以来的业绩计算. **: 251 天的滚动窗口.

时间的推移, 信托型投资者的投资组合保持稳定, 而 Kelley 型投资者的投资组合波动剧烈. MSRO 在累积回报方面的表现优于两个市场基准, MTEO 的表现与 PAAIX 最为接近, 因为它的目标是跟踪该市场并将相关风险降至最低.

下面比较 MVO、MSRO 和 MTEO 得到的投资组合与直接投资组合. 从图 4 中可以看出, 信托型和市场型投资者的配置收益要低于 EW 和 DR, 因为这两种投资者对风险比较敏感, 不愿意在突发事件发生时接受潜在的损失. Kelley 型投资者会时不时地出现波动, 这与将比特币等高波动、高收益资产纳入可投资范围有关. 总而言之, 信托型投资者和 MTEO 均接近 NRP 投资组合, 表明它们是风险导向型的. 另外, MSRO 是唯一一个表现优于基准的投资组合, 尤其在经济繁荣的情况下有望取得显著收益.

表 9 记录了投资组合相对于两个市场的年化收益率和 Beta 值. MSRO 表现突出, 不仅超过了两个市场基准, 而且 Beta 值保持在合理的范围内. MTEO 在很大程度上重现了市场基准趋势.

通过将投资组合的收益率与第 2 节描述的因子进行回归, 可以确定投资组合相对于因子的暴露程度, 这里分别对单一因子和多个因子的投资组合收益率进行回归. 这里对可获得的因子进行单因子回归, 选择 Fama-French 五因子进行多因子回归.

表 10 显示了单因子回归的结果, 可以看出 Kelley 型投资者的大多数因子系数的绝对值较大, 表明其投资组合偏离因子较远. 例如, BAB 的系数非常大 (8.2347), 因为没有在 BAB 因子上投入任何

表 8 不同优化策略的最佳分配方案

优化策略	信托	市场	Kelley	MSRO	MTEO
预设 λ	10	3.2296	0.1		
LG	-1.63%	-7.76%	0.00%	-18.16%	20.77%
LV	14.46%	18.81%	0.01%	31.76%	8.30%
SG	4.73%	9.55%	0.00%	18.97%	11.03%
SV	4.48%	9.84%	0.00%	20.87%	-2.30%
Durbl	0.78%	1.57%	89.99%	3.14%	0.19%
HiTec	-4.75%	9.16%	0.00%	29.53%	-1.66%
ST	37.96%	22.13%	0.00%	-29.92%	9.74%
MT	-14.02%	-0.18%	0.00%	22.07%	10.77%
LT	6.06%	7.69%	0.00%	13.66%	9.49%
BAB	41.93%	18.82%	0.00%	-1.92%	20.47%
VIX	0.74%	0.81%	-50.00%	1.18%	0.31%
GOLD	9.10%	9.19%	0.01%	8.82%	12.65%
BIT	0.16%	0.00%	59.99%	0.00%	0.23%

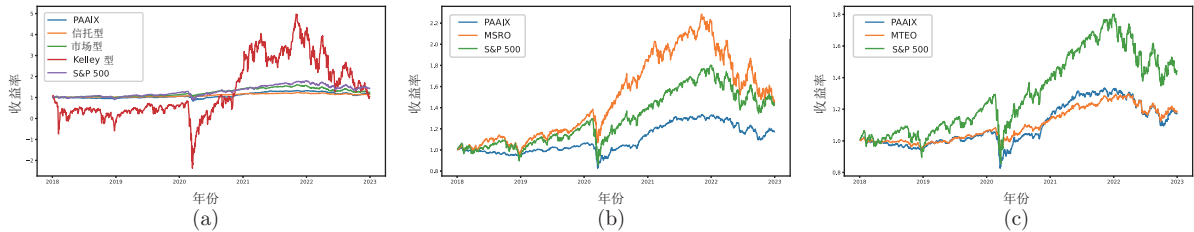


图 3 (网络版彩图) 不同投资组合的历史表现. (a) MVO; (b) MSRO; (c) MTEO

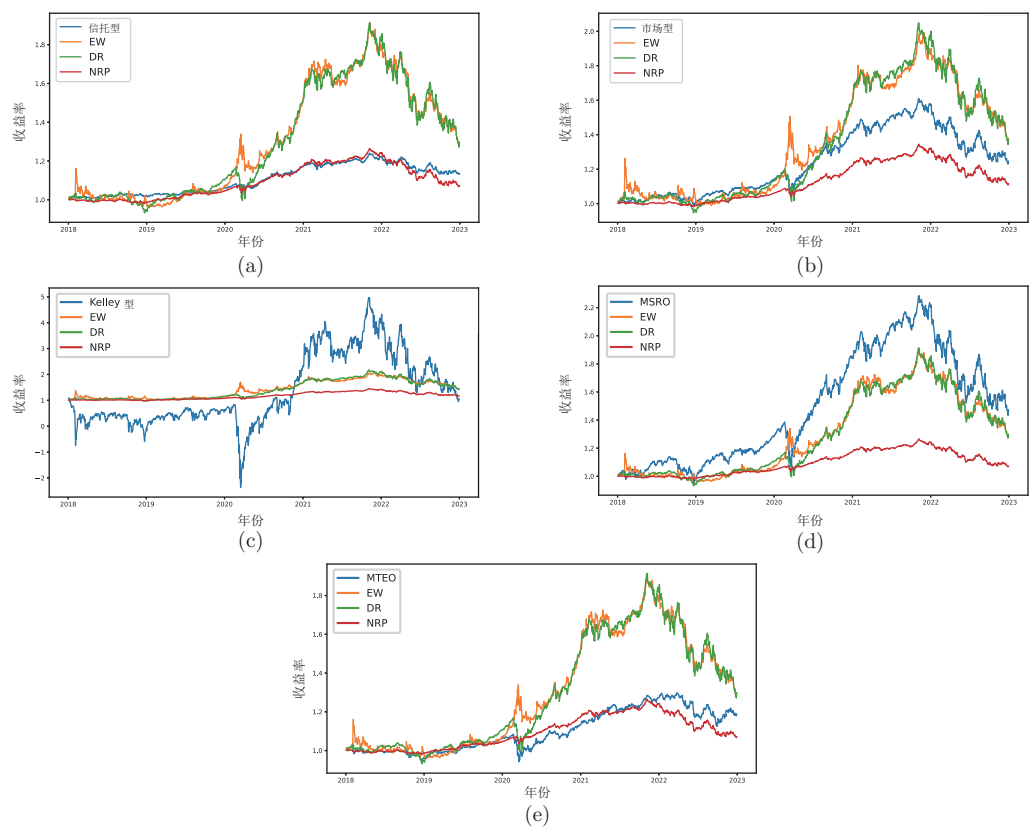


图 4 (网络版彩图) 不同投资组合相对于直接配置组合的表现. (a) 信托型投资者的 MVO; (b) 市场型投资者的 MVO; (c) Kelley 型投资者的 MVO; (d) MSRO ; (e) MTEO

表 9 投资组合的表现

投资组合	年化收益率 (%)*	Beta (以 S&P 500 为基准)**	Beta (以 PAAIX 为基准)**
S&P 500	7.62545	—	—
PAAIX	3.30902	—	—
EW	5.40162	0.4328	0.7333
DR	5.36066	0.8046	1.3919
NRP	1.39832	0.2849	0.5665
信托	2.58770	0.2316	0.4124
市场	4.51410	0.6371	1.0891
Kelley	0.94710	3.9771	7.0081
MSRO	8.07288	1.1290	1.9134
MTEO	3.51170	0.3730	0.8687
MTEO-PAAIX	0.23040	—	−0.1318

*: 基于 2018 年 1 月 1 日以来的业绩计算. **: 251 天的滚动窗口.

资金, 回测结果相差甚远; Kelley 型投资者将大部分资金 (89.99%) 投入美国耐用品行业因子 (Durbl), Durbl 系数的绝对值很小 (−0.4624), 表明投资组合与 Durbl 相关. 另一个发现是, EW 的因子系数均为负值, 表明该投资组合与这些因子的走势相反.

表 10 投资组合对单因子的风险敞口 (Beta)

因子	信托	市场	Kelley	EW	DR	NRP	MSRO	MTEO
MKT-RF	3.0504	0.4234	0.1302	0.4681	-0.4230	0.2349	0.8255	0.2868
HML	-1.4160	-0.2302	-0.0842	-0.1858	-0.1173	-0.1185	-0.4011	0.0967
SMB	-0.0709	0.2339	0.0865	0.4045	0.1541	0.1622	0.4341	0.2248
RMW	6.3992	-0.3709	-0.1411	-0.4867	-0.2065	-0.2460	-0.6423	-0.0657
CMA	5.4509	-0.6289	-0.1927	-0.7321	-0.0608	-0.3636	-1.1896	-0.0758
Durbl	-0.4624	0.1986	0.0653	0.3059	-0.0410	0.1366	0.3754	0.1121
Enrgy	1.7100	0.1228	0.0286	0.1533	-0.2080	0.0700	0.2566	0.1443
HiTec	2.5811	0.3593	0.1098	0.3847	-0.3003	0.1968	0.6966	0.1995
Hlth	6.0951	0.4043	0.1316	0.3885	-0.5086	0.2050	0.7890	0.2558
Manuf	1.8998	0.3439	0.1034	0.3880	-0.4052	0.1910	0.6792	0.2790
Shops	5.2548	0.4088	0.1282	0.4347	-0.3774	0.2233	0.7918	0.2524
Telcm	-2.5676	0.3393	0.1033	0.3579	-0.4541	0.1831	0.6712	0.2785
Utils	2.1969	0.2477	0.0917	0.2449	-0.3207	0.1354	0.4763	0.2283
NoDur	7.4429	0.3713	0.1186	0.3767	-0.5292	0.1962	0.7300	0.3115
Other	0.6022	0.3064	0.0904	0.3557	-0.3875	0.1715	0.6095	0.2648
BIG HiPRIOR	3.0484	0.3828	0.1204	0.4153	-0.3882	0.2111	0.7419	0.2395
BIG LoPRIOR	1.8211	0.2453	0.0708	0.3087	-0.2074	0.1449	0.4837	0.1922
ME1 PRIOR2	1.9345	0.2990	0.0924	0.3591	-0.2886	0.1704	0.5872	0.2451
ME2 PRIOR2	2.3757	0.3758	0.1129	0.4217	-0.4170	0.2090	0.7374	0.2858
SMALL HiPRIOR	1.0222	0.3053	0.0973	0.3493	-0.2712	0.1716	0.5923	0.2185
SMALL LoPRIOR	1.6162	0.2362	0.0718	0.3004	-0.1641	0.1404	0.4607	0.1778
BAB	8.2347	0.0023	0.2882	-0.3506	-0.1086	-0.0364	-0.2519	-0.0877

表 11 投资组合对多因子的风险敞口 (多元回归的 Beta)

因子	信托	市场	Kelley	EW	DR	NRP	MSRO	MTEO
MKT-RF	0.1220	0.3938	5.0161	-0.5010	0.4060	0.2114	0.7699	0.2887
SMB	0.0851	0.1980	4.2491	0.3640	0.2999	0.1241	0.3419	0.0741
HML	-0.1019	-0.2375	-9.8979	-0.1288	-0.1300	-0.1035	-0.3953	0.1026
RMW	-0.0189	-0.0190	10.8526	-0.0799	-0.1247	-0.0589	0.0037	-0.0512
CMA	0.0527	0.0242	18.2012	-0.2746	-0.1644	-0.0237	-0.0211	0.0541

类似的分析同样适用于多因子回归的情形, 表 11 列出了相关结果.

6 结论

近年来, 经济状况和金融市场的走势与新闻、政策等重大事件高度相关, 这种影响可以通过风险因子的表现反映出来. 本文对不同类型的因子回测, 并选择了具有代表性的因子作为投资组合的组成部分. 例如, BAB 因子代表低波动性资产, 而行业因子则可以通过交易所交易基金复制得到.

部分回测结果是符合直觉的, 在给定的限制条件下, MSRO 产生了最有潜力的投资组合, 超越了

市场基准, 且其 Beta 值保持在合理范围内, 从累积回报来看, 该投资组合是唯一一个表现优于 EW 和 DR 的投资组合. 在历史样本期间, 信托型投资者和 MTEO 的 MVO 呈现出相似的趋势, 并且接近于 NRP 和 PAAIX 市场, 这与直觉相符, 因为 MTEO 的目标是跟踪 PAAIX, 注重控制风险, 而信托代表风险厌恶型投资者, 注重风险水平, 不能接受意外事件引发的大量损失. 市场型投资者的 MVO 也有不错的结果, 它位于 S&P 500 和 PAAIX 之间.

致谢 感谢审稿人的宝贵建议.

参考文献

- 1 Anderson R M, Bianchi S W, Goldberg L R. Will my risk parity strategy outperform? *Financ Anal J*, 2012, 68: 75–93
- 2 Benartzi S, Thaler R H. Naive diversification strategies in defined contribution saving plans. *Amer Econ Rev*, 2001, 91: 79–98
- 3 Black F, Litterman R. Global portfolio optimization. *Financ Anal J*, 1992, 48: 28–43
- 4 Cornuejols G, Tütüncü R. Optimization Methods in Finance, vol. 5. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2006
- 5 Fama E F, French K R. Permanent and temporary components of stock prices. *J Polit Econ*, 1988, 96: 246–273
- 6 Fama E F, French K R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *J Financ Econ*, 1993, 33: 3–56
- 7 Frazzini A, Pedersen L H. Betting against beta. *J Financ Econ*, 2014, 111: 1–25
- 8 He G L, Litterman R. The intuition behind Black-Litterman model portfolios. SSRN J, 2002, doi: 10.2139/ssrn.334304
- 9 Idzorek T. A step-by-step guide to the Black-Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. In: *Forecasting Expected Returns in the Financial Markets*. New York: Academic Press, 2007, 17–38
- 10 Idzorek T M, Kowara M. Factor-based asset allocation vs. asset-class-based asset allocation. *Financ Anal J*, 2013, 69: 19–29
- 11 Jensen M C. The performance of mutual funds in the period 1945–1964. *J Finance*, 1968, 23: 389–416
- 12 Maillard S, Roncalli T, Teïletche J. The properties of equally weighted risk contribution portfolios. *J Portfolio Manag*, 2010, 36: 60–70
- 13 Markowitz H. Portfolio selection. *J Finance*, 1952, 7: 77–91
- 14 Miller M H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. New Haven: Yale Univ Press, 1960
- 15 Sharpe W F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *J Finance*, 1964, 19: 425–442
- 16 Sharpe W F. The Sharpe ratio. *J Portfolio Manag*, 1998, 3: 169–185

Constructing factor-bearing portfolios based on the Black-Litterman model

Wenjia Xie, Zhongyi Huang & Dongshuo Zhang

Abstract Risk factor investing has gained popularity among academic researchers and market practitioners over the past few decades. However, focusing solely on factors may not be sufficient to merge investor views and generate competitive portfolios. The Black-Litterman model combines market status and subjective judgment, allowing freedom in views. In this study, we explore the relationship among the market, factors, and portfolios via constructing factor-blending portfolios using different optimization strategies. We analyze the Betas of factors against the market and the Betas of portfolios against factors to explain implied patterns. S&P 500 and PAAIX from January 2018 to December 2022 are chosen as benchmarks. Overall, the maximized Sharpe ratio optimization outperforms other portfolios, and its risk sensitivity remains at an acceptable level.

Keywords asset allocation, Black-Litterman model, portfolio optimization

MSC(2020) 91G10, 91G15

doi: 10.1360/SCM-2023-0277