中国科学: 信息科学 2010 年 第 40 卷 第 8 期: 1096～1105
www.scichina.com info.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论 文

# 差分代换的一些几何性质

侯晓荣①*, 徐松①②, 邵俊伟①

① 电子科技大学自动化工程学院, 成都 611731
② 宁波大学理学院, 宁波 315211
* 通信作者. E-mail: houxr@uestc.edu.cn

收稿日期: 2009–08–03; 接受日期: 2009–11–28
国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2004CB318000) 和国家自然科学基金 (批准号: 10571095) 资助项目

**摘要** 文中从一种新的视角, 即从几何上来研究差分代换, 给出了差分代换的几何意义, 引入代换收敛性概念, 证明了逐次差分代换是不收敛的; 得到了一个有趣结果: 给定一个 $k$ 维有理超平面, 则用有限次差分代换总能把该 $k$ 维有理超平面变为新变量所在坐标系的 $k$ 维坐标面; 给出了半正定型在逐次差分代换下不能终止的一个充分条件.

**关键词**
差分代换
型的非负性判定
重心重分

## 1 引言

多项式非负性判定的理论与方法, 已广泛应用于鲁棒控制、非线性控制、非凸优化及滤波理论等诸多领域 [1~3]. 通常判定多项式非负性的有效的方法是基于胞腔剖分 (cell-decomposition), 如利用柱形代数剖分 (cylindrical algebraic decomposition, CAD) 算法 [4,5] 等. 不用胞腔剖分的方法来判定多项式的非负性, 比较著名的工作是 Pólya 定理 [6], 另外一些相关的工作参见文献 [7, 8]. 但对变量较多、次数较高的多项式, 上述方法的复杂性和运算量将明显增加, 甚至不再实用.

近来, 文献 [9, 10] 中提出了判定多项式非负性的逐次差分代换方法, 简述如下.

设多项式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 定义在 $\mathbb{R}_+^n$ 上, 其中 $\mathbb{R}_+^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n): x_i\geqslant 0, i=1,2,\ldots,n\}$. 变量 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 按大小顺序有 $n!$ 种不同的排列. 每个具体的排列, 例如, $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$, 对应于一个代换

$$\begin{cases} x_1 &= t_1+t_2+\cdots+t_n,\\ x_2 &= t_2+\cdots+t_n,\\ & \cdots\cdots\\ x_n &= t_n. \end{cases}$$

变量 $t_1,t_2,\ldots,t_n$ 可以看作是 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的差分序列, 因而称这样的代换为差分代换. 把这样的 $n!$ 个差分代换分别代入 $F$, 就得到了一个多项式集合 $\mathrm{DS}(F)$. 如果 $\mathrm{DS}(F)$ 中所有多项式的系数都是非负的, 则 $F$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 上是非负的. 如果 $\mathrm{DS}(F)$ 中有多项式具有负系数, 那么对这些多项式继续作上述对 $F$ 所作的差分代换, 得到一个有更多个多项式的集合 $\mathrm{DS}_2(F)$. 如果 $\mathrm{DS}_2(F)$ 中所有多项式的系数都是

非负的, 则 $F$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 上非负. 如此多次的差分代换, 称为逐次差分代换. 如果这样的过程可以终止, 即在有限步之后得到的多项式集合中所有多项式的系数都是非负的, 那么用这种逐次差分代换显然给出了 $F$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 上非负性的一个证明.

文献 [9, 10] 给出了大量的证明实例, 显示了这个框架的有效性. 因此, 对差分代换深入研究有着重要的理论和应用价值.

本文从一种新的视角, 即从几何上来研究差分代换. 首先, 给出了差分代换的几何意义, 指出差分代换对应于单形的首次重心重分. 这表明, 虽然从形式上看差分代换是一种不用胞腔剖分的方法, 但实质上差分代换对应着一种空间剖分. 其次, 引入逐次代换收敛性概念, 证明了逐次差分代换是不收敛的, 即逐次差分代换的次数充分大时, 其对应重分的每个子单形的直径并不能充分小. 此外, 得到了一个有趣结果: 给定一个 $k$ 维有理超平面, 则经过有限次的差分代换, 总能把该 $k$ 维有理超平面变为新变量所在坐标系的 $k$ 维坐标面. 该结果对于界定差分代换方法的处理范围, 即什么样的多项式可以用差分代换方法证明其半正定性起着重要的作用. 最后, 给出了半正定型在逐次差分代换下不能终止的一个充分条件, 这就给出了差分代换方法不能处理的一类多项式.

## 2 一些定义和记号

本节给出齐次多项式 (以下简称为型) 的代换集序列终止性等相关定义.

考虑 $n \times n$ 的上三角矩阵

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

记 $[k_1 k_2 \cdots k_n]$ 是自然数 $1, 2, \dots, n$ 的一个全排列, 矩阵 $\boldsymbol{P}_{[k_1 k_2 \cdots k_n]} = [a_{ij}]$ 被定义为满足

$$a_{1k_1} = 1, a_{2k_2} = 1, \dots, a_{nk_n} = 1,$$

其余元素都是 0 的 $n \times n$ 矩阵，即 $n$ 阶置换矩阵.

**定义 2.1** 记号如上. 令

$$\boldsymbol{B}_{[k_1 k_2 \cdots k_n]} = \boldsymbol{P}_{[k_1 k_2 \cdots k_n]} \boldsymbol{A}_n.$$

$\boldsymbol{B}_{[k_1 k_2 \cdots k_n]}$ 称为全排列 $[k_1 k_2 \cdots k_n]$ 确定的差分代换矩阵. 并记所有的差分代换矩阵组成的集合为 $PA_n$(共 $n!$ 个元). 相应地, 线性代换集

$$\{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_{[\alpha]} \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{B}_{[\alpha]} \in PA_n\},$$

称为 $\boldsymbol{X}$ 的差分代换 (共 $n!$ 个元), 其中变元 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{T} \in \mathbb{R}_+^n$, $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 分别为 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{T}$ 的转置.

**定义 2.2** 记号如上. 代换集合

$$\{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_{[\alpha_1]} \boldsymbol{B}_{[\alpha_2]} \cdots \boldsymbol{B}_{[\alpha_m]} \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{B}_{[\alpha_i]} \in PA_n\},$$

称为 $\boldsymbol{X}$ 的 ($m$ 次) 逐次差分代换. 相应的矩阵集合

$$\{\boldsymbol{B}_{[\alpha_1]}\boldsymbol{B}_{[\alpha_2]}\cdots\boldsymbol{B}_{[\alpha_m]}:\boldsymbol{B}_{[i]}\in PA_n\},$$

称为 $\boldsymbol{X}$ 的 ($m$ 次) 逐次差分代换矩阵集.

**定义 2.3**[6] 设型 $F\in\mathbb{R}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$. 当 $[\alpha_1],[\alpha_2],\ldots,[\alpha_m]$ 遍历 $1,2,\ldots,n$ 所有全排列时, 令

$$\mathrm{SDS}^{(m)}(F)=\bigcup_{[\alpha_m]}^{n!}\cdots\bigcup_{[\alpha_2]}^{n!}\bigcup_{[\alpha_1]}^{n!}F(\boldsymbol{B}_{[\alpha_1]}\boldsymbol{B}_{[\alpha_2]}\cdots\boldsymbol{B}_{[\alpha_m]}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}).$$

集合 $\mathrm{SDS}^m(F)$ 称为型 $F$ 的 $m$ 次差分代换集. 并定义差分代换集序列 $\{\mathrm{SDS}^{(m)}(F)\}_{m=1}^{\infty}$ 如下:

$$\{\mathrm{SDS}^{(m)}(F)\}_{m=1}^{\infty}=\mathrm{SDS}(F),\mathrm{SDS}^{(2)}(F),\ldots.$$

现在, 我们来给出差分代换集序列的终止性的定义.

**定义 2.4** 记 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n,|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. 若 $d$ 次型 $F=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=d}c_{\boldsymbol{\alpha}}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ 的每一单项的系数 $c_{\boldsymbol{\alpha}}$ 都是非负的, 称型 $F$ 是正平凡的. 若存在 $x_i^d$ 的系数为负的, 称型 $F$ 是负平凡的.

**定义 2.5** 设型 $F$ 定义在 $\mathbb{R}_+^n$ 上. 若对 $\forall\boldsymbol{X}(\neq 0)\in\mathbb{R}_+^n$, 都有 $F(\boldsymbol{X})>0$, 称型 $F(\boldsymbol{X})$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 上是正定的. 若对 $\forall\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}_+^n$, 都有 $F(\boldsymbol{X})\geqslant 0$, 称型 $F(\boldsymbol{X})$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 上是半正定的.

由定义 2.4 及 2.5, 我们可得到正、负平凡型如下简单, 同时也是重要的性质.

**引理 2.1** 若型 $F$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 上是正平凡的, 则其在 $\mathbb{R}_+^n$ 上是半正定的; 若型 $F$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 上是负平凡的, 则其在 $\mathbb{R}_+^n$ 上不是半正定的.

**定义 2.6**[9] 若存在正整数 $k$ 使得集合 $\mathrm{SDS}^{(k)}(F)$ 的每个元都是正平凡的, 称型 $F$ 在逐次差分代换下可正向终止; 若存在正整数 $k$ 和型 $g$, 满足 $g\in\mathrm{SDS}^{(k)}(F)$, 且 $g$ 是负平凡的, 称型 $F$ 在逐次差分代换下可负向终止; 若型 $F$ 在逐次差分代换下既不正向终止, 又不负向终止, 则称其在逐次差分代换下不能终止.

根据定义 2.6, 显然有如下结论.

**引理 2.2** 若型 $F$ 在逐次差分代换下可正向终止, 则其在 $\mathbb{R}_+^n$ 上是半正定的; 若型 $F$ 在逐次差分代换下可负向终止, 则其在 $\mathbb{R}_+^n$ 上不是半正定的.

下面给出规范向量、规范矩阵、规范代换等概念.

**定义 2.7** 设 $\boldsymbol{X}=[x_i]$ 为 $n$ 维向量, $x_i\geqslant 0$, 若 $\sum_{i=1}^n x_i=1$, 称 $\boldsymbol{X}$ 为规范向量. 给定 $n$ 维非零向量 $\boldsymbol{Y}=[y_i]$, 称向量

$$\tilde{\boldsymbol{Y}}=\left[\frac{y_i}{\sum_{i=1}^n y_i}\right]$$

为 $\boldsymbol{Y}$ 的规范化向量.

**定义 2.8** 设 $\boldsymbol{V}=[v_{ij}]$ 为 $n\times n$ 的矩阵，$v_{ij}\geqslant 0$, 若 $\sum_{i=1}^n v_{ij}=1, j=1,2,\ldots,n$, 称 $\boldsymbol{V}$ 为规范矩阵. 相应的代换

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}},$$

称为规范代换.

记

$$\mathbb{T}_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):\sum_{i=1}^n x_i=1,(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n\}.$$

**定义 2.9** 设型 $F$ 定义在 $\mathbb{T}_n$ 上. 若对 $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{T}_n$, 都有 $F(\boldsymbol{X}) > 0$, 称型 $F(\boldsymbol{X})$ 在 $\mathbb{T}_n$ 上是正定的. 若对 $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{T}_n$, 都有 $F(\boldsymbol{X}) \geqslant 0$, 称型 $F(\boldsymbol{X})$ 在 $\mathbb{T}_n$ 上是半正定的.

根据定义 2.5 及 2.9, 以下结论是显然的.

**引理 2.3** 型 $F$ 在 $\mathbb{R}_+^n$ 上是 (半) 正定的充分必要条件为其在 $\mathbb{T}_n$ 是 (半) 正定的.

根据引理 2.3, 为方便起见, 以下均假定型 $F$ 定义在 $\mathbb{T}_n$ 上.

## 3 逐次差分代换的几何意义及收敛性

本节从几何的视角来研究差分代换, 讨论逐次差分代换的几何意义及逐次差分代换的收敛性.

设 $K$ 为坐标单形, 我们把该坐标系简称为 $K$ 坐标系, 并用同一个符号表示点及其对应坐标表示.

在 $\mathbb{T}_n$ 坐标系中, 设 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 其差分代换矩阵有 $n!$ 个. 考虑其中一个代换

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}. \tag{1}$$

当 $\boldsymbol{X} = C_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ 时, $\boldsymbol{T} = (1, 0, \ldots, 0)$; 当 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}_2 = (1, 1, \ldots, 0)$ 时, $\boldsymbol{T} = (0, 1, \ldots, 0); \ldots$; 当 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}_n = (1, 1, \ldots, 1)$ 时, $\boldsymbol{T} = (0, 0, \ldots, 1)$.

显然, $\boldsymbol{C}_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ 为 $\mathbb{T}_n$ 的包含点 $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \ldots, \boldsymbol{C}_k$ 的 $k-1$ 维真面 [11] 的重心. 于是, $\boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{C}_2 \cdots \boldsymbol{C}_n$ 是 $\mathbb{T}_n$ 首次重心重分的一个子单形, 且 $\boldsymbol{A}_n = [\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{C}_n^{\mathrm{T}}]$. 这说明, 代换 (1) 与子单形 $\boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{C}_2 \cdots \boldsymbol{C}_n$ 是相互对应的.

类似地, $\boldsymbol{X}$ 的其余 $n! - 1$ 个差分矩阵分别对应于 $\mathbb{T}_n$ 首次重心重分的其余 $n! - 1$ 个子单形. 所以, 从几何上看, 差分代换对应于单形 $\mathbb{T}_n$ 的首次重心重分, 即 $n!$ 个差分代换与 $\mathbb{T}_n$ 首次重心重分的 $n!$ 个子单形是一一对应的.

当 $n = 3$ 时, 以下 6 个差分代换矩阵, 分别对应于图 1 中标号为 $1 \sim 6$ 的子单形.

$$\boldsymbol{B}_{[1]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{[5]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{[6]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

由于差分代换不是规范代换, 逐次差分代换对应的重分要复杂得多.

记号如上. 考虑以下 2 次差分代换

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_{[1]}^2 \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

当 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T}_1 = (1, 0, 0)$ 时, $\boldsymbol{T} = (1, 0, 0)$; 当 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_1 = (2, 1, 0)$ 时, $\boldsymbol{T} = (0, 1, 0)$; 当 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}_1 = (3, 2, 1)$ 时, $\boldsymbol{T} = (0, 0, 1)$. 于是, 代换 (2) 对应于图 2 中的子单形 $\boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{O}_1$. 类似地, 代换

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_{[1]} \boldsymbol{B}_{[i]} \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}, \quad i = 2, 3, \ldots, 6.$$

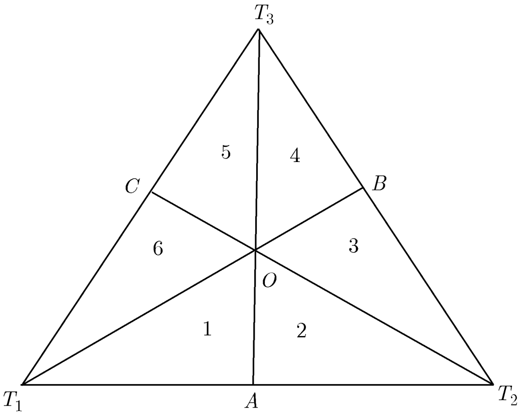


**图 1　重心重分**

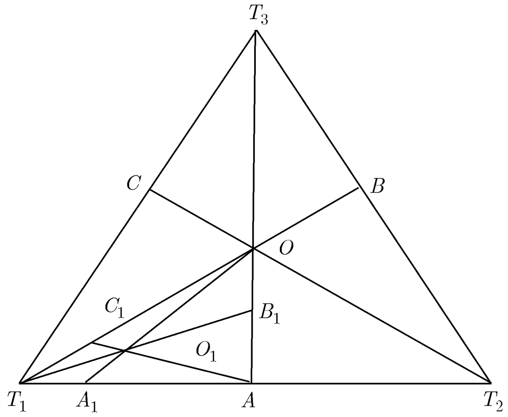


**图 2　逐次重心重分**

分别对应于图 2 中子单形 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{O}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{O}_1$, $\boldsymbol{O}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{O}_1$, $\boldsymbol{O}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{O}_1$, $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{O}_1$, 其中 $\boldsymbol{A}_1=(2,1,0)$, $\boldsymbol{B}_1=(2,2,1)$, $\boldsymbol{C}_1=(2,1,1)$, $\boldsymbol{O}_1=(3,2,1)$. 显然, $\boldsymbol{O}_1$ 不是 $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{O}$ 的重心. 所以, 逐次差分代换并不是对应于 $\mathbb{T}_n$ 的逐次重心重分.

下面给出单形重分序列及其对应的代换序列的收敛性定义.

**定义 3.1**　设 $\sigma$ 为 $\mathbb{T}_n$ 的子单形. $\sigma$ 的顶点之间的最大距离, 称为 $\sigma$ 的直径.

**定义 3.2**　记 $K_0=\mathbb{T}_n$. 设 $K_1$ 为 $K_0$ 的重分, $K_{i+1}$ 为 $K_i$ 的重分, $i=1,2,\ldots$. 若对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 使得 $\mathbb{T}_n$ 的第 $N$ 次重分 $K_N$ 的每一个子单形的直径都小于 $\varepsilon$, 称 $\mathbb{T}_n$ 的重分序列 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是收敛的.

从上述定义可知, 若 $\mathbb{T}_n$ 的重分序列是收敛的, 则当重分次数足够多时, 其任一子单形的直径可充分的小. 当重分次数 $N\longrightarrow\infty$ 时, 其任一子单形可趋于一点.

**定义 3.3**　设将 $K_{i-1}$ 重分为 $K_i$ 对应的代换集为 $L_i$, $i=1,2,\ldots$. 若 $\mathbb{T}_n$ 的重分序列 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是收敛的, 称代换序列 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是收敛的. 特别地, 若 $L_i=L$, $i=1,2,\ldots$, 称逐次 $L$ 代换集序列是收敛的, 或简称逐次 $L$ 代换是收敛的.

**定理 3.1**　逐次差分代换不收敛.

**证明**　考虑以下 $m$ 次差分代换

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_{[\alpha]}^{m}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}},\tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{[\alpha]}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]=\boldsymbol{B}_{[\alpha]}^{m}$, 利用 Jordan 型理论, 有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^m\boldsymbol{P}^{-1}$, 其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1&\frac{5-3\sqrt5}{10}&\frac{5+3\sqrt5}{10}\\0&\frac{5+\sqrt5}{10}&\frac{5-\sqrt5}{10}\\0&\frac{-\sqrt5}{5}&\frac{\sqrt5}{5}\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\alpha\end{bmatrix}.$$

进一步计算可得

$$
\begin{aligned}
&b_{11}=1,\ b_{21}=0,\ b_{31}=0,\\
&b_{12}=\frac{-5+\sqrt{5}}{10}\alpha^{-1}\beta^m+\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\alpha^{m-1}-1, b_{22}=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\alpha^{-1}\beta^m+\frac{\sqrt{5}}{5}\alpha^{m-1},\\
&b_{32}=-\frac{5+\sqrt{5}}{10}\alpha^{-1}\beta^m+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\alpha^{m-1}, b_{13}=\frac{-5+3\sqrt{5}}{10}\alpha^{-1}\beta^m+\frac{15+7\sqrt{5}}{10}\alpha^{m-1}-2,\\
&b_{23}=-\frac{5+\sqrt{5}}{10}\alpha^{-1}\beta^m+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\alpha^{m-1}, b_{33}=\frac{\sqrt{5}}{5}\alpha^{-1}\beta^m+\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\alpha^{m-1},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.
$$

经过代换 (3), 当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1=(1,0,0)$ 时, $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1=(1,0,0)$; 当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_2=(b_{12},b_{22},b_{32})$ 时, $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_2=(0,1,0)$; 当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_3=(b_{13},b_{23},b_{33})$ 时, $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_3=(0,0,1)$. 将 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 规范化, 并仍记为 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$. 即

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_1=(1,0,0),\\
&\boldsymbol{X}_2=\left(\frac{b_{12}}{b_{12}+b_{22}+b_{32}},\frac{b_{22}}{b_{12}+b_{22}+b_{32}},\frac{b_{32}}{b_{12}+b_{22}+b_{32}}\right),\\
&\boldsymbol{X}_3=\left(\frac{b_{13}}{b_{13}+b_{23}+b_{33}},\frac{b_{23}}{b_{13}+b_{23}+b_{33}},\frac{b_{33}}{b_{13}+b_{23}+b_{33}}\right).
\end{aligned}
$$

令 $m\to\infty$ 时, 有

$$
\boldsymbol{X}_1=(1,0,0),\quad \boldsymbol{X}_2\to\boldsymbol{X}_3\to\left(\frac{1+2\alpha}{2+3\alpha},\frac{1}{2+3\alpha},\frac{\alpha}{2+3\alpha}\right).
$$

也就是说, 子单形 $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_3$ 的直径趋于非零常值, 所以逐次差分代换不收敛. 证毕.

定理 3.1 说明, 逐次差分代换的次数充分大时, 其对应重分的每个子单形的直径并不能充分小.

## 4 差分代换的一些性质

本节将给出差分代换的一些性质.

首先讨论有理超平面的逐次差分代换. 记

$$
\mathbb{T}_n^*=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):\sum_{i=1}^n x_i=1,(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\}.
$$

**引理 4.1** 设 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{T}_n^*$, 过 $\boldsymbol{P}$ 作任意有限个 $n-1$ 维锥 $\boldsymbol{\Sigma}_i(i=1,2,\ldots,l)$, 使得 $\mathbb{T}_n^*=\bigcup_{i=1}^l\boldsymbol{\Sigma}_i$. 在以锥 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ 的面为坐标面的任一坐标系中, 令 $\boldsymbol{P}=(1,0,\ldots,0)$, 则 $\forall\boldsymbol{Q}=(q_1,q_2,\ldots,q_n)\in\boldsymbol{\Sigma}_i$, $q_2,q_3,\ldots,q_n$ 中所有非零项的符号相同.

该结论是显然的. 如图 3, $\mathbb{T}_3^*=\bigcup_{i=1}^6\boldsymbol{\Sigma}_i$. 考虑一坐标系: $\boldsymbol{P}=(1,0,0)$, 锥 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ 的面为其 2 个坐标面 (另一坐标面未显示). 则 $\forall\boldsymbol{Q}_i=(q_1^i,q_2^i,q_3^i)\in\boldsymbol{\Sigma}_i$, $q_2^i,q_3^i$ 有相同的符号, 或至少有一个为零, $i=1,2,\ldots,6$.

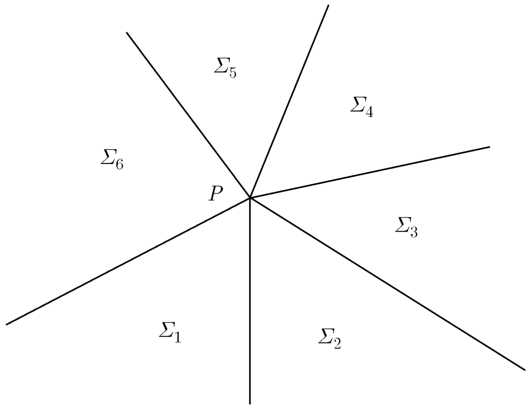


**图 3　空间锥面剖分**

**定理 4.1**　记 $\mathrm{sd}^i(\mathbb{T}_n)$ 为 $\mathbb{T}_n$ 的与 $i$ 次逐次差分代换相对应的重分, $i=1,2,\ldots$. 若 $\pi$ 为 $k$ 维有理超平面, 则存在自然数 $i$, 以及 $\mathrm{sd}^i(\mathbb{T}_n)$ 的一个 $k$ 维真面 $\sigma$, 使得 $\sigma\subset\pi$.

**证明**　设 $\pi$ 为

$$\begin{cases} x_1=c_{11}\lambda_1+c_{12}\lambda_2+\cdots+c_{1k}\lambda_k,\\ x_2=c_{21}\lambda_1+c_{22}\lambda_2+\cdots+c_{2k}\lambda_k,\\ \qquad\cdots\cdots\\ x_n=c_{n1}\lambda_1+c_{n2}\lambda_2+\cdots+c_{nk}\lambda_k, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\lambda_j(j=1,2,\ldots,k)$ 为参数, $c_{ij}(i=1,2,\ldots,n,j=1,2,\ldots,k)$ 为非负整数且不全为 0.

不妨设 $c_{11}\geqslant c_{21}\geqslant\cdots\geqslant c_{k1}$, 对 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 作差分代换

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_n(t_1,t_2,\ldots,t_n)^{\mathrm{T}},$$

则 (4) 式可变为

$$\begin{cases} t_1=c^1_{11}\lambda_1+c^1_{12}\lambda_2+\cdots+c^1_{1k}\lambda_k,\\ t_2=c^1_{21}\lambda_1+c^1_{22}\lambda_2+\cdots+c^1_{2k}\lambda_k,\\ \qquad\cdots\cdots\\ t_n=c^1_{n1}\lambda_1+c^1_{n2}\lambda_2+\cdots+c^1_{nk}\lambda_k, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $c^1_{ij}=c_{ij}-c_{i+1,j}$, $c_{n+1,j}=0$. 由于 $c^1_{i1}\geqslant 0(i=1,2,\ldots,n)$, 且 $\sum_{i=1}^n c^1_{i1}=c_{11}$, 所以除非 $c_{21}=c_{31}=\cdots=c_{n1}=0$, 否则 $\sum_{i=1}^n c^1_{i1}<\sum_{i=1}^n c_{i1}$. 若 $c^1_{i1}(i=1,2,\ldots,n)$ 至少有两项不是零, 继续对 (5) 式中 $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ 作相应的差分代换. 显然经过有限 (设为 $r$) 步以后, 可使得 $c^r_{11}>0,c^r_{21}=c^r_{31}=\cdots=c^r_{n1}=0$, 即经过有限次差分代换, $\pi$ 可变为

$$\begin{cases} t_1=c^r_{11}\lambda_1+c^r_{12}\lambda_2+\cdots+c^r_{1k}\lambda_k,\\ t_2=c^r_{22}\lambda_2+\cdots+c^r_{2k}\lambda_k,\\ \qquad\cdots\cdots\\ t_n=c^r_{n2}\lambda_2+\cdots+c^r_{nk}\lambda_k. \end{cases} \tag{6}$$

其中 $c_{ij}^{s}=c_{ij}^{s-1}-c_{i+1,j}^{s-1}, s=1,2,\ldots,r$.

令 $\boldsymbol{P}=(c_{11}^{r},0,\ldots,0)$, 等价于 $\boldsymbol{P}=(1,0,\ldots,0)$. 设 $\boldsymbol{Q}=(c_{12}^{r},c_{22}^{r},c_{32}^{r},\ldots,c_{n2}^{r})$, 根据引理 4.1, 必存在以 $\boldsymbol{P}$ 为一顶点的子单形 $\sigma$, 在 $\sigma$ 坐标系中, $c_{22}^{r},c_{32}^{r},\ldots,c_{n2}^{r}$ 中的非零项符号相同. 不妨设 $c_{22}^{r}\geqslant c_{32}^{r}\geqslant\cdots\geqslant c_{n2}^{r}\geqslant 0$, 对 (6) 式中 $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ 作上述类似的差分代换, 经过有限步以后, $\pi$ 可变为

$$\begin{cases} t_1=c_{11}^{r}\lambda_1+c_{12}^{r+1}\lambda_2+c_{13}^{r+1}\lambda_2+\cdots+c_{1k}^{r+1}\lambda_k,\\ t_2=c_{22}^{r+1}\lambda_2+c_{23}^{r+1}\lambda_2+\cdots+c_{2k}^{r+1}\lambda_k,\\ t_3=c_{33}^{r+1}\lambda_2+\cdots+c_{3k}^{r+1}\lambda_k,\\ \qquad\cdots\cdots\\ t_n=c_{n3}^{r+1}\lambda_2+\cdots+c_{nk}^{r+1}\lambda_k. \end{cases}$$

其中 $c_{22}^{r+1}>0$.

由引理 4.1, 同样可设 $c_{33}^{r+1}\geqslant c_{43}^{r+1}\geqslant\cdots\geqslant c_{n3}^{r+1}\geqslant 0$, 将上述过程一直下去, 最终 $\pi$ 可变为

$$\begin{cases} t_1=c_{11}^{r}\lambda_1+c_{12}^{r+k-1}\lambda_2+\cdots+c_{1k}^{r+k-1}\lambda_k,\\ t_2=c_{22}^{r+1}\lambda_2+\cdots+c_{2k}^{r+k-1}\lambda_k,\\ \qquad\cdots\cdots\\ t_k=c_{kk}^{r+k-1}\lambda_k,\\ t_{k+1}=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ t_n=0, \end{cases}$$

其中 $c_{11}^{r},c_{22}^{r+1},\ldots,c_{kk}^{r+k-1}$ 均大于零. 证毕.

定理 4.1 表明, 给定一个 $k$ 维有理超平面, 则用有限次差分代换总能把该 $k$ 维有理超平面变为新变量所在坐标系的 $k$ 维坐标面. 当 $k=1$ 时, 有理超平面退化为一个有理点, 即经过有限次差分代换, 可将该有理点变为某子单形的顶点, 此为杨路等 1)的主要结果. 定理 4.1 对于界定差分代换方法的处理范围, 即什么样的多项式可以用差分代换方法证明其半正定性起着重要的作用.

下面来讨论型在逐次差分代换下不能终止的条件.

由于差分代换是有理代换, 自然有如下结论.

**定理 4.2**　经过有限次差分代换, 无理点不可能变成 $\mathbb{T}_n$ 重分的任一子单形的顶点.

**引理 4.2**　记 $\sigma_j(j=1,2,\ldots,n)$ 为 $\mathbb{T}_n$ 的 $n-j$ 维真面, $\mathbb{F}=\mathrm{Zero}(F)\bigcap\mathbb{T}_n$. 若型 $F$ 在 $\mathbb{T}_n$ 上半正定, 且其系数均非负, 则 $\mathbb{F}$ 为 $\sigma_1$ 的某些真面的并.

**证明**　设型 $F$ 表示为

$$F(\boldsymbol{X})=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=m}a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n},$$

其中 $a_{i_1i_2\cdots i_n}\geqslant 0$. 不妨令

1) 杨路, 姚勇. 差分代换矩阵与多项式的非负性判定. 系统科学与数学, 已接受

$$F_j = F(\boldsymbol{X})\,|_{\sigma_j} = \sum_{i_{j+1}+\cdots+i_n=m} a_{0\cdots 0 i_{j+1}\cdots i_n} x_{j+1}^{i_{j+1}} x_{j+2}^{i_{j+2}} \cdots x_n^{i_n}.$$

若 $a_{0\cdots 0 i_{j+1}\cdots i_n}$ 全为 0, 则 $F$ 在 $\sigma_j$ 上恒为 0, 即 $\sigma_j \subseteq \mathrm{Zero}(F)$. 否则, 至少有一个 $a_{0\cdots 0 i_{j+1}\cdots i_n} > 0$. 于是在 $\sigma_j$ 的内部, 即 $x_k > 0, k = j+1, \ldots, n$ 时, 有

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \sum_{i_{j+1}+\cdots+i_n=m} i_k a_{0\cdots 0 i_{j+1}\cdots i_n} x_{j+1}^{i_{j+1}} \cdots x_k^{i_k-1} \cdot x_{k+1}^{i_{k+1}} \cdots x_n^{i_n} > 0. \tag{7}$$

若 $F_j$ 在 $\sigma_j$ 的内部取到极值点 (零点), 记为 $X_0$. 考虑 Lagrange 函数

$$L = F_j + \lambda\bigg(\sum_{k=j+1}^{n} x_k - 1\bigg).$$

则

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}\Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0} = \frac{\partial F_j}{\partial x_k}\Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0} + \lambda = 0, k = j+1, \ldots, n.$$

于是

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0} = -\lambda, \quad k = j+1, \ldots, n. \tag{8}$$

由 (8) 式及 Euler 恒等式

$$nF = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial F_j}{\partial x_k},$$

可得

$$0 = nF|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0} = \sum_{k=j+1}^{n} x_k \frac{\partial F_j}{\partial x_k}\Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0} = \sum_{i=j+1}^{n} x_k(-\lambda) = -\lambda,$$

所以

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0} = 0, \quad k = j+1, \ldots, n.$$

这与 (7) 式矛盾. 这说明, $F_j$ 不可能在 $\sigma_j$ 的内部取得零点, 除非它在 $\sigma_j$ 上恒为 0. 若零点在 $\sigma_j$ 的边界上, 如在 $\sigma_{j+1}$ 上, 将上述证明中的 $\sigma_j$ 替换为 $\sigma_{j+1}$, 则 $F$ 在 $\sigma_{j+1}$ 上恒为 0, 即 $\sigma_{j+1} \subseteq \mathrm{Zero}(F)$. 否则, 继续上述过程, 直至 $j = n$. 证毕.

引理 4.2 说明, 正平凡型不可能在 $\mathbb{T}_n$ 的任一真面的内部取得零点, 除非它在该真面上恒为 0.

下面我们给出半正定型在逐次差分代换下不能终止的一个充分条件.

**定理 4.3** 设型 $F$ 在 $\mathbb{T}_n$ 上是半正定的. 若存在无理点 $Y_0 \in \mathbb{T}_n$ 为型 $F$ 的孤立零点, 则型 $F$ 在逐次差分代换下不能终止.

**证明** 假设型 $F$ 在逐次差分代换下可正向终止, 即存在正整数 $k$, 使得 $\mathrm{SDS}^{(k)}(F)$ 的每个元都是正平凡的, 且 $Y_0$ 为 $\mathrm{SDS}^{(k)}(F)$ 中某个正平凡型的孤立零点. 根据引理 4.2, $Y_0$ 必为 $\mathbb{T}_n$ 的某个子单形的顶点, 这与定理 4.2 矛盾. 所以, 型 $F$ 在逐次差分代换下不能终止. 证毕.

定理 4.3 给出了差分代换方法不能处理的一类多项式.

## 参考文献

1 Lasserre J B. Global optimization with polynomials and the problem of moments. SIAM J Optimiz, 2001, 11: 796–817

2 Parrilo P A. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems. Math Program Ser B, 2003, 96: 293–320
3 Henrion D, Garulli A. Positive Polynomials in Control. New York: Springer, 2005. 3–103
4 Collins G E, Hong H. Partial cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination. J Symb Comput, 1991, 12: 299–328
5 Yang L, Hou X R, Xia B C. A complete algorithm of automated discovering for a class of inequality type theorems. Sci China Ser F-Inf Sci, 2001, 44: 33–49
6 Hardy G H, Littlcwood J E, Pólya G. Inequalities. Cambridge: Cambridge University Press, 1952. 57–59
7 Catlin D W, D'Angelo J P. Positivity conditions for bihomogeneous polynomials. Math Res Lett, 1997, 4: 555–567
8 Handelman D. Deciding eventual positivity of polynomials. Ergod Theor Dyn Syst, 1986, 6: 57–59
9 杨路. 差分代换与不等式机器证明. 广州大学学报 (自然科学版), 2006, 5: 1–7
10 杨路, 夏壁灿. 不等式机器证明与自动发现. 北京: 科学出版社, 2008. 163–175
11 Edwin H S. Algebraic Topology. New York: Springer-Verlag, 1966. 108–149