

$SL(2, C)$ 可解子群的结构与环面上 Fuchs 方程的可积性*

管克英 张绍飞

(北京航空航天大学应用数理系, 北京 100083)

摘要 证明 $SL(2, C)$ 可解子群的导出长度不超过 2, 给出其具体结构 (定理 1), 研究对应的单值群是可解的环面上只有一个正则奇点的 Fuchs 方程的解 Riemann 曲面结构, 并给出这类可积型方程的具体判例.

关键词 Fuchs 方程 单值群 特殊线性群 可解群 可积性

可积性是微分方程理论的核心问题之一. 自微积分学创立到 19 世纪初, 人们对微分方程的研究集中在一些具体方程的积分法. 19 世纪初 Abel 和 Galois 证明了 5 次及 5 次以上的多项式一般不能用根式求解. 在 Abel 的思想基础上, Liouville 又证明了许多微分方程都不能用“积分法”求解^[1]. 此后, 常微分方程可积性理论的研究较系统地发展起来. 现今这方面的一般理论是建立在微分代数基础之上^[2]. 众所周知, 多项式的 Galois 理论的核心就是对每一多项式建立一个相应的 Galois 群, 并将该多项式能否用根式求解与对应的 Galois 群的可解性联系起来. 类似地, 基于微分代数的可积性理论的基本思想就是对每一微分方程 (组) 建立一相应的 Galois 群, 并将 Galois 群的可解性与方程的可积性联系起来^[3]. 迄今, 这方面的研究主要集中在线性常微分方程 (组), 特别是对 Fuchs 系统已取得较大的成功. 但由于对微分方程的可积性的含义, 微分方程的 Galois 群 (一般是无限群) 的定义与构造, 可解的无限群的结构等问题的研究远较多项式的理论复杂与困难. 即使是关于 Fuchs 系统, 所得到的结论也远较多项式理论复杂与难于理解. 例如俄罗斯数学家 Il'yashenko^[3] 归纳总结了这方面一个较好的结果——Khovanskiy 定理:

Khovanskiy 定理 如果一个 Fuchs 系统的单值群含有有限指数的可解正规子群, 则该系统是可用积分法积分的. 如果单值群不具有这种性质, 则该系统就甚至不能用“广义积分法”积分. 就是说该系统的解不能用方程的系数通过解代数方程、积分以及与具有任意多变元的整函数的复合来表示.

由此不难看出, 这方面理论的复杂与困难. 这里指出, 上述的 Fuchs 系统是指在扩充的复平面 (或 Riemann 球面) 上只有有限个正则奇点的线性常微分方程 (组), 其单值群可在一定意

义上被当做方程的 Galois 群.

1 $SL(2, C)$ 的可解子群的结构

任一给定的二阶 Fuchs 方程总可化成没有一阶导数项的二阶 Fuchs 方程. 后者的单值群 G 是复域 C 上的二阶特殊线性群 $SL(2, C)$ 的一个子群^[3,4], 由复域上一些 (一般是无限多) 行列式等于 1 的二阶方阵组成.

下面简介一些本文需用的群论的知识^[5]. 设元素 g_1, g_2 属于群 G , 一般将

$$[g_2, g_1] = g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1$$

称为 g_1 与 g_2 的换位子. 由群 G 的所有元素的换位子可生成 G 的一个正规子群, 称为 G 的换位子群或导群, 记为 G' .

群 G 称为可解群是指 G 有如下的正规子群列:

$$G \equiv G_n \supset G_{n-1} \supset \cdots \supset G_1 \supset G_0 \equiv \{E\}, \quad (1)$$

其中 $G_i = G'_{i+1}$, $i=0, 1, 2, \cdots, n-1$, E 是单位元素. 非负整数 n 称为 G 的导出长度.

设 T 是 C 上任一二阶非奇异方阵, 则 $SL(2, C)$ 的子群 G 可经相似变换 $T^{-1}GT$ 变成与 G 同构的子群 $\tilde{G} (\subset SL(2, C))$. G 与 $\tilde{G}$ 的可解性相同.

下面设 $G (\subset SL(2, C))$ 是一可解子群. 通过直接计算判断得知, 按导出列 (1) 的顺序由右向左的所有可能的结构分别为

关于 G_1 的结构. 由于 $G'_1 = E$, 显然 G_1 是 Abel 群, 只能属于下列情况之一:

(I₁) G_1 中仅有元素 E 和 $-E$. 这种 G_1 记为 $G_1^{(1)}$.

(I₂) G_1 中所有的方阵的特征值均等于 1 或 -1 , 而且存在非奇异方阵 T 使得 $\tilde{G}_1 (= T^{-1}G_1T)$ 中所有的元素均化成如下的下三角型:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & \pm 1 \end{pmatrix},$$

其中至少有某一方阵的左下角的 C 值非零. 这种 G_1 记为 $G_1^{(2)}$.

(I₃) 存在某非奇异方阵 T , 使得 $\tilde{G}_1 (= T^{-1}G_1T)$ 中的所有元素均化为如下的对角线型:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix},$$

而且其中至少有某一元素满足 $\mu \neq \pm 1$. 这种 G_1 记为 $G_1^{(3)}$.

关于 G_2 的结构. 与 G_1 的 3 种类型相对应, G_2 也有 3 种类型:

(II₁) 设 $G_2^{(1)}$ 满足 $(G_2^{(1)})' = G_1^{(1)}$. 定存在非奇异阵 T 及一非零复数 β , 使得群 $\tilde{G}_2^{(1)} (= T^{-1}G_2^{(1)}T)$ 是由元素 f 和 g 生成, 其中

$$f = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

(II₂) 设 $G_2^{(2)}$ 满足 $(G_2^{(2)})' = G_1^{(2)}$. 由 (I₂) 可知存在非奇异的 T , 使得 $\tilde{G}_1^{(2)} (= T^{-1}G_1^{(2)}T)$ 中的元

素均为主对角线元素为 ± 1 的下三角型. 这时令 $\tilde{G}_2^{(2)} = T^{-1}G_2^{(2)}T$, 则其所有的元素都必是下三角型方阵, 而且其中至少有一个的特征值不等于 ± 1 .

(II₃) 设 $G_2^{(3)}$ 满足 $(G_2^{(3)})' = G_1^{(3)}$. 由 (I₃) 可知存在非奇异阵 T , 使得 $\tilde{G}_1^{(3)} (= T^{-1}G_1^{(3)}T)$ 中的元素均为对角型. 这时令 $\tilde{G}_2^{(3)} = T^{-1}G_2^{(3)}T$, 则其元素必分成非空的两类: 一类为对角型方阵, 另一类为反对角型方阵.

关于 G_3 与 G_2 的 3 类对应, 直接有以下结果:

(III₁) 不存在满足 $(G_3^{(1)})' = G_2^{(1)}$ 的子群 $G_3^{(1)}$.

(III₂) 不存在满足 $(G_3^{(2)})' = G_2^{(2)}$ 的子群 $G_3^{(2)}$.

(III₃) 不存在满足 $(G_3^{(3)})' = G_2^{(3)}$ 的子群 $G_3^{(3)}$.

综上所述, 便得到关于 $SL(2, C)$ 的可解子群的结构定理:

定理 1 任何 $SL(2, C)$ 的可解子群 G 的导出长度都不超过 2. 当导出长度等于 2 时, G 必属于 (II₁), (II₂), (II₃) 3 种类型之一; 当导出长度等于 1 时, G 必属于 (I₁), (I₂), (I₃) 3 种类型之一.

2 由单值群的可解性定义的可积性

利用定理 1 即可通过可解单值群的结构研究所对应的可积的二阶 Fuchs 方程解的 Riemann 曲面的结构. 本文仅研究在环面 T^2 上只有一个正则奇点的如下二阶 Fuchs 方程:

$$\omega'' - \lambda[\rho(z) + \sigma]\omega = 0, \quad (2)$$

其中 $\omega, z \in C$, λ 与 σ 是复参数, $\rho(z)$ 是周期为 2ω 与 $2\omega' \left(\operatorname{Im} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right) \neq 0 \right)$ 的 Weierstrass 椭圆函数^[9], 它满足如下的微分方程:

$$\rho'^2 = 4(\rho - e_1)(\rho - e_2)(\rho - e_3), \quad (3)$$

这里 $e_1 = \rho(\omega)$, $e_2 = \rho(\omega + \omega')$, $e_3 = \rho(\omega')$. $\rho(z)$ 在 $z=0$ 及其等价点 $z=2m\omega + 2n\omega'$ 处为二阶极点. 正是由于 $\rho(z)$ 的双周期性, 方程 (7) 可以看成定义在由 $\rho(z)$ 的周期四边形将两组对边分别联结起来所形成的环面 T^2 上. 将挖去 $\rho(z)$ 的奇点的环面记作 T_0^2 .

设 $(\varphi(z), \psi(z))$ 为方程 (7) 的任一组基础解, 于是存在方阵 $M(\omega), M(\omega') \in SL(2, C)$, 满足

$$\begin{cases} (\varphi(z+2\omega), \psi(z+2\omega)) = (\varphi(z), \psi(z))M(\omega), \\ (\varphi(z+2\omega'), \psi(z+2\omega')) = (\varphi(z), \psi(z))M(\omega'). \end{cases} \quad (4)$$

由 $M(\omega)$ 和 $M(\omega')$ 可生成 $SL(2, C)$ 的一个子群:

$$G = \langle M(\omega), M(\omega') \rangle. \quad (5)$$

此群就是方程 (2) 的单值群. G 给出了挖了洞的环面 T_0^2 的基本群的一个线性表示.

由 (4) 式及定理 1 可以立即得到如下的定理:

定理 2 如果 Fuchs 方程 (2) 的单值群 G 可解, 则方阵 $M(\omega)$ (注: 不失一般性, 设其已化成 Jordan 型) 和 $M(\omega')$ 及方程的解的 Riemann 曲面结构必属以下情况之一:

(F₁)

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ c & \alpha \end{pmatrix}, \quad M(\omega') = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \gamma & \beta \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha^2 = \beta^2 = 1, c \neq 0$. 此时 G 属于 (I_2) 型. 方程 (2) 所有的解都是单值的. 基础解组中 $\psi(z)$ 是椭圆函数, 沿 ω 方向有周期 2ω (当 $\alpha = 1$ 时) 或 4ω (当 $\alpha = -1$ 时), 沿 ω' 方向有周期 $2\omega'$ (当 $\beta = 1$ 时) 或 $4\omega'$ (当 $\beta = -1$ 时). 若 $\gamma = 0$, 则 $\varphi(z)$ 沿 ω' 方向也有周期 $2\omega'$ 或 $4\omega'$.

(F₂)

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ c & \alpha \end{pmatrix}, \quad M(\omega') = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \gamma & \beta^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha^2 = 1, c \neq 0, \beta^2 \neq 1$. 这时 G 属于 (II_2) 型. $\psi(z)$ 是单值的, 而且有周期 2ω (当 $\alpha = 1$ 时) 或 4ω (当 $\alpha = -1$ 时).

(F₃)

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad M(\omega') = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha^2 \neq 1$. 此时 G 为 (I_3) 型. 方程的解都是单值的.

(F₄)

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad M(\omega') = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha = \pm i$. 此时 G 属 (II_1) 型. 方程 (2) 的任何解都是双周期的, 周期为 8ω 和 $8\omega'$. 又因 $[M(\omega), M(\omega')] = -E$, 所以方程的奇点是所有解的二次代数枝点.

(F₅)

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad M(\omega') = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha^4 \neq 1$. 此时 G 为 (II_3) 型. 方程 (2) 的任何解都有周期 $8\omega'$. 方程的任何解从正则点 z_0 出发, 沿平行四边形闭路 $z_0 \rightarrow z_0 + 2\omega \rightarrow z_0 + 2\omega + 4\omega' \rightarrow z_0 + 4\omega' \rightarrow z_0$ 延拓一周后, 只要闭路上无奇点, 其值仍返回到原值.

(F_{5'})

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad M(\omega') = \begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha = \pm i, \beta\gamma\delta \neq 0$. 此时 G 仍为 (II_3) 型. 事实上若一相似变换将 $M(\omega')$ 化成主对角阵时, 此变换必将 $M(\omega)$ 化成反对角阵. 因此 (F_5') 与 (F_5) 本质上相同, 只是 $M(\omega)$ 与 $M(\omega')$ 的作用顺序相反.

(F₆)

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad M(\omega') = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \gamma & \beta^{-1} \end{pmatrix}$$

(或

$$M(\omega') = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}),$$

其中 $\alpha^2 \neq 1, \gamma \neq 0$. 此时 G 属于 (II_2) 型. 基础解组中的 $\psi(z)$ (或 $\varphi(z)$) 是单值函数.

(F₇) $M(\omega) = \pm E$ (或 $M(\omega') = \pm E$). 此时方程的任何解都是单值周期函数, 周期为

2ω (当 $M(\omega) = E$ 时) 或 4ω (当 $M(\omega) = -E$ 时).

3 环面上 Fuchs 型方程可积性的判定

关于多项式方程, 尽管有 Galois 理论, 但对一任意给定的 5 次或 5 次以上的多项式, 要想精确算出其 Galois 群, 并判断其可解性决非易事. 关于 Fuchs 方程, 情况类似, 对一任意给定的 Fuchs 方程, 一般很难精确算出其单值群并判断其可解性. 另一方面, 二阶 Fuchs 方程在许多数学物理问题中有重要应用. 判断给定的 Fuchs 方程的可积性及有关性质在理论与应用中都极有意义. 实际上, 对球面上一类特殊的 Fuchs 方程—— Gauss 超几何方程人们已做了大量的研究^[7, 8]. 这里仅研究环面 T_0^2 上 Fuchs 方程 (2) 在参数 λ 取一些特殊值时的可积性的判断.

先介绍将用到的关于在 $z=0$ 处有正则奇点的二阶线性常微分方程的一些经典结论^[7]. 研究方程

$$\omega'' + p(z)\omega' + q(z)\omega = 0, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} p(z) &= z^{-1}(p_0 + p_1z + \cdots + p_nz^n + \cdots), \\ q(z) &= z^{-2}(q_0 + q_1z + \cdots + q_nz^n + \cdots). \end{aligned}$$

设 r_1 与 r_2 是下面二次多项式方程的两个根:

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0.$$

如果差 $r_1 - r_2$ 不等于任何正整数, 方程 (6) 在 $z=0$ 附近就有如下两个积分:

$$\omega_1 = z^{r_1} f_1(z), \quad \omega_2 = z^{r_2} f_2(z),$$

其中 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在 $z=0$ 的附近正则. 而当差 $r_1 - r_2$ 等于某个正整数 m 时, 方程 (6) 在 $z=0$ 附近则有如下两个积分:

$$\begin{cases} \omega_1 = z^{r_1} f_1(z), \\ \omega_2 = z^{r_2} \psi_1(z) + \theta_m \omega_1(z) \ln z, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $f_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 在 $z=0$ 附近正则, θ_m 是下面给出的函数 $g(z)$ 在 $z=0$ 处的留数, 即 $\theta_m = \text{Res}(0, g)$,

$$g(z) = c\omega_1^{-2}(z) \exp \left[- \int_{z_0}^z p(z) dz \right]. \quad (8)$$

将上述结果应用到方程 (2), 此时有

$$\begin{aligned} p(z) &= 0, \\ p(z) &= \lambda[\rho(z) + \delta] = \lambda z^{-2}(1 + \delta z^2 + a_1 z^4 + a_2 z^6 + \cdots + a_n z^{2n+2} + \cdots) \end{aligned}$$

(有关 $\rho(z)$ 的展开可参考文献 [6]). 因此, r_1 与 r_2 应是方程

$$r(r-1) - \lambda = 0$$

的两个根. 现仅讨论有整数根的情况. 不难看出, 参数 λ 必须取下列值:

$$\lambda = k(k-1), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

这时就有 $r_1 = k, r_2 = -(k-1), m = r_1 - r_2 = 2k-1$.

由于 $\lambda[\rho(z) + \delta]$ 是 z 的偶函数, 可知 $f_1(z)$ 是 z 的偶函数. 因此当 $r_1 = k$ 时, $\omega_1^2(z)$ 与由 (8) 式定义的 $g(z)$ 也都是 z 的偶函数. 于是有 $\theta_m = \text{Res}(0, g) = 0$. 这时方程 (2) 的对应于 (7) 式的两个积分就成为

$$\omega_1 = z^k f_1(z), \quad \omega_2 = z^{-(k-1)} \psi_1(z).$$

它们在 $z=0$ 附近无临界奇点, 所以方程 (2) 的解在这里都是单值的. 由此可断定方程 (2) 的单值群的生成元 $M(\omega)$ 和 $M(\omega')$ 的换位子等于单位阵 E , 也就是说 G 是一 Abel 群. 这样就得到如下的定理:

定理 3 当 $\lambda = k(k-1) (k=1, 2, 3, \dots)$ 时, 方程 (2) 的单值群 G 是一 Abel 群, 是可解的. 此时方程的可积性意味着它的任何解都是单值的.

在 $\rho(z)$ 满足

$$\rho'^2(z) = 4\rho(z)[\rho^2(z) - 1],$$

并且在 $\lambda=6, \delta=0$ 的条件下, 进一步证明了^[9]

$$M(\omega) = M(\omega') = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}.$$

这时基础解组中的 $\psi(z)$ 是一周期为 4ω 和 $4\omega'$ 的椭圆函数. 在文献 [10], 又论证了当方程 (2) 不可积时, 等价的 Riccati 方程的解空间的复杂性.

参 考 文 献

- 1 Watson G N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed. London: Cambridge, 1944. 111 ~ 123
- 2 Kolchin E R. Differential Algebra and Algebraic Group. New York: Academic Press Inc, 1973
- 3 Ил'яшенко Ю. S. Ordinary Differential Equations, Dynamical Systems I. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 128 ~ 130
- 4 Eastham M S P. The Spectral Theory of Periodic Differential Equations. Edinburgh: Scottish Academic Press Ltd, 1973. 1 ~ 6
- 5 Robinson D J S. A Course in the Theory of Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1982
- 6 Palka B P. An Introduction to Complex Function Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 486 ~ 489
- 7 Глубев В. V. Lectures on the Analytic Theory of Differential Equations. 2nd ed. Moscow: Gos Izd Tekh Teor Lit, 1950
- 8 Khovanskij A G. On the representability of functions in quadratures. Usp Mat Nauk 26, 1971, 160(4): 251 ~ 252
- 9 马 玲, 杨朝霞, 管克英. 关于一类环面 T^2 上 Fuchs 型方程的可积性. 科学通报, 1995, 40(12): 1064 ~ 1067
- 10 陈祖明, 管克英. 复域双周期 Riccati 方程解空间极限集的复杂性. 中国科学, A 辑, 1994, 24(8): 800 ~ 807