

Alfvén 脉动的波动——串级理论

涂 传 诒 魏 奉 思

(北京大学地球物理系) (中国科学院空间物理研究所, 北京)

濮 祖 荫

(北京大学地球物理系)

摘 要

本文提出了一个新的关于 Alfvén 脉动的理论模式。假设脉动处于一种不对称的 MHD 湍流状态, 这时主要的脉动能量分布在向外传播的具有不同波矢的 Alfvén 模式中, 但是存在着小振幅的向内传播的 Alfvén 模式。相反方向传播的两个模式之间存在着弱的非线性相互作用, 它将导致能量向高频串级传输。这一串级过程和脉动与太阳风流的相互作用这两者, 决定脉动能谱的径向发展。本文由行星际介质服从的磁流体力学方程组出发, 导出了不可压缩小尺度脉动的控制方程, 脉动的相关矩方程, 最后得到能谱方程和它的解析解。应用 Helios 观测到的太阳风参数值, 对 0.3—0.9AU 计算了能谱的径向变化, 计算结果与 Helios 观测得到的谱的径向变化相符。

一、引 言

文献 [1—8] 分析讨论了关于太阳风中 Alfvén 脉动的直接观测结果, 并给出了 Alfvén 脉动的主要特性。脉动中速度扰动矢量 $\bar{u}$ 与磁场扰动矢量 $\bar{b}$ 之间有很高的相关性; 脉动能谱覆盖很宽的频率范围 ($10^{-4} \sim 10^{-1} \text{Hz}$); 在 1AU 处谱指数约为 -1.6 ; 随着日心距离减小低频端谱指数量值减小而高频端谱指数不变; 谱密度的径向变化梯度也同频率有关。

目前有关 Alfvén 脉动的理论^[9—17]都不能解释上述 Alfvén 脉动的主要特点。一些作者认为 Alfvén 脉动是由太阳向外传播的 Alfvén 波组成的^[9—12], 另一些作者认为 Alfvén 脉动是一种 MHD 湍流^[1, 14, 15]。虽然每种模式都各自能解释一两种观测事实, 但所有的模式都不能解释 Alfvén 脉动能谱的径向发展, 且波动和湍流的解释是相互排斥的^[16]。

涂传诒^[18, 19]由流体力学方程导出了非线性的 Alfvén 脉动的控制方程, 并首次提出了包括能量由低频向高频串级传输的 Alfvén 脉动的谱方程, 初步解释了 Alfvén 脉动的特征。在此基础上, 本文进一步提出了与这一谱方程相应的关于 Alfvén 脉动的新的理论模式, 严格地由 Alfvén 脉动的控制方程, 导出了这一谱方程和相应的能量传输函数, 并给出了一个解析解。由于这一模式既考虑了脉动的波动性又考虑了脉动的湍流特性, 因而它不仅能统一地解释以往

波动模式和湍流模式所各自能解释的现象,而且能解释上述两类模式都不能解释的现象。

在这模式中,我们假定等离子体密度只有大尺度变化而没有小尺度扰动,这是因为观测到的密度的相对变化很小^[20]。此外,还作了如下假设。

假设 1. 由 0.3AU 至 1AU, Alfvén 脉动处于不对称的 MHD 湍流状态,其中向外传播的模式 (δz^-) 占绝对优势,比值 $(\delta z^+)^2/(\delta z^-)^2 \equiv \alpha_1$ 在所考虑的频率范围是一小量,为 0.1 的量级,其中 $\delta z^- = \frac{1}{2}(\bar{u} - \bar{b}/\sqrt{4\pi mn})$, $\delta z^+ = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{b}/\sqrt{4\pi mn})$ 为具有不同交叉螺旋性的波模。提出这一假设的理由如下。1) 在这一假设下得到的结果与观测相符合。2) $\bar{u}$ 与 $\bar{b}$ 之间的相关系数近似为^[2] $\langle(\delta z^+)^2 - (\delta z^-)^2\rangle/\langle(\delta z^+)^2 + (\delta z^-)^2\rangle \sim 0.8$, 与通常实测值一致。3) $\alpha_1 = 0$ 相当于波动模式的假设。这种情况下,波与波之间没有非线性相互作用,谱指数不会有径向变化。若 $\alpha_1 = 1$, 脉动处于对称的湍流状态,不出现 $\bar{u}$ 与 $\bar{b}$ 的高相关性^[15]。当 α_1 为一小量时, $\bar{u}$ 与 $\bar{b}$ 之间有较高的相关性,同时脉动中也存在着非线性相互作用。这正是描述 Alfvén 脉动谱的径向发展所需要的。4) 许多机制有可能产生向内传播的 Alfvén 波,例如太阳风中流速剪切产生的不稳定性^[21,15], 向外传播的 Alfvén 波在各种不均匀结构^[22]上的反射或散射,质子和电子分布函数的非热特性产生的不稳定性等。

假设 2. $\alpha_1 = \text{常数}$, 不随频率和日心距离变化。本模式不要求 α_1 是一严格的常数。假设 2 可看做是 α_1 在一定范围内变化状态的近似描述。作为理论探讨的第一步,我们由这一假设出发得到描述这种极不对称 MHD 湍流状态的解析解。

假设 3. 平行于平均磁场方向的脉动分量远小于在垂直磁场方向的脉动分量,这是一个观测事实^[23]。

假设 4. 总压力扰动与速度扰动矢量的相关矩可在矩方程中被略去。可以证明,对于各向同性湍流^[24]以及对于简单波^[25],这一相关矩都为零。

本模式的主要想法如下。 $\delta \bar{z}^+$ 与 $\delta \bar{z}^-$ 的非线性相互作用将导至大尺度脉动中的一小部份能量串级到小尺度,直到达到足够小的尺度而耗散。最可能的耗散机制是 Coleman 1968^[1] 指出的质子迴旋衰减。这种串级过程与背景等离子体大尺度的变化,两者共同决定 Alfvén 脉动能谱的径向发展。

二、不可压脉动控制方程

在与太阳共转的参考系中,行星际介质的动力过程满足如下的方程式^[10]

$$\frac{dn}{dt} + n \cdot \bar{V} = 0, \quad (1)$$

$$mn \left\{ \frac{d\bar{V}}{dt} + 2\bar{\Omega} \times \bar{V} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) \right\} + \nabla(2nk_B T) - mn \nabla \frac{GM}{r} + \frac{\bar{B}}{4\pi} \times (\nabla \times \bar{B}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{V} \bar{B} - \bar{B} \bar{V}) = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0, \quad (4)$$

其中 $\bar{V}$ 是太阳风速度, n 是质子数密度, $\bar{\Omega}$ 是太阳自转的角速度, G 是引力常数, M 是太阳的

质量, T 是等离子体温度(应由能量方程来决定), k_B 是波尔兹曼常数, $\bar{B}$ 是磁场矢量.

Whang (1980)^[10] 提出行星际介质中的运动过程可以看做是由两种不同时间尺度的现象组成: 小时间尺度的脉动和大时间尺度的背景等离子体流. 小时间尺度在 10 s 至 10^4 s 之间, 大时间尺度在 10 h 至 10^3 h 之间. 假定背景流动变化的空间尺度为 L , 而脉动空间变化的尺度为 l , 有

$$l/L = \varepsilon \ll 1. \quad (5)$$

为了分开这两个时间尺度的现象, 引入任意参量 A 的时间平均如下:

$$\langle A(\bar{r}, t) \rangle = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} A(\bar{r}, t + \tau) d\tau, \quad (6)$$

$\bar{r}$ 是日心坐标系中的位置矢量, T_c 是取平均所用的时间间隔, 应大于小时间尺度小于大时间尺度. 在共转参考系中一固定点, $\bar{V}$ 和 $\bar{B}$ 的平均值 $\bar{U} = \langle \bar{V} \rangle$, $\bar{B}_0 = \langle \bar{B} \rangle$ 分别为大时间尺度背景等离子体流的速度和磁场矢量. $\bar{u} = \bar{V} - \bar{U}$ 和 $\bar{b} = \bar{B} - \bar{B}_0$ 分别为小尺度脉动速度矢量和磁场矢量. 由于 n 只有大时间尺度的变化, 方程 (1)–(4) 的时间平均给出大时间尺度背景流动的控制方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \bar{U} \cdot \nabla n + n \nabla \cdot \bar{U} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} mn \left\{ \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla \bar{U} + 2\bar{Q} \times \bar{U} + \bar{Q} \times (\bar{Q} \times \bar{r}) \right\} + \nabla(2nkT) \\ + mn \nabla \frac{GM}{r} - \frac{1}{4\pi} \bar{B}_0 \times (\nabla \times \bar{B}_0) \\ - \nabla \cdot \left(\frac{\langle \bar{b}\bar{b} \rangle}{4\pi} - mn \langle \bar{u}\bar{u} \rangle - \frac{\langle b^2 \rangle}{8\pi} \mathbf{I} \right) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{U} \bar{B}_0 - \bar{B}_0 \bar{U}) = \nabla \cdot \langle \bar{b}\bar{u} - \bar{u}\bar{b} \rangle, \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \bar{B}_0 = 0. \quad (10)$$

这一组方程与 Whang^[10] 得到的结果相同. 将方程式 (1)–(4) 分别减去 (7)–(10), 我们得到不可压脉动的控制方程组为:

$$\nabla \cdot (n\bar{u}) = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{U} - \frac{1}{4\pi mn} \bar{B}_0 \cdot \nabla \bar{b} - \frac{1}{4\pi mn} \bar{b} \cdot \nabla \bar{B}_0 \\ + \frac{1}{mn} \nabla \cdot \left[mn (\bar{u}\bar{u} - \langle \bar{u}\bar{u} \rangle) - \frac{1}{4\pi} (\bar{b}\bar{b} - \langle \bar{b}\bar{b} \rangle) \right] = - \frac{1}{mn} \nabla p^T, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla \bar{b} + \bar{b} \cdot \nabla \bar{U} - \bar{B}_0 \cdot \nabla \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{B}_0 + \bar{B}_0 \nabla \cdot \bar{u} \\ + \nabla \cdot [\bar{u}\bar{b} - \langle \bar{u}\bar{b} \rangle - (\bar{b}\bar{u} - \langle \bar{b}\bar{u} \rangle)] = -(\nabla \cdot \bar{U})\bar{b}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \bar{b} = 0, \quad (14)$$

其中

$$p^T = p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{\langle B^2 \rangle}{8\pi}$$

为总压力的扰动, p 为热压力的扰动量. 在推导过程中略去了太阳自转对小尺度脉动的影响, 这是因为太阳自转的频率比脉动的频率小得多. 这一组小时间尺度脉动的控制方程是涂传诒^[18]首次提出的, 它与文献 [10] 中给出的控制方程有很大的不同. 这一组方程是非线性的, 这使得我们在一般情况下不能用 WKB 解求解这一组方程^[18]. 又由于 Alfvén 脉动有明显的湍流特点, 它通常不能用平面简单波来描述^[16]. 下面我们用通常湍流理论所用的方法来处理这一组方程.

三、Alfvén 脉动的能谱方程

我们对于时刻 t_i , 取 (12) 式的 i 分量, 乘以 $4\pi mn(u_i)_B$, 下标 B 表示时刻 t_B , 得到

$$\begin{aligned} & 4\pi mn(u_i)_B \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_i + 4\pi mn(u_i)_B (u_k)_A \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)_A + 4\pi mn(u_i)_B (U_k)_A \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_A \\ & - (u_i)_B (b_k)_A \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_k} \right)_A - (u_i)_B (B_{0k})_A \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_k} \right)_A \\ & = -(u_i)_B \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (4\pi mn[u_k u_i - \langle u_k u_i \rangle] - (b_k b_i - \langle b_k b_i \rangle)) \right]_A \\ & - 4\pi \left(\frac{\partial p^T}{\partial x_i} \right)_A (u_i)_B, \end{aligned} \quad (15)$$

这里 $i, j, k = 1, 2, 3$, 表示在任意直角坐标系中的三个分量. 同样地, 对于时刻 t_B 取 (12) 式的 j 分量乘以 $4\pi mn(u_i)_A$, 与 (15) 式相加, 得到:

$$\begin{aligned} & 4\pi mn \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_A + \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_B \right) (u_i)_A (u_i)_B + 4\pi mn(u_i)_B (u_k)_A \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)_A \\ & + 4\pi mn(u_i)_A (u_k)_B \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)_B + 4\pi mn(U_k)_A \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_i)_A (u_i)_B \\ & + 4\pi mn(U_k)_B \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (u_i)_B - (u_i)_B (b_k)_A \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_k} \right)_A \\ & - (u_i)_A (b_k)_B \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_k} \right)_B - (B_{0k})_A \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_i)_B (b_i)_A \\ & - (B_{0k})_B \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (b_i)_B \\ & = -(u_i)_B \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (4\pi mn(u_k u_i - \langle u_k u_i \rangle) - (b_k b_i - \langle b_k b_i \rangle)) \right]_A \\ & - (u_i)_A \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (4\pi mn(u_k u_i - \langle u_k u_i \rangle) - (b_k b_i - \langle b_k b_i \rangle)) \right]_B \\ & - 4\pi \left(\left(\frac{\partial p^T}{\partial x_i} \right)_A (u_i)_B + \left(\frac{\partial p^T}{\partial x_i} \right)_B (u_i)_A \right). \end{aligned} \quad (16)$$

同样地, 对时刻 t_A , 取 (13) 式的 i 分量, 乘以 $(b_i)_B$, 再对时刻 t_B , 取 (13) 式的 j 分量, 乘以 $(b_i)_A$. 将这两方程与 (16) 式相加, 然后令 $\tau \equiv t_B - t_A$ 为一常数对 t_B 取平均, 得到

$$\langle (u_i)_B (u_k)_A \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \langle (u_i)_A (u_k)_B \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \langle (b_i)_B (b_k)_A \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \langle (b_i)_A (b_k)_B \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\pi mn U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \langle (u_i)_A (u_j)_B \rangle + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \langle (b_i)_A (b_j)_B \rangle \\
& - \langle (u_i)_B (b_k)_A \rangle \frac{\partial B_i}{\partial x_k} - \langle (u_i)_A (b_k)_B \rangle \frac{\partial B_i}{\partial x_k} \\
& + \langle (b_j)_B (u_k)_A \rangle \frac{\partial B_j}{\partial x_k} + \langle (b_j)_A (u_k)_B \rangle \frac{\partial B_j}{\partial x_k} \\
& - B_{0k} \frac{\partial}{\partial x_k} \langle (u_i)_A (b_j)_B \rangle - B_{0k} \frac{\partial}{\partial x_k} \langle (b_i)_A (u_j)_B \rangle \\
& + 2(\nabla \cdot \bar{U}) \langle (b_i)_A (b_j)_B \rangle = NL_{ij} + Q_{ij} + P_{ij}, \quad (17)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
Q_{ij} &= \langle (B_{0i} \nabla \cdot \bar{u})_A (b_j)_B + (B_{0j} \nabla \cdot \bar{u})_B (b_i)_A \rangle, \\
P_{ij} &= -4\pi \left\langle \left(\frac{\partial p^T}{\partial x_i} \right)_A (u_j)_B + \left(\frac{\partial p^T}{\partial x_j} \right)_B (u_i)_A \right\rangle, \\
NL_{ij} &= - \left\langle (u_i)_B \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (4\pi mn (u_k u_i - \langle u_k u_i \rangle) - (b_k b_i - \langle b_k b_i \rangle)) \right]_A \right. \\
&\quad + (u_i)_A \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (4\pi mn (u_k u_j - \langle u_k u_j \rangle) - (b_k b_j - \langle b_k b_j \rangle)) \right]_B \\
&\quad + (b_j)_B \left[\frac{\partial}{\partial x_k} ((u_k b_i - \langle u_k b_i \rangle) - (b_k u_i - \langle b_k u_i \rangle)) \right]_A \\
&\quad \left. + (b_j)_A \left[\frac{\partial}{\partial x_k} ((u_k b_j - \langle u_k b_j \rangle) - (b_k u_j - \langle b_k u_j \rangle)) \right]_B \right\rangle, \quad (18)
\end{aligned}$$

公式中符号

$$\langle M_B N_A \rangle \equiv \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} M(t_A + \tau) N(t_A) dt_A. \quad (19)$$

在推导中,假设脉动是稳恒的,有

$$\left\langle \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_A + \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_B \right) (u_i)_A (u_j)_B \right\rangle = 0. \quad (20)$$

我们看到,矩方程(17)是非常复杂的。我们仅在引言中所叙假设下讨论这一方程。将引言中 $\delta \bar{z}^+$ 和 $\delta \bar{z}^-$ 分别改写为 $\bar{u}_1$ 和 $\bar{u}_0$, 于是有:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \bar{u}_1, \quad (21)$$

$$\bar{b} = \bar{b}_0 + \bar{b}_1, \quad (22)$$

其中

$$\bar{u}_0 = - \frac{\bar{b}_0}{\sqrt{4\pi mn}}, \quad (23)$$

$$\bar{u}_1 = + \frac{\bar{b}_1}{\sqrt{4\pi mn}}. \quad (24)$$

根据假设(1), $\bar{u}_1$ 和 $\bar{b}_1$ 的能量比 $\bar{u}_0$ 和 $\bar{b}_0$ 的能量小一个量级。将(21)和(22)式代入方程(11)–(14)略去小量后,得到关于 $\bar{u}_0$ 和 $\bar{b}_0$ 的线性化方程。 $\bar{u}_0$ 和 $\bar{b}_0$ 可以看做是由太阳向外传播的 Alfvén 模式。在小振幅极限下, $\bar{u}_1$ 和 $\bar{b}_1$ 可以被解释为向太阳传播的 Alfvén 模式。在有限振幅下, $\bar{u}_1, \bar{b}_1$ 与 $\bar{u}_0, \bar{b}_0$ 之间产生非线性相互作用,导致脉动能量向高频区串级。零阶 Alfvén

波 $\bar{u}_0$, $\bar{b}_0$ 的振幅将要受到这一能量串级过程以及大尺度背景流的变化影响。

将 (21)–(24) 式代入 (17) 式, 保留至一级项, 有

$$U_k \frac{\partial}{\partial x_k} H_{ij} + B_{0k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\sqrt{4\pi mn}} H_{ij} + (\nabla \cdot \bar{U}) H_{ij} = NL_{ij}^{(1)} + Q_{ij}^{(1)} + P_{ij}^{(1)}, \quad (25)$$

其中

$$H_{ij} = H_{ij}(x_1, x_2, x_3, \tau) = \langle (b_{0i})_A (b_{0j})_B \rangle, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} NL_{ij}^{(1)} = & - \left\langle 4\pi mn (u_{0j})_B \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_{0k} u_{1i} + u_{1k} u_{0i})_A \right. \\ & + 4\pi mn (u_{0i})_A \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_{0k} u_{1j} + u_{1k} u_{0j})_B \\ & + (b_{0j})_B \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_{0k} b_{1i} + u_{1k} b_{0i})_A \\ & \left. + (b_{0i})_A \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_{0k} b_{1j} + u_{1k} b_{0j})_B \right\rangle, \quad (27) \end{aligned}$$

$$Q_{ij}^{(1)} = \left\langle B_{0i} \left(-\frac{1}{n} \bar{u}_0 \cdot \nabla n \right)_A (b_{0j})_B + B_{0j} \left(-\frac{1}{n} \bar{u}_0 \cdot \nabla n \right)_B (b_{0i})_A \right\rangle,$$

$$P_{ij}^{(1)} = -4\pi \left\langle \left(\frac{\partial P_1^T}{\partial x_i} \right)_A (u_{0j})_B + \left(\frac{\partial P_1^T}{\partial x_j} \right)_B (u_{0i})_A \right\rangle.$$

P_1^T 为 P^T 的一级扰动量, 其零级扰动量为零. 将 $i = j$ 代入 (17) 式, 考虑到假设 3–4, 经过某些变换有:

$$(\bar{U} + \bar{V}_A) \cdot \nabla H_{ii} + H_{ii} \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} \bar{U} + \bar{V}_A \right) = NL_{ii}^{(1)}, \quad (28)$$

其中

$$H_{ii} = \langle b_1(t) b_1(t + \tau) + b_2(t) b_2(t + \tau) + b_3(t) b_3(t + \tau) \rangle. \quad (29)$$

我们已经略去了 $Q_{ii}^{(1)}$ 和 $P_{ii}^{(1)}$. 因为

$$Q_{ii}^{(1)}(\tau) < Q_{ii}^{(1)}(0) = \left\langle 2\bar{B}_0 \cdot \bar{b}_0 \left(-\frac{1}{n} \bar{u}_0 \cdot \nabla n \right) \right\rangle. \quad (30)$$

由于 $b_{\parallel}$ 是一小量, 与等式右端比较, 可以略去.

为了导出能谱方程, 引入 $H_{ii}(\tau)$ 的富氏变换

$$P(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau H_{ii}(\tau) \exp[-i(2\pi f\tau)] = 4 \int_0^{\infty} d\tau H_{ii}(\tau) \cos(2\pi f\tau), \quad (31)$$

$$H_{ii}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df \exp[i(2\pi f\tau)] P(f) = \int_0^{\infty} df P(f) \cos(2\pi f\tau). \quad (32)$$

将 (32) 式代入 (28) 式, 我们得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} df \exp[i(2\pi f\tau)] \left[(\bar{U} + \bar{V}_A) \nabla P(f, \bar{r}) + P(f, \bar{r}) \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} \bar{U} + \bar{V}_A \right) - W(f, \bar{r}) \right] = 0, \quad (33)$$

上式满足的充分条件是

$$(\bar{U} + \bar{V}_A) \cdot \nabla P(f, \bar{r}) + P(f, \bar{r}) \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} \bar{U} + \bar{V}_A \right) = W(f, \bar{r}), \quad (34)$$

其中

$$W(f, r) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp[-i(2\pi f)\tau] NL_{ii}^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial f} F(f, \bar{r}). \quad (35)$$

方程 (34) 可以写为:

$$\nabla \cdot \left(\left(\frac{3}{2} \bar{U} + \bar{V}_A \right) \frac{P(f, \bar{r})}{4\pi} \right) - \bar{U} \cdot \nabla \left(\frac{P(f, \bar{r})}{8\pi} \right) = -\frac{\partial}{\partial f} \frac{F(f, \bar{r})}{4\pi}. \quad (36)$$

上式可称做 Alfvén 脉动的谱方程, 由涂传诤^[19]首次提出, 本文给出了相应的模式和理论推导. 式中 $F(f, \bar{r})/4\pi$ 可以解释为在 $\bar{r}$ 处在单位时间单位体积内由能谱中 f 的低频部分向其高频部份传输的能量. (36) 式右端是在单位频率区间内由于能量串级导致的能量增益. 等式左端第一项是在单位频率区间内在单位时间内流出单位体积元的 Alfvén 波能量, 等式左端第二项是单位频率区间内单位体积内的波压对流体所做的功. (36) 式可被看做是脉动的能量守恒方程.

因为 $F(f, \bar{r})$ 是由三阶相关矩决定的, 而 $P(f, \bar{r})$ 是由二阶相关矩决定的, 为了求解方程 (47), 需要找到两未知函数之间的关系. 正如流体湍流理论一样, 这不能由流体力学方程严格地导出^[20]. 我们用量纲分析的方法来估计 $F(f, \bar{r})$. 假定非线性相互作用相对波数 k_e 是局部的. k_e 是波矢 $\bar{k}$ 平行于磁场方向的分量. 考虑两沿磁场方向具有相同尺度 l 的波包 u_{0l} 和 u_{1l} 之间的相互作用. 将 (21) 和 (22) 式中的 u_0 和 u_1 代换为 u_{0l} 和 u_{1l} , 代入到方程 (12) 中左端的第一项和最后一项, 保持到一阶量, 得到 $\Delta u_{0l}/\tau_1 \sim u_{0l}u_{1l}/l$, 其中 Δu_{0l} 是在相互作用时间 τ_1 内, 由于 u_{0l} 和 u_{1l} 之间的非线性相互作用导致的 u_{0l} 的变化. 在行星际空间, 通常有 $u_{0l} < V_A$. 通过比较 (12) 式左端的第一项和第四项的量级, 我们得到 $\tau_1 = l/V_A$. 三阶相关矩 $NL_{ii}^{(1)}$ 的量级估计为 $NL_{ii}^{(1)} \sim 4\pi mn u_{0l} \Delta u_{0l} u_{1l}/l$. 由 (35) 式我们看到, F 与 $NL_{ii}^{(1)}$ 的量纲相同. 将上面得到的结果代入 $NL_{ii}^{(1)}$ 的估计式, 得到

$$F(l) \sim 4\pi mn al^{-1} V_A^{-1} (u_{0l})^2 (u_{1l})^2. \quad (37)$$

考虑到 (32), (31) 和 (23) 式, u_{0l}^2 估计为 $u_{0l}^2 \sim fP(f) \frac{1}{4\pi mn}$. 又由假设 (1) 得到

$$u_{1l}^2 \sim \alpha_1 fP(f)/4\pi mn.$$

l 估计为 $(U + V_A)/2\pi f$. 将这些结果代入 (37) 式, 我们得到 $F(f, r)$ 和 $P(f, r)$ 之间的关系式如下:

$$F(f, r) = \frac{1}{2} A_0^{-2} \frac{1}{mn} \frac{1}{(U + V_A)V_A} fP^2(f), \quad (38)$$

式中 $A_0^2 = \frac{1}{\alpha\alpha_1}$. 方程 (36) 和 (38) 组成了一封闭的方程组, 由这一组方程, 我们可以求得 Alfvén 脉动能谱的径向发展.

四、能谱方程的解析解及与观测的比较

方程 (36), (38) 是一个准线性一阶方程. 如果边界条件

$$P(f, r_0) = P_0(f) \quad (39)$$

给定, (36) 式可用特征线法积分. 我们取 Helios 在 0.29AU 的实测谱^[7]为 $P_t(f)$. 利用 Helios 在 0.87AU 处观测到的相应于 $f_0 = 3.2 \times 10^{-3}\text{Hz}$ 的谱密度确定模式中的待定常数 A_0 . 然后,

由方程 (36), (38) 计算 0.41AU, 0.65AU 及 0.87AU 处的谱, 并与实测结果比较. 下面给出方程的一个解析解.

$$P(f, r) = \frac{2\sqrt{n}}{\left(\frac{V}{V_A \cos \phi} + 1\right)^2} P_f^* f^{-2} f_c (\sqrt{1 + f f_c^{-1}} - 1), \quad (40)$$

$$\text{其中 } c(r) = \frac{1}{2} A_0^{-2} \frac{1}{m} \frac{V_A \cos^3 \phi}{\sqrt{n}} \frac{1}{(V + V_A \cos \phi)^4},$$

$$f_c(r)^{-1} = f_{c0}^{-1} + 4P_f^* \int_{r_0}^r c(r') dr', \quad (41)$$

式中 $f_{c0} = 10^{-3} \text{Hz}$, $P_f^* = 757.17 r^2 \text{cm}^{3/2}$

由 (40) 式我们看到: 当 $f \ll f_c$ 时, $P(f, r) \propto f^{-1}$; 当 $f \gg f_c$, $P(f, r) \propto f^{-1.5}$. 随着 r 的增加, f_c 减小, $P(f, r)$ 随 f 变化的斜率发生变化. 如果没有串级过程, $\alpha_1 = 0$, f_c 将是一个常数, $P(f, r)$ 的斜率将不随 r 而变化, 这是通常 Alfvén 波的 WKB 解. 若 $\alpha \neq 0$, 谱斜率发生变化. 正是串级过程起了谱的斜率的变化.

在下面计算中所用到的太阳风参数如下:

$$n = n_0(r/r_0)^{-2}, \quad \cos \phi = [1 + (Q/V)^2]^{-1/2},$$

$$Q = 2.7 \times 10^{-6} \text{rad/s}, \quad B_0 = B_r / \cos \phi,$$

$$B_r = B_{r_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2},$$

$V = 635 \text{km/s}$. $n_0 = 59.45/\text{cm}^3$ (相应于 1AU 的质子通量为 $3 \times 10^8 \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$), B_{00} (B_0 在 r_0 处的值) 取为 $41.7r$. 这些数值是根据 Helios 1 和 2 在观测到脉动能谱的径向发展期间内观测到的太阳风速度值^[5]、背景磁场值^[7]和通常高速流中质子通量的典型值^[27]选取的. 由解析解 (40) 式得到的结果, 示于图 1 以及表 1 中. 图 1 中的四条实线曲线分别表示计算得到的 0.29AU, 0.41AU, 0.65AU 及 0.87AU 处的在频率范围 ($2.8 \times 10^{-4} - 10^{-1}$)Hz 内的能谱. 我们看到, 由 0.3AU 至 0.9AU, 在 $f \geq 10^{-1.5} \text{Hz}$ 的频率范围, 谱的斜率保持不变, 约为 -1.45 , 而在低频范围 ($f \leq 2.5 \times 10^{-3} \text{Hz}$) 谱变得越来越陡. 计算得到的谱与实测谱接近重合. 表 1 中给出了计算得到的以及观测得到的在频率范围 ($2.8 \times 10^{-4} \text{Hz}$, $-2.5 \times 10^{-3} \text{Hz}$) 内在四个不同日心距离上谱的斜率. (40) 式预计的由 0.3AU 至 0.9AU 的谱的斜率值是不断增加的, 与观测结果的变化趋势一至, 而 Alfvén 波模式 (相当于 $\alpha_1 = 0$) 预计谱的斜率是不变化的.

我们还计算了不同频率范围内的平均谱密度随日心距离的变化, 脉动的耗散长度随频率

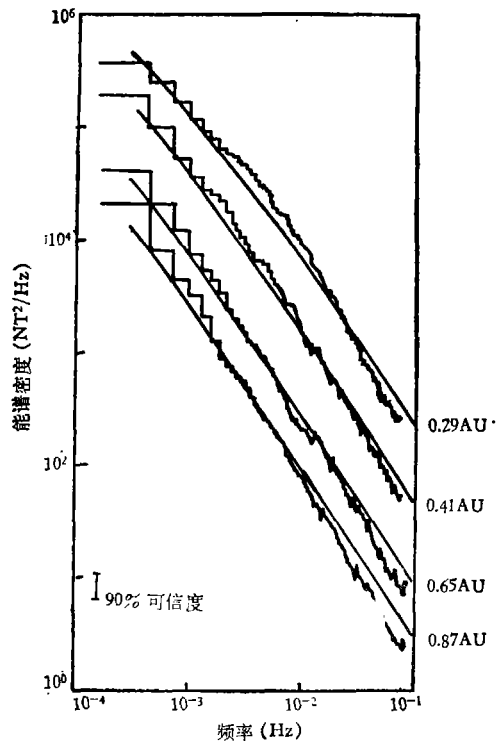


图 1 由 (40) 式计算得到的在 0.29AU, 0.41AU, 0.65AU 及 0.87AU 四个日心距离上的能谱 (Helios 1 和 2 测到的能谱^[7]也示于图中)

表 1 在频率范围 $2.8 \times 10^{-4} \text{Hz} - 2.5 \times 10^{-3} \text{Hz}$, 四个日心距离上由观测得到的^[7], 根据本文模式计算得到的以及 Alfvén 波模式预计的能谱斜率

r (AU)	观 测 值			本模式预计	Alfvén 波 模式预计
	Bxsc	Bysc	Bzsc		
0.29	0.84 ± 0.25	0.89 ± 0.23	0.95 ± 0.23	1.13	1.13
0.65	1.22 ± 0.25	1.13 ± 0.34	1.19 ± 0.16	1.25	1.13
0.41	1.32 ± 0.22	1.32 ± 0.35	1.36 ± 0.21	1.33	1.13
0.87	1.60 ± 0.26	1.59 ± 0.30	1.52 ± 0.1	1.36	1.13

的变化,以及 $\langle b^2 \rangle$ 和 $\langle b^2 \rangle / B_0^2$ 随日心距离的变化。所有这些结果都与观测^[7,8]相符合^[12]。

五、讨 论

Helios 1 和 2 观测到的 Alfvén 脉动能谱的径向发展提出了一个理论问题。为了解释观测到的现象,我们提出了一个新的理论模式,导出了 Alfvén 脉动的能谱方程及其解析解。计算结果表明,这一模式解释了有关 Alfvén 脉动的主要观测结果^[7]。

本文的计算结果说明,在 Alfvén 脉动的理论中引入能量串级的概念是合理而且必要的。然而本文给出的能流函数(38)式不是能流函数 $F(f, \bar{r})$ 的唯一形式。文献[19]给出了 $F(f, \bar{r})$ 的另一形式。目前观测结果的精度不足以确定那一种形式是正确的。能流函数无法唯一确定的困难在流体湍流理论中也是存在的。

本文认为在所考虑的频率范围内脉动不直接耗散。这是因为对于所考虑的空间范围, Alfvén 脉动不经受由库仑碰撞引起的耗散^[20]。

Alfvén 脉动中的能量串级过程是与太阳风的加速过程相联系的。因为串级到高频区的能量可能被质子回旋衰减而转化为太阳风的热能。进一步的工作需要将能谱方程与太阳风的磁流体力学方程组联立起来求得整个问题的自恰解。本文所用给定太阳风速度求脉动谱径向发展的近似方法,对于 0.3AU 至 0.9AU 是合理的。因为理论计算^[29]和实际观测^[3]都表明在这一空间范围脉动的径向变化对太阳风速度的影响很小。

吴林襄、肖佐、赵学溥和周道琪等同志对本文初稿给予了有益的讨论,作者在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Coleman, P. J., Jr., *Ap. J.*, **153**(1968), 371.
- [2] Belcher, J. W. and Davis, L., Jr., *J. Geophys. Res.*, **76**(1971), 3534.
- [3] Burlaga, L. F., *Space Sci. Rev.*, **23**(1979), 201.
- [4] Behannon, K. W., *Rev. Geophys. Space Phys.*, **16** (1978), 125.
- [5] Villante, U., *J. Geophys. Res.*, **85**(1980), 6869.
- [6] Bavassano, B., et al., *Solar Phys.*, **78**(1982), 373.

1) Tu, Chuan-yi, Pu Zu-yin and Wei Feng-si, *The International Workshop on Solar Physics and Interplanetary Travelling Phenomena*, 1983.

2) 涂传治、董力,天体物理学报,待发表。

- [7] Bavassano, B. et al., *J. Geophys. Res.*, **87**(1982), 3617.
- [8] Denskat, K. U. and Neubauer, F. M., *ibid.*, **87**(1982), 2215.
- [9] Whang, Y. C., *ibid.*, **78**(1973), 7221.
- [10] Whang, Y. C., *ibid.*, **85**(1980), 2285.
- [11] Hollweg, J. V., *ibid.*, **79**(1974), 1539.
- [12] Jaques, S. A., *Ap. J.*, **215**(1977), 942.
- [13] Kraichan, R. H., *Phys. Fluids.*, **8**(1965), 1385.
- [14] 刘振兴, 空间物理论文集, 科学出版社, 1980, 17.
- [15] Dobrowolny, M. et al., *Phys. Rev. Letters.*, **45**(1980), 45.
- [16] Dobrowolny, M. et al., *Astron. Astrophys.*, **83** (1980), 26.
- [17] Barnes, A., in *Solar System Plasma Physics* (Ed. Parker, E. N.), North-Holland, Amsterdam, 1979, 251.
- [18] 涂传诒, 空间科学学报, **3**(1983), 270.
- [19] 涂传诒, 地球物理学报, **26**(1983), 406.
- [20] Neugebauer, M. et al., *J. Geophys. Res.*, **83**(1978), 1027.
- [21] Matthaeus, W. H. and Goldstein, M. L., *ibid.*, **87**(1982), 6011.
- [22] Denskat, K. U. and Burlaga, L. F., *ibid.*, **82**(1977), 2693.
- [23] Bavassano, B. et al., *ibid.*, **86**(1981), 1271.
- [24] Hinze, J. O., *Turbulence*, Second edition, McGRAW-HILL Book Company, 1975, 178.
- [25] Barnes, A. and Hollweg, J. V., *J. Geophys. Res.*, **79**(1974), 2302.
- [26] Panchev, S., 随机函数和湍流(谈镐生等译), 科学出版社, 1976, 148.
- [27] Feldman, W. C. et al., *J. Geophys. Res.*, **81** (1976).
- [28] 涂传诒, 空间科学学报, **4**(1984), 1.
- [29] Hollweg, J. V., *Rev. Geophys. Space Phys.*, **16**(1978), 689.