

基于变分边缘化粒子滤波的车载雷达扩展目标跟踪

周浩文^{*①} 王 奇^②

^①(南京楚航科技有限公司 南京 211800)

^②(海拉南京研发中心 南京 211106)

摘要: 车载毫米波雷达量测由极坐标系下的位置坐标与多普勒速度组成, 其与笛卡儿坐标系下建模的扩展目标状态具有复杂的非线性关系。针对以上非线性状态估计问题, 提出一种基于变分边缘化粒子滤波的扩展目标跟踪算法。首先, 采用椭圆对目标二维平面轮廓建模, 显式定义轮廓朝向角, 构建参数化的逆伽马分布作为轮廓尺寸的共轭先验分布; 其次, 引入量测源位置作为辅助变量, 建立适用于毫米波雷达的扩展目标量测模型; 然后, 为了改善复杂机动目标轮廓估计性能, 基于边缘化思想, 利用粒子滤波算法独立估计轮廓朝向角的后验分布, 并在变分贝叶斯推断框架内, 迭代求解剩余状态变量(包括目标中心运动状态、轮廓尺寸)后验分布的近似解析表达式。仿真实验结果表明, 所提算法相比于已有算法能够获得更高的状态估计精度, 在跟踪机动目标时, 对轮廓朝向角与尺寸的估计性能优势更加明显。

关键词: 车载雷达; 扩展目标跟踪; 多普勒速度; 变分推断; 边缘化粒子滤波

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 2095-283X(2025)05-1306-17

DOI: [10.12000/JR25005](https://doi.org/10.12000/JR25005)

CSTR: [32380.14.JR25005](https://cstr.cn/32380.14.JR25005)

引用格式: 周浩文, 王奇. 基于变分边缘化粒子滤波的车载雷达扩展目标跟踪[J]. 雷达学报(中英文), 2025, 14(5): 1306–1322. doi: [10.12000/JR25005](https://doi.org/10.12000/JR25005).

Reference format: ZHOU Haowen and WANG Qi. Extended object tracking based on variational marginalized particle filter for automotive radar[J]. *Journal of Radars*, 2025, 14(5): 1306–1322. doi: [10.12000/JR25005](https://doi.org/10.12000/JR25005).

Extended Object Tracking Based on Variational Marginalized Particle Filter for Automotive Radar

ZHOU Haowen^{*①} WANG Qi^②

^①(Nanjing ChuHang Technology Co., Ltd., Nanjing 211800, China)

^②(Hella Nanjing Technology Center, Nanjing 211106, China)

Abstract: The measurement from automotive millimeter-wave radar consists of position coordinates in the polar coordinate system and doppler velocity, which has a complex, nonlinear relationship with the extended object state modeled in the Cartesian coordinate system. To address this nonlinear state estimation problem, a Variational Marginalized Particle Filter-based Extended Object Tracking (VMPF-EOT) algorithm is proposed. First, the object's two-dimensional planar contour is modeled as an ellipse with an explicitly defined orientation angle. A parameterized inverse gamma distribution is constructed as the conjugate prior distribution for the contour size. Second, the measurement source position is introduced as an auxiliary variable to establish a measurement model for extended objects detected by automotive millimeter-wave radar. To enhance the contour estimation performance for maneuvering objects, the joint distribution of the extended object state is marginalized with respect to the contour orientation angle. The posterior distribution of the contour orientation angle is estimated independently using a particle filter. The approximate analytical solution for the posterior

收稿日期: 2025-01-03; 改回日期: 2025-05-01; 网络出版: 2025-06-20

*通信作者: 周浩文 zhouhaowen@nuaa.edu.cn

*Corresponding Author: ZHOU Haowen, zhouhaowen@nuaa.edu.cn

责任编辑: 黄岩 Corresponding Editor: HUANG Yan

©The Author(s) 2025. This is an open access article under the CC-BY 4.0 License

(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

distributions of the remaining state variables—including the target’s center motion state and contour size—is derived using the variational Bayesian inference. The simulation results demonstrate that the proposed algorithm achieves higher state estimation accuracy than existing algorithms. In tracking maneuvering targets, the proposed algorithm offers a more significant advantage in terms of estimating the contour orientation angle and contour size.

Key words: Automotive radar; Extended object tracking; Doppler velocity; Variational inference; Marginalized particle filter

1 引言

环境感知是自动驾驶系统的重要环节之一,主要负责对来自车周围环境中的目标进行检测、识别与跟踪,为后续的决策规划提供必要的信息^[1,2]。相比摄像头、激光雷达等传感器,毫米波雷达具有全天时全天候的工作特性与目标速度探测能力,不受复杂天气条件与路况因素的影响,能够穿透雨、雾、烟尘等干扰物,提供稳定可靠的环境感知数据^[3]。同时,毫米波雷达体积小,成本低,易于集成,已广泛应用于自动驾驶领域^[4]。

随着多输入多输出技术以及多芯片级联技术的发展成熟,雷达硬件性能得到快速的提升,有效改善雷达的探测分辨率与精度^[5-7]。传统的点目标跟踪算法将目标视为质点,无法充分利用丰富的点云信息,以应对复杂多变且性能要求更高的跟踪任务。高分辨率雷达对同一目标能够产生多个量测,其位置分布统计特性反映目标轮廓形状,从而可实现目标运动状态与轮廓状态的联合估计,此类估计问题即为扩展目标跟踪(Extended Object Tracking, EOT)^[8-10]。根据对目标轮廓建模精细程度的不同,可将扩展目标跟踪分为两类,一类是将目标轮廓简化为基本的几何图形,如椭圆、矩形等,另一类是精准地识别目标轮廓的细节特征,采用非线性函数拟合目标复杂不规则的轮廓曲线^[11]。

考虑到雷达点云稀疏性的限制,将目标轮廓近似为椭圆或者矩形,足以满足大多数应用场景的需求^[12]。随机矩阵模型(Random Matrix Model, RMM)是经典的椭圆轮廓建模方法,假设量测源在目标表面服从高斯分布,采用正定对称随机矩阵隐式地描述椭圆形状^[13-16]。文献^[17,18]提出乘性误差模型(Multiplicative Error Model, MEM),显式地定义椭圆的形状参数即朝向角与长短轴,并采用递推卡尔曼滤波求得扩展状态估计的封闭紧凑表达式。针对量测源在目标表面分布不均匀的问题,文献^[19]提出一种条件高斯混合模型,模型每个分量是通过对同一椭圆设置不同的缩放与偏移系数获得的,分别对应一个单独的量测分布密集区域,在保证RMM计算高效性的同时,获得对复杂量测分布的建模能

力。文献^[20]在RMM基础上,推导出适合于矩形目标的轮廓量测分布的尺寸缩放系数。文献^[21]提出关键点模型,以关键点为中心按照目标朝向和垂直于目标朝向将矩形目标划分为4个区域,然后分别对每个区域的量测分布建模,从而将局部区域量测集中的复杂分布描述为4个简单分布,并通过设计合适的共轭先验分布,构建运动状态和形状尺寸的递推解析估计器。文献^[22]提出分层截断高斯模型,通过大量训练数据离线学习车载雷达量测的空间分布,并与RMM相结合,应用于扩展目标跟踪。为了描述复杂轮廓形状,文献^[23]采用多个椭圆描述同一个目标,每个椭圆由一个待估计的正定对称随机矩阵描述,然后采用变分贝叶斯推断方法求解运动状态与轮廓状态后验分布的近似解析解。当量测密度与精度足够高时,目标复杂不规则轮廓的精准估计成为可行的技术路线。目前不规则形状扩展目标跟踪的研究主要是针对星凸形扩展目标。文献^[24]提出随机超曲面模型,采用径向函数对目标轮廓建模,并通过调整尺度缩放系数,使得量测方程与量测实际分布相匹配。文献^[25,26]采用高斯过程回归模型,在线学习目标形状,可求得目标形状的解析表达式,并给出估计结果的置信度区间。文献^[27]利用alpha-shape算法对星凸形轮廓建模,实现静态场景下星凸形扩展目标的形状估计。以上星凸形扩展目标跟踪算法对传感器分辨率的要求较高,当量测较少时,算法性能会急剧下降。为了进一步提升目标轮廓估计精度,可通过融合多维度信息摆脱仅依赖量测位置统计特征的局限性:文献^[28]引入量测数量构建目标轮廓概率模型,文献^[29,30]则通过建立轮廓朝向与速度方向的相关性优化估计器设计,从而有效改善动态场景下的轮廓跟踪性能。针对多目标跟踪场景中数据关联的不确定性,文献^[31-33]基于随机有限集理论框架,采用泊松多伯努利混合滤波器,实现数据关联与状态估计的协同优化,显著提升算法在杂波环境下的鲁棒性。鉴于实际情况中毫米波雷达点云较为稀疏,采用椭圆或者矩形对目标轮廓主要特征进行建模,更具工程实践价值^[34]。

以上扩展目标跟踪算法都采用笛卡儿坐标系下的位置量测,其与同一坐标系下建模的扩展目标状态之间是线性关系。然而,在雷达目标跟踪过程中,位置量测往往是在极坐标系下获取的,量测与状态的坐标系不同,导致目标跟踪存在非线性问题。文献[35]将雷达位置量测直接转换至笛卡儿坐标系下,但转换结果是有偏的,会造成目标跟踪精度的损失。文献[36]提出匹配线性化方法,对原始量测进行线性化处理,并将处理后的量测与基于RMM的方法相结合。值得注意的是,车载毫米波雷达还可以提供探测目标的多普勒速度信息,相比仅使用位置量测的目标跟踪算法,对额外的速度量测信息的有效使用,能够显著提升算法性能。文献[37]采用无量测转换方法将位置量测转换至笛卡儿坐标系下,并构建伪多普勒速度量测,进而建立基于MEM的雷达量测模型,然后使用扩展卡尔曼滤波求解扩展目标状态的封闭解。不难发现,针对雷达扩展目标跟踪问题,由于量测与状态之间存在复杂的非线性关系,已有方法通过量测转换、伪量测构建等方法,简化量测方程,从而便于获取扩展目标状态估计的解析表达式[34]。

鉴于此,针对现有扩展目标模型在利用车载毫米波雷达测速信息的不足,本文提出了一种基于变分边缘化粒子滤波的扩展目标跟踪算法,创新贡献主要包括:首先,通过引入量测源位置作为辅助变量,建立扩展目标的雷达量测方程,其描述极坐标下获得的位置、多普勒速度量测与笛卡儿坐标系下的扩展目标状态之间复杂的非线性关系;其次,基于边缘化思想,采用粒子滤波算法单独估计目标轮廓朝向角,有效提升复杂机动目标的轮廓估计精度;然后,采用变分贝叶斯方法,求得以目标轮廓朝向角估计为条件的目标运动状态与轮廓尺寸的联合后验分布的解析表达式,简化迭代计算过程;最后,通过实验仿真验证本文提出算法的有效性。

2 问题描述

不同于传统的点目标跟踪,扩展目标跟踪需实时联合估计随时间演变的运动状态与轮廓状态,则 k 时刻扩展目标状态可表示为

$$\zeta_k = \{ \mathbf{x}_k \quad \theta_k \quad \mathbf{X}_k \} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ 描述目标中心运动信息,服从高斯分布; θ_k 为目标轮廓朝向角,服从高斯分布; $\mathbf{X}_k \triangleq \text{diag}(\sigma_k^1, \sigma_k^2, \dots, \sigma_k^{n_y})$ 为正定对角矩阵,描述目标轮廓尺寸, $\sigma_k^t (t = 1, 2, \dots, n_y)$ 服从逆伽马(Inverse Gamma)分布; n_x 与 n_y 分别为运动状态向量与车载雷达位置量测向量的维度。

2.1 运动状态建模

目标中心运动状态 $\mathbf{x}_k = [x_k \ y_k \ v_k^x \ v_k^y \ \omega_k]^T$, 其中 $[x_k \ y_k]^T$, $[v_k^x \ v_k^y]^T$ 和 ω_k 分别表示 k 时刻笛卡儿坐标系下的位置坐标、速度与角速度。建立目标运动状态方程为

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k \quad (2)$$

其中, $f_k(\cdot)$ 为运动状态转移函数,取决于目标运动模式; $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ 为服从高斯分布的过程噪声,其概率分布函数 $p(\mathbf{w}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{w}_k; \mathbf{0}, \mathbf{Q}_k^x)$, $\mathbf{Q}_k^x \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ 为运动状态过程噪声协方差矩阵。

2.2 轮廓状态建模

以二维椭圆对目标平面轮廓建模,则 k 时刻目标的轮廓信息 $\mathbf{M}_k$ 可描述为

$$\mathbf{M}_k = s \mathbf{T}_{\theta_k} \mathbf{X}_k \mathbf{T}_{\theta_k}^T = s \mathbf{T}_{\theta_k} \text{diag}(\sigma_k^1, \sigma_k^2, \dots, \sigma_k^{n_y}) \mathbf{T}_{\theta_k}^T \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_{\theta_k} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, $\mathbf{T}_{\theta_k}$ 为旋转矩阵; s 为缩放系数; 对于二维平面跟踪场景, $n_y = 2$ 。如图1所示, $\sqrt{\sigma_k^1}$ 和 $\sqrt{\sigma_k^2}$ 分别表示椭圆的半长轴与半短轴,椭圆中心位置取决于目标中心运动状态的位置分量。

2.3 量测建模

k 时刻,扩展目标产生的量测集为 $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}_k^j\}_{j=1}^{m_k}$, 其中 $\mathbf{y}_k^j = [(y_k^{p,j})^T, y_k^{v,j}]^T$, $\mathbf{y}_k^{p,j} \in \mathbb{R}^2$ 和 $y_k^{v,j} \in \mathbb{R}$ 分别表示第 j 个车载雷达位置量测与多普勒速度量测, m_k 表示 k 时刻量测个数。

引入辅助变量 $\mathbf{z}_k^{p,j} \in \mathbb{R}^2$, 其表示第 j 个量测

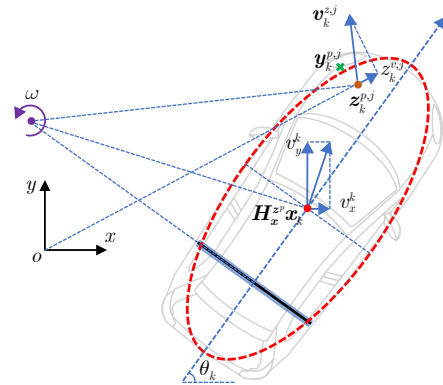


图1 基于车载毫米波雷达的扩展目标

Fig. 1 Extended object tracking based on automotive millimeter-wave radar

y_k^j 在目标表面上对应的量测源位置(即未受量测噪声污染的笛卡儿坐标系下的真实位置量测)。当目标状态已知时, 量测源位置 $z_k^{p,j}$ 的似然函数为

$$p\left(z_k^{p,j} | x_k, \theta_k, \mathbf{X}_k\right) = \mathcal{N}\left(z_k^{p,j}; \mathbf{H}_x^p x_k, s\mathbf{T}_{\theta_k} \mathbf{X}_k \mathbf{T}_{\theta_k}^T\right) \quad (5)$$

其中, $\mathbf{H}_x^p = [\mathbf{I}_{2 \times 2}, \mathbf{0}_{2 \times 3}] \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$ 为位置量测矩阵。

若扩展目标为刚体, 则第 j 个量测源位置 $z_k^{p,j}$ 处的速度 $v_k^{z,j}$ 可由目标运动状态 x_k 确定^[38]。

$$v_k^{z,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\left(z_k^{p,j} - y_k\right) \\ 0 & 1 & \left(z_k^{p,j} - x_k\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k^x \\ v_k^y \\ w_k \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, $z_k^{p,j} = [z_k^{p,x,j}, z_k^{p,y,j}]^T$ 。如图1所示, 未受量测噪声污染的多普勒速度真实值 $z_k^{v,j}$ 可表示为 $v_k^{z,j}$ 在径向(雷达与量测源位置的连线方向)上的投影, 即

$$\begin{aligned} z_k^{v,j} &= g^v(z_k^{p,j}, x_k) = \frac{z_k^{p,j}}{\|z_k^{p,j}\|} v_k^{z,j} \\ &= \frac{z_k^{p,j}}{\|z_k^{p,j}\|} \begin{bmatrix} v_k^x - w_k \left(z_k^{p,y,j} - y_k\right) \\ v_k^y + w_k \left(z_k^{p,x,j} - x_k\right) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (7)$$

由于源自同一扩展目标的不同量测独立同分布, 并结合式(5)和式(7), 量测 $\mathbf{Y}_k$ 的似然函数表示为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}_k | x_k, \theta_k, \mathbf{X}_k) &= \prod_{j=1}^{m_k} p\left(y_k^j | x_k, \theta_k, \mathbf{X}_k\right) \\ &= \prod_{j=1}^{m_k} p\left(y_k^{p,j}, y_k^{v,j} | x_k, \theta_k, \mathbf{X}_k\right) \\ &= \prod_{j=1}^{m_k} p\left(y_k^{p,j} | z_k^{p,j}\right) p\left(y_k^{v,j} | z_k^{p,j}, x_k\right) \\ &\quad \cdot p\left(z_k^{p,j} | x_k, \theta_k, \mathbf{X}_k\right) \\ &= \prod_{j=1}^{m_k} \mathcal{N}\left(y_k^{p,j}; g^p(z_k^{p,j}), R^{y^p}\right) \\ &\quad \cdot \mathcal{N}\left(y_k^{v,j}; g^v(z_k^{p,j}, x_k), R^{y^v}\right) \\ &\quad \cdot \mathcal{N}\left(z_k^{p,j}; \mathbf{H}_x^p x_k, s\mathbf{T}_{\theta_k} \mathbf{X}_k \mathbf{T}_{\theta_k}^T\right) \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $R^{y^p} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为位置量测噪声协方差矩阵; $R^{y^v} \in \mathbb{R}$ 为速度量测噪声方差; $g^p(\cdot): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为坐标转换函数, 将笛卡儿坐标系下的位置量测转换为极坐标系下的车载雷达位置量测(即距离与方位角), 其表达式为

$$g^p(z_k^{p,j}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\left(z_k^{p,x,j}\right)^2 + \left(z_k^{p,y,j}\right)^2} \\ \arctan \frac{z_k^{p,y,j}}{z_k^{p,x,j}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

3 基于边缘化粒子滤波的扩展目标跟踪

在真实场景中, 扩展目标的轮廓朝向角随时间的演变一般独立于目标的运动状态与轮廓尺寸^[15,29,30], 即

$$p(\theta_k | x_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, \theta_{k-1}) = p(\theta_k | \theta_{k-1}) \quad (10)$$

根据文献^[39-41], 由于轮廓朝向角的动态模型不依赖于剩余状态变量, 可采用边缘化方法将 $k-1$ 时刻扩展目标状态的后验概率分布分解为两部分

$$\begin{aligned} p(x_{k-1}, \theta_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}) \\ = p(x_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \theta_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k-1}) p(\theta_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

并采用粒子滤波单独求解轮廓朝向角 θ_{k-1} 的后验概率分布 $p(\theta_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1})$, 其近似表达式为

$$p(\theta_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}) = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^{(i)} \delta\left(\theta_{k-1} - \theta_{k-1}^{(i)}\right) \quad (12)$$

其中, N 为粒子个数, $\delta(\cdot)$ 表示狄拉克函数, $\theta_{k-1}^{(i)}$ 与 $w_{k-1}^{(i)}$ 分别表示第 i 个粒子与其对应的权重。

将式(12)代入式(11)中, 得到扩展目标状态后验概率分布的近似表达式为

$$\begin{aligned} p(x_{k-1}, \theta_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}) \\ \approx \sum_{i=1}^N w_{k-1}^{(i)} p\left(x_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) \\ \cdot \delta\left(\theta_{k-1} - \theta_{k-1}^{(i)}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

假设 $k-1$ 时刻状态 $\{x_k, \mathbf{X}_k\}$ 的条件后验分布 $p(x_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1})$ 满足如下形式:

$$\begin{aligned} p\left(x_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) \\ = p\left(x_{k-1} | \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) p\left(\mathbf{X}_{k-1} | \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} p\left(x_{k-1} | \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) \\ = \mathcal{N}\left(x_{k-1}; \bar{x}_{k-1|k-1}^{(i)}, P_{k-1|k-1}^{(i)}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} p\left(\mathbf{X}_{k-1} | \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) \\ = \sum_{t=1}^{n_y^p} \mathcal{IG}\left(\sigma_{k-1}^{t,(i)}; \alpha_{k-1|k-1}^{t,(i)}, \beta_{k-1|k-1}^{t,(i)}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\bar{x}_{k-1|k-1}^{(i)}$ 和 $P_{k-1|k-1}^{(i)}$ 分别表示高斯分布的均值与协方差矩阵; $\alpha_{k-1|k-1}^{t,(i)}$ 和 $\beta_{k-1|k-1}^{t,(i)}$ 分别表示逆伽马分布的形状参数与尺度参数。

3.1 状态预测

扩展目标跟踪器的预测部分由对轮廓朝向角、运动状态与轮廓尺寸的一步预测组成。

(1) 轮廓朝向角预测

第*i*个粒子对轮廓朝向角在*k*时刻的新采样值 $\theta_k^{(i)}$ 按照如下重要性概率分布产生:

$$\begin{aligned}\pi\left(\theta_k \mid \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k}\right) &= p\left(\theta_k \mid \theta_{k-1}^{(i)}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\theta_k; \theta_{k-1}^{(i)}, Q_k^\theta\right)\end{aligned}\quad (17)$$

其中, $Q_k^\theta \in \mathbb{R}$ 为轮廓朝向角的过程噪声方差, 其取值需根据目标运动的机动特性进行设定: 在低机动场景中, 可选择较小值以增强滤波的平滑性, 在高机动场景中, 可选择较大值以提升算法响应速度。

(2) 运动状态预测

目标运动状态的时间演变不依赖于轮廓状态^[15], 即

$$\begin{aligned}p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}, \theta_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}\right) &= p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_k; f_k\left(\mathbf{x}_{k-1}\right), \mathbf{Q}_k^{\mathbf{x}}\right)\end{aligned}\quad (18)$$

结合式(15)与式(18), *k*时刻, 给定轮廓朝向角 $\theta_k = \theta_k^{(i)}$ 条件下, 运动状态 $\mathbf{x}_k$ 的一步预测概率分布表示为

$$\begin{aligned}p\left(\mathbf{x}_k \mid \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) &= \int p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}\right) \\ &\quad \cdot p\left(\mathbf{x}_{k-1} \mid \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1} \\ &\approx \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)}\right)\end{aligned}\quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)} = f_k\left(\bar{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{(i)}\right)\quad (20)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)} = \mathbf{F}_{k|k-1}^{(i)} \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{(i)} \left(\mathbf{F}_{k|k-1}^{(i)}\right)^T + \mathbf{Q}_k^{\mathbf{x}}\quad (21)$$

其中, $\mathbf{F}_{k-1|k-1}^{(i)}$ 为*k*时刻状态转移函数 $f_k(\mathbf{x}_{k-1})$ 在 $\mathbf{x}_{k-1} = \bar{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{(i)}$ 处的雅可比矩阵。

(3) 轮廓尺寸预测

目标轮廓尺寸随时间的演变独立于运动状态与轮廓朝向角^[17,18], 即

$$p\left(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}, \theta_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}\right) = p\left(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{X}_{k-1}\right)\quad (22)$$

同时, 轮廓尺寸 $\mathbf{X}_k$ 一般随时间发生缓慢变化^[15], 则基于式(16), 给定轮廓朝向角 $\theta_k = \theta_k^{(i)}$ 条件下, $\mathbf{X}_k$ 的一步预测逆伽马分布参数更新如下:

$$\alpha_{k|k-1}^{t,(i)} = \rho_k \alpha_{k-1|k-1}^{t,(i)}\quad (23)$$

$$\beta_{k|k-1}^{t,(i)} = \rho_k \beta_{k-1|k-1}^{t,(i)}\quad (24)$$

其中, ρ_k 为遗忘因子, $t = 1, 2, \dots, n_y^p$ 。

综合式(17)—式(24), *k*时刻扩展目标状态的先验联合分布为

$$\begin{aligned}p\left(\mathbf{x}_k, \theta_k, \mathbf{X}_k \mid \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) &= \sum_{i=1}^N w_{k-1}^{(i)} p\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k \mid \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) \\ &\quad \cdot \delta\left(\theta_k - \theta_k^{(i)}\right)\end{aligned}\quad (25)$$

其中,

$$\begin{aligned}p\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k \mid \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) &= \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)}\right) \\ &\quad \cdot \prod_{t=1}^{n_y^p} \mathcal{IG}\left(\sigma_k^{t,(i)}; \alpha_{k|k-1}^{t,(i)}, \beta_{k|k-1}^{t,(i)}\right)\end{aligned}\quad (26)$$

3.2 量测更新

扩展目标跟踪器的更新部分由两个主要步骤组成^[42-44]: 首先, 基于*k*时刻新产生的粒子集 $\{\theta_k^{(i)}\}_{i=1}^N$, 采用变分贝叶斯推断, 求解轮廓朝向 $\theta_k = \theta_k^{(i)}$ 为条件的剩余状态变量 $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k\}$ 的条件联合后验概率分布 $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k \mid \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k})$, 其中 $i = 1, 2, \dots, N$; 然后, 更新*k*时刻粒子集的权重 $\{w_k^{(i)}\}_{i=1}^N$, 从而获得轮廓朝向 θ_k 的后验概率分布 $p(\theta_k \mid \mathbf{Y}_{1:k})$ 。

3.2.1 运动状态与轮廓尺寸更新

基于贝叶斯定理, 得到轮廓朝向角 $\theta_k = \theta_k^{(i)}$ 条件下, 运动状态 $\mathbf{x}_k$ 、轮廓尺寸 $\mathbf{X}_k$ 与量测源位置 $\mathbf{Z}_k^p = \{\mathbf{z}_k^{p,j}\}_{j=1}^{m_k}$ 的条件后验概率分布

$$\begin{aligned}p\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p \mid \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k}\right) &= \frac{p\left(\mathbf{Y}_k \mid \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p, \theta_k^{(i)}\right) p\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p \mid \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right)}{p\left(\mathbf{Y}_k \mid \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right)}\end{aligned}\quad (27)$$

其中,

$$\begin{aligned}p\left(\mathbf{Y}_k \mid \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) &= \int p\left(\mathbf{Y}_k \mid \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p, \theta_k^{(i)}\right) \\ &\quad \cdot p\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p \mid \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) \\ &\quad \cdot d\mathbf{x}_k d\mathbf{X}_k d\mathbf{Z}_k^p\end{aligned}\quad (28)$$

将式(8)和式(26)代入式(27)中, 得到

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k}) \\
& \propto p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p, \theta_k^{(i)}) \\
& \quad \cdot p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}) \\
& = p(\mathbf{Y}_k^p | \mathbf{Z}_k^p) p(\mathbf{Y}_k^v | \mathbf{Z}_k^p, \mathbf{x}_k) p(\mathbf{Z}_k^p | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \theta_k^{(i)}) \\
& \quad \cdot p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}) \\
& = \prod_{j=1}^{m_k} \mathcal{N}(\mathbf{y}_k^{p,j}; \mathbf{g}^p(\mathbf{z}_k^{p,j}), \mathbf{R}^{y^p}) \\
& \quad \cdot \mathcal{N}(\mathbf{y}_k^{v,j}; \mathbf{g}^v(\mathbf{z}_k^{p,j}, \mathbf{x}_k), \mathbf{R}^{y^v}) \\
& \quad \cdot \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^{p,j}; \mathbf{H}_x^{\mathbf{z}^p} \mathbf{x}_k, s \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbf{X}_k \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T) \\
& \quad \cdot \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)}) \\
& \quad \cdot \prod_{t=1}^{n_y^p} \mathcal{IG}(\sigma_k^t; \alpha_{k|k-1}^{t,(i)}, \beta_{k|k-1}^{t,(i)}) \quad (29)
\end{aligned}$$

其中, $\mathbf{Y}_k^p = \{\mathbf{y}_k^{p,j}\}_{j=1}^{m_k}$, $\mathbf{Y}_k^v = \{\mathbf{y}_k^{v,j}\}_{j=1}^{m_k}$ 。

由于联合后验分布 $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k})$ 表达式复杂且待估计变量之间存在耦合性, 难以求得解析解。因此采用平均场变分贝叶斯^[45](Mean field variational Bayes)方法, 通过假设待估计变量相互独立, 求得后验概率分布的近似解

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k}) \\
& \approx q^{(i)}(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p) \\
& = q_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{x}_k) q_{\mathbf{X}}^{(i)}(\mathbf{X}_k) q_{\mathbf{Z}^p}^{(i)}(\mathbf{Z}_k^p) \quad (30)
\end{aligned}$$

其中, $q_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{x}_k)$, $q_{\mathbf{X}}^{(i)}(\mathbf{X}_k)$ 和 $q_{\mathbf{Z}^p}^{(i)}(\mathbf{Z}_k^p)$ 分别表示运动状态、轮廓尺寸以及量测源位置的变分分布。借助平均场理论, 将复杂的联合后验分布分解为多个单变量变分分布, 实现变量之间的近似解耦。近似变分分布通过最小化其与真实后验联合分布的KL (Kullback-Leibler) 散度求得, 从而将参数估计问题转化为优化问题:

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{\mathbf{x}}^{(i)}, \hat{q}_{\mathbf{X}}^{(i)}, \hat{q}_{\mathbf{Z}^p}^{(i)} = \arg \min_{q_{\mathbf{x}}^{(i)}, q_{\mathbf{X}}^{(i)}, q_{\mathbf{Z}^p}^{(i)}} & \text{KL}(q_{\mathbf{x}}^{(i)} \\
& \cdot (\mathbf{x}_k) q_{\mathbf{X}}^{(i)}(\mathbf{X}_k) q_{\mathbf{Z}^p}^{(i)}(\mathbf{Z}_k^p) \\
& \cdot \left\| p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k}) \right\| \quad (31)
\end{aligned}$$

其中, $\text{KL}(Q||P)$ 表示分布 Q 与分布 P 之间的KL散

度。式(31)的最优解为^[46]

$$\begin{aligned}
\log \hat{q}_{\phi}^{(i)}(\phi_k) = \mathbb{E}_{\setminus \phi} & \left[\ln p(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}) \right] \\
& + c_{\setminus \phi} \quad (32)
\end{aligned}$$

其中, $\phi \in \{\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p\}$, $\setminus \phi$ 为由除 ϕ 以外的剩余变量组成的集合, $c_{\setminus \phi}$ 为与变量 ϕ 无关的常数。

采用坐标上升方法, 根据式(32), 逐个更新每个变量的近似分布。接下来, 将详细介绍第 $\ell + 1$ 次迭代近似变分分布计算过程。

(1) 计算 $q_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{x}_k)$

根据式(29)和式(32), 第 $\ell + 1$ 次变分迭代更新时, $\mathbf{x}_k$ 的变分分布对数形式可表示为

$$\begin{aligned}
& \log q_{\mathbf{x}}^{(i), \ell+1}(\mathbf{x}_k) \\
& = \mathbb{E}_{\setminus \mathbf{x}_k} [\log p(\mathbf{Y}_k^v | \mathbf{Z}_k^p, \mathbf{x}_k)] \\
& \quad + \mathbb{E}_{\setminus \mathbf{x}_k} [\log p(\mathbf{Z}_k^p | \mathbf{x}_k, \theta_k^{(i)}, \mathbf{X}_k)] \\
& \quad + \log \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)}) + c_{\setminus \mathbf{x}_k} \\
& = \sum_{j=1}^{m_k} \mathbb{E}_{\setminus \mathbf{x}_k} [\log \mathcal{N}(\mathbf{y}_k^{v,j}; \mathbf{g}^v(\mathbf{z}_k^{p,j}, \mathbf{x}_k), \mathbf{R}^{y^v})] \\
& \quad + \sum_{j=1}^{m_k} \mathbb{E}_{\setminus \mathbf{x}_k} [\log \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^{p,j}; \mathbf{H}_x^{\mathbf{z}^p} \mathbf{x}_k, s \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbf{X}_k \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T)] \\
& \quad + \ln \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)}) + c_{\setminus \mathbf{x}_k} \\
& \approx \sum_{j=1}^{m_k} \mathbb{E}_{\setminus \mathbf{x}_k} [\log \mathcal{N}(\mathbf{y}_k^{v,j}; \mathbf{H}_x^{y^v, (i), j, \ell} \mathbf{x}_k \\
& \quad + \mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^v, (i), j, \ell} \mathbf{z}_k^{p,j} + b_k^{y^v, (i), j, \ell}, \mathbf{R}^{y^v})] \\
& \quad + \sum_{j=1}^{m_k} \mathbb{E}_{\setminus \mathbf{x}_k} [\log \mathcal{N}(\mathbf{0}; \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T (\mathbf{z}_k^{p,j} - \mathbf{H}_x^{\mathbf{z}^p} \mathbf{x}_k), \\
& \quad s \mathbf{X}_k)] + \ln \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)}) + c_{\setminus \mathbf{x}_k} \quad (33)
\end{aligned}$$

其中, $\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i), \ell}$ 和 $\bar{\mathbf{z}}_k^{p, (i), j, \ell}$ 分别为第 ℓ 次迭代更新后变分分布 $q_{\mathbf{x}}^{(i), \ell}(\mathbf{x}_k)$ 和 $q_{\mathbf{z}^p}^{(i), \ell}(\mathbf{z}_k^{p,j})$ 的期望, $\mathbf{H}_x^{y^v, (i), j, \ell} = \partial g^v(\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i), \ell}, \bar{\mathbf{z}}_k^{p, (i), j, \ell}) / \partial \mathbf{x}_k$ 和 $\mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^v, (i), j, \ell} = \partial g^v(\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i), \ell}, \bar{\mathbf{z}}_k^{p, (i), j, \ell}) / \partial \mathbf{z}_k^p$ 分别表示非线性速度量测函数 $g^v(\mathbf{x}, \mathbf{z}^p)$ 在 $\mathbf{z}^p = \bar{\mathbf{z}}_k^{p, (i), j, \ell}$, $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i), \ell}$ 处关于 $\mathbf{z}^p$ 和 $\mathbf{x}$ 的雅可比矩阵, $b_k^{y^v, (i), j, \ell+1} = g^v(\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i), \ell}, \bar{\mathbf{z}}_k^{p, (i), j, \ell}) - \mathbf{H}_x^{y^v, (i), j, \ell} \bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i), \ell} - \mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^v, (i), j, \ell} \bar{\mathbf{z}}_k^{p, (i), j, \ell}$ 。

进一步地, 式(33)可以化简为

$$\begin{aligned}
& \log q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell+1}(\mathbf{x}_k) \\
& \approx -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_k} \text{Tr} \left(\left(\mathbf{y}_k^{v,j} - \left(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{y^v,(i),j,\ell} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^v,(i),j,\ell} \mathbf{z}_k^{p,j} + b_k^{y^v,(i),j,\ell} \right) \right) (\cdot)^T \left(R^{y^v} \right)^{-1} \right) \\
& \quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_k} \text{Tr} \left(\left(\mathbf{z}_k^{p,(i),j,\ell} - \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}^p} \mathbf{x}_k \right) (\cdot)^T \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell}} \left[(s\mathbf{X}_k)^{-1} \right] \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T \right) + \log \mathcal{N} \left(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)} \right) + c_{\mathbf{x}_k} \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_k} \text{Tr} \left(\left(\mathbf{y}_k^{v,j} - \left(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{y^v,(i),j,\ell} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^v,(i),j,\ell} \bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,\ell} + b_k^{y^v,(i),j,\ell} \right) \right) (\cdot)^T \left(R^{y^v} \right)^{-1} \right) \\
& \quad - \frac{1}{2} \text{Tr} \left(m_k \left(\frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{m_k} \bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,\ell} - \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}^p} \mathbf{x}_k \right) (\cdot)^T \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell}} \left[(s\mathbf{X}_k)^{-1} \right] \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T \right) \\
& \quad + \log \mathcal{N} \left(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)} \right) + c_{\mathbf{x}_k} \tag{34}
\end{aligned}$$

由式(34)可知, $q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell+1}(\mathbf{x}_k)$ 服从高斯分布, 即

$$q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell+1}(\mathbf{x}_k) = \mathcal{N} \left(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i),\ell+1}, \mathbf{P}_{k|k}^{(i),\ell+1} \right) \tag{35}$$

其中, 参数 $\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i),\ell+1}$ 和 $\mathbf{P}_{k|k}^{(i),\ell+1}$ 的更新过程表示为

$$\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i),\ell+1} = \mathbf{P}_{k|k}^{(i),\ell+1} \left(\left(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\mathbf{z}},(i),\ell} \right)^T \left(\mathbf{R}^{\tilde{\mathbf{z}},(i),\ell} \right)^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{z}}_k^{(i),\ell} + \left(\mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)} \right) \tag{36}$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{(i),\ell+1} = \left(\left(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\mathbf{z}},(i),\ell} \right)^T \left(\mathbf{R}^{\tilde{\mathbf{z}},(i),\ell} \right)^{-1} \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\mathbf{z}},(i),\ell} + \left(\mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)} \right)^{-1} \right)^{-1} \tag{37}$$

其中,

$$\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\tilde{\mathbf{z}},(i),\ell} = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{y^v,(i),1,\ell} \\ \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{y^v,(i),2,\ell} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{y^v,(i),m_k,\ell} \end{array} \right]^T \\ \left(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}^p} \right)^T \end{array} \right]^T \tag{38}$$

$$\mathbf{R}^{\tilde{\mathbf{z}},(i),\ell} \triangleq \text{blkdiag} \left(\underbrace{R^{y^v}, \dots, R^{y^v}}_{1 \times m_k}, \frac{\mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell}} \left[(s\mathbf{X}_k)^{-1} \right] \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T}{m_k} \right) \tag{39}$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i),\ell} = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} y_k^{v,1} - \left(\mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^v,(i),1,\ell} \bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),1,\ell} + b_k^{y^v,(i),1,\ell} \right) \\ y_k^{v,2} - \left(\mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^v,(i),2,\ell} \bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),2,\ell} + b_k^{y^v,(i),2,\ell} \right) \\ \vdots \\ y_k^{v,m_k} - \left(\mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^v,(i),m_k,\ell} \bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),m_k,\ell} + b_k^{y^v,(i),m_k,\ell} \right) \end{array} \right]^T \\ \left(\frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{m_k} \bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,\ell} \right)^T \end{array} \right]^T \tag{40}$$

(2) 计算 $q(\mathbf{X}_k)$

根据式(29)和式(32), 第 $\ell+1$ 次变分迭代更新时, $\mathbf{X}_k$ 的变分分布对数形式可表示为

$$\begin{aligned}
\log q_{\mathbf{X}}^{(i),\ell+1}(\mathbf{X}_k) &= \mathbb{E}_{\mathbf{X}_k} \left[\log p \left(\mathbf{Z}_k^p | \mathbf{x}_k, \theta_k^{(i)}, \mathbf{X}_k \right) \right] + \sum_{t=1}^{n_y^p} \log \mathcal{IG} \left(\sigma_k^t; \alpha_{k|k-1}^{t,(i)}, \beta_{k|k-1}^{t,(i)} \right) + c_{\mathbf{X}_k} \\
&= \sum_{j=1}^{m_k} \mathbb{E}_{\mathbf{X}_k} \left[\log \mathcal{N} \left(\mathbf{z}_k^{p,j}; \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}^p} \mathbf{x}_k, s \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbf{X}_k \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T \right) \right] + \sum_{t=1}^{n_y^p} \log \mathcal{IG} \left(\sigma_k^t; \alpha_{k|k-1}^{t,(i)}, \beta_{k|k-1}^{t,(i)} \right) + c_{\mathbf{X}_k} \\
&= -\frac{m_k}{2} \log |\mathbf{X}_k| - \frac{1}{2s} \sum_{j=1}^{m_k} \text{Tr} \left(\mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T \mathbb{E}_{q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell}, q_{\mathbf{z}^p}^{(i),\ell}} \left[\left(\mathbf{z}_k^{p,j} - \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}^p} \mathbf{x}_k \right) (\cdot)^T \right] \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} (\mathbf{X}_k)^{-1} \right) \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n_y^p} \log \mathcal{IG} \left(\sigma_k^i; \alpha_{k|k-1}^{i,(i)}, \beta_{k|k-1}^{i,(i)} \right) + c_{\mathbf{X}_k} \tag{41}
\end{aligned}$$

由式(41)可知, $q_{\mathbf{X}}^{(i),\ell+1}(\mathbf{X}_k)$ 服从逆伽马分布, 即

$$q_{\mathbf{X}}^{(\ell+1)}(\mathbf{X}_k) = \sum_{t=1}^{n_p} \mathcal{IG} \left(\sigma_k^t; \alpha_{k|k}^{t,(i),\ell+1}, \beta_{k|k}^{t,(i),\ell+1} \right) \quad (42)$$

其中, 参数 $\{\alpha_{k|k}^{t,(i),\ell+1}\}_{t=1}^{n_p}$ 和 $\{\beta_{k|k}^{t,(i),\ell+1}\}_{t=1}^{n_p}$ 的更新过程表示为

$$\alpha_{k|k}^{t,(i),\ell+1} = \alpha_{k|k-1}^{t,(i)} + 0.5m_k \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \log q_{\mathbf{Z}^p}^{(i),\ell+1}(\mathbf{Z}_k^p) &= \mathbb{E}_{\mathbf{Z}^p} [\log p(\mathbf{Y}_k^p | \mathbf{Z}_k^p)] + \mathbb{E}_{\mathbf{Z}^p} [\log p(\mathbf{Y}_k^v | \mathbf{Z}_k^p, \mathbf{x}_k)] + \mathbb{E}_{\mathbf{Z}^p} \left[\log p \left(\mathbf{Z}_k^p | \mathbf{x}_k, \theta_k^{(i)}, \mathbf{X}_k \right) \right] + c_{\mathbf{Z}^p} \\ &\approx \sum_{j=1}^{m_k} \log \mathcal{N} \left(\mathbf{y}_k^{p,j}; \mathbf{H}_{\mathbf{Z}^p}^{\mathbf{y}^p,(i),j,\ell} \mathbf{z}_k^{p,j} + \mathbf{b}_k^{\mathbf{y}^p,(i),j,\ell}, \mathbf{R}^{\mathbf{y}^p} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m_k} \mathbb{E}_{\mathbf{Z}^p} \left[\log \mathcal{N} \left(y_k^{v,j}; \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}^v,(i),j,\ell} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{\mathbf{Z}^p}^{\mathbf{y}^v,(i),j,\ell} \mathbf{z}_k^{p,j} + \mathbf{b}_k^{\mathbf{y}^v,(i),j,\ell}, \mathbf{R}^{\mathbf{y}^v} \right) \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m_k} \mathbb{E}_{\mathbf{Z}^p} \left[\log \mathcal{N} \left(\mathbf{z}_k^{p,j}; \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}^p} \mathbf{x}_k, s \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbf{X}_k \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T \right) \right] + c_{\mathbf{Z}^p} \end{aligned} \quad (45)$$

其中, $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}^p}^{\mathbf{y}^p,(i),j,\ell} = \partial \mathbf{g}^p(\bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,\ell}) / \partial \mathbf{z}_k^p$ 为非线性坐标转换函数 $\mathbf{g}^p(\mathbf{z}_k^p)$ 在 $\mathbf{z}_k^p = \bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,\ell}$ 处关于 $\mathbf{z}^p$ 的雅可比矩阵, $\mathbf{b}_k^{\mathbf{y}^p,(i),j,\ell} = \mathbf{g}^p(\bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,\ell}) - \mathbf{H}_{\mathbf{Z}^p}^{\mathbf{y}^p,(i),j,\ell} \bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,\ell}$ 。

进一步地, 式(45)可化简为

$$\begin{aligned} \log q_{\mathbf{Z}^p}^{(i),\ell+1}(\mathbf{Z}_k^p) &\approx \sum_{j=1}^{m_k} \log \mathcal{N} \left(\mathbf{y}_k^{p,j} - \mathbf{b}_k^{\mathbf{y}^p,(i),j,\ell}; \mathbf{H}_{\mathbf{Z}^p}^{\mathbf{y}^p,(i),j,\ell} \mathbf{z}_k^{p,j}, \mathbf{R}^{\mathbf{y}^p} \right) \\ &\quad - 0.5 \sum_{j=1}^{m_k} \text{Tr} \left(\left(y_k^{v,j} - \left(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}^v,(i),j,\ell} \bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i),\ell} + \mathbf{H}_{\mathbf{Z}^p}^{\mathbf{y}^v,(i),j,\ell} \mathbf{z}_k^{p,j} + \mathbf{b}_k^{\mathbf{y}^v,(i),j,\ell} \right) \right) (\cdot)^T (\mathbf{R}^{\mathbf{y}^v})^{-1} \right) \\ &\quad - 0.5 \sum_{j=1}^{m_k} \text{Tr} \left(\left(\mathbf{z}_k^{p,j} - \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}^p} \bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i),\ell} \right) (\cdot)^T \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{X}}^{(i),\ell}} \left[(s \mathbf{X}_k)^{-1} \right] \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T \right) + c_{\mathbf{Z}^p} \end{aligned} \quad (46)$$

由式(46)可知, $q_{\mathbf{Z}^p}^{(i),\ell+1}(\mathbf{Z}_k^p)$ 服从高斯分布, 即

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{Z}^p}^{(i),\ell+1}(\mathbf{Z}_k^p) &= \prod_{j=1}^{m_k} q_{\mathbf{Z}^p}^{(i),\ell+1}(\mathbf{z}_k^{p,j}) \\ &= \prod_{j=1}^{m_k} \mathcal{N} \left(\mathbf{z}_k^{p,j}; \bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,\ell+1}, \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{z}^p,(i),j,\ell+1} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

其中, 参数 $\{\bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,\ell+1}\}_{j=1}^{m_k}$ 和 $\{\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{z}^p,(i),j,\ell+1}\}_{j=1}^{m_k}$ 的更新过程表示为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,\ell+1} &= \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{z}^p,(i),j,\ell+1} \left(\left(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}^p}^{\tilde{\mathbf{y}}^p,(i),j,\ell} \right)^T (\mathbf{R}^{\mathbf{y}})^{-1} \right. \\ &\quad \cdot \tilde{\mathbf{y}}_k^{(i),j,\ell} + \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{X}}^{(i),\ell}} \left[(s \mathbf{X}_k)^{-1} \right] \\ &\quad \cdot \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}^p} \bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i),\ell} \left. \right) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\beta_{k|k}^{t,(i),\ell+1} = \frac{1}{2s} \sum_{j=1}^{m_k} \left[\mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T \mathbb{E}_{q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell}, q_{\mathbf{Z}^p}^{(i),\ell}} \left[\left(\mathbf{z}_k^{p,j} - \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}^p} \mathbf{x}_k \right) (\cdot)^T \right] \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \right]_{tt} \quad (44)$$

其中, $[\cdot]_{tt}$ 表示矩阵第 t 个对角元素。

(3) 计算 $q(\mathbf{Z}_k^p)$

根据式(29)和式(32), 第 $\ell+1$ 次变分迭代更新时, $\mathbf{Z}_k^p$ 的变分分布对数形式可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{z}^p,(i),j,\ell+1} &= \left(\left(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}^p}^{\tilde{\mathbf{y}}^p,(i),j,\ell} \right)^T (\mathbf{R}^{\mathbf{y}})^{-1} \mathbf{H}_{\mathbf{Z}^p}^{\tilde{\mathbf{y}}^p,(i),j,\ell} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{X}}^{(i),\ell}} \left[(s \mathbf{X}_k)^{-1} \right] \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T \right)^{-1} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{Z}^p}^{\tilde{\mathbf{y}}^p,(i),j,\ell} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}^v,(i),j,\ell} \\ \mathbf{H}_{\mathbf{Z}^p}^{\mathbf{y}^p,(i),j,\ell} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k^{(i),j,\ell} = \begin{bmatrix} y_k^{v,j} - \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}^v,(i),j,\ell} \bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i),\ell} - \mathbf{b}_k^{\mathbf{y}^v,(i),j,\ell} \\ \mathbf{y}_k^{p,j} - \mathbf{b}_k^{\mathbf{y}^p,(i),j,\ell} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{R}^{\mathbf{y}} \triangleq \text{blkdiag} \left(\mathbf{R}^{\mathbf{y}^v}, \mathbf{R}^{\mathbf{y}^p} \right) \quad (52)$$

(4) 期望计算

在迭代更新估计变量的近似分布时, 涉及如下中间变量的期望计算:

$$\mathbb{E}_{q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell}}(\mathbf{x}_k) = \bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i),\ell} \quad (53)$$

$$\mathbb{E}_{q_{\mathbf{z}^p}^{(i),\ell}} \left(\mathbf{z}_k^{p,j} \right) = \bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,\ell} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{q_{\mathbf{X}}^{(i),\ell}} [\mathbf{X}_k] \\ &= \text{diag} \left(\bar{\sigma}_{k|k}^{1,(i),\ell}, \bar{\sigma}_{k|k}^{2,(i),\ell}, \dots, \bar{\sigma}_{k|k}^{n_{\mathbf{y}}^p,(i),\ell} \right) \\ &= \text{diag} \left(\frac{\beta_{k|k}^{1,(i),\ell}}{\alpha_{k|k}^{1,(i),\ell} - 1}, \frac{\beta_{k|k}^{2,(i),\ell}}{\alpha_{k|k}^{2,(i),\ell} - 1}, \dots, \frac{\beta_{k|k}^{n_{\mathbf{y}}^p,(i),\ell}}{\alpha_{k|k}^{n_{\mathbf{y}}^p,(i),\ell} - 1} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{q_{\mathbf{X}}^{(i),\ell}} \left[(s\mathbf{X}_k)^{-1} \right] \\ &= \text{diag} \left(\frac{\alpha_{k|k}^{1,(i),\ell}}{s\beta_{k|k}^{1,(i),\ell}}, \frac{\alpha_{k|k}^{2,(i),\ell}}{s\beta_{k|k}^{2,(i),\ell}}, \dots, \frac{\alpha_{k|k}^{n_{\mathbf{y}}^p,(i),\ell}}{s\beta_{k|k}^{n_{\mathbf{y}}^p,(i),\ell}} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell}, q_{\mathbf{z}^p}^{(i),\ell}} \left[\left(\mathbf{z}_k^{p,j} - \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^p \mathbf{x}_k \right) (\cdot)^T \right] \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{z}^p,(i),j,\ell} + \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^p \mathbf{P}_{k|k}^{(i),\ell} \left(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^p \right)^T \\ &+ \left(\mathbf{z}_k^{p,(i),j,\ell} - \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^p \bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i),\ell} \right) (\cdot)^T \end{aligned} \quad (57)$$

3.2.2 轮廓朝向角更新

基于贝叶斯定理, k 时刻轮廓朝向角 θ_k 的后验概率分布表示为

$$\begin{aligned} & p(\theta_k | \mathbf{Y}_{1:k}) \\ & \propto p(\mathbf{Y}_k | \theta_k, \mathbf{Y}_{1:k-1}) p(\theta_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}) \\ & = p(\mathbf{Y}_k | \theta_k, \mathbf{Y}_{1:k-1}) p(\theta_k | \theta_{k-1}) p(\theta_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}) \end{aligned} \quad (58)$$

将重要性采样分布 $\pi(\theta_k | \mathbf{Y}_{1:k})$ 改写成递推形式为

$$\pi(\theta_k | \mathbf{Y}_{1:k}) = \pi(\theta_k | \theta_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k}) \pi(\theta_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1}) \quad (59)$$

根据式(58)与式(59), 得到粒子权值更新公式如下:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_k^{(i)} &= \frac{p(\theta_k | \mathbf{Y}_{1:k})}{\pi(\theta_k | \mathbf{Y}_{1:k})} \\ &= \frac{p(\mathbf{Y}_k | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}) p(\theta_k^{(i)} | \theta_{k-1}^{(i)}) p(\theta_{k-1}^{(i)} | \mathbf{Y}_{1:k-1})}{\pi(\theta_k^{(i)} | \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k}) \pi(\theta_{k-1}^{(i)} | \mathbf{Y}_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{Y}_k | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}) p(\theta_k^{(i)} | \theta_{k-1}^{(i)})}{\pi(\theta_k^{(i)} | \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k})} w_{k-1}^{(i)} \end{aligned} \quad (60)$$

其中, $\tilde{w}_k^{(i)}$ 表示 k 时刻第 i 个粒子对应的未归一化的权值。

根据式(60)可知, 粒子权值更新计算的关键在于似然函数 $p(\mathbf{Y}_k | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1})$ 的求解, 而 $p(\mathbf{Y}_k | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1})$ 可通过式(28), 对条件联合概率分布 $p(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1})$ 进行边缘化处理得到。

由于条件联合概率分布 $p(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1})$ 表达式复杂, 无法直接根据式(28)求得 $p(\mathbf{Y}_k | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1})$ 。于是, 将式(28)改写为

$$\ln p(\mathbf{Y}_k | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}) = \mathcal{L}_k^{(i)} + \text{KL} \left(q^{(i)}(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p) \left\| p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k}) \right\| \right) \quad (61)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k^{(i)} &\triangleq \int q_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{x}_k) q_{\mathbf{X}}^{(i)}(\mathbf{X}_k) q_{\mathbf{Z}^p}^{(i)}(\mathbf{Z}_k^p) \\ &\cdot \ln \frac{p(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k^p | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1})}{q_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{x}_k) q_{\mathbf{X}}^{(i)}(\mathbf{X}_k) q_{\mathbf{Z}^p}^{(i)}(\mathbf{Z}_k^p)} d\mathbf{x}_k d\mathbf{X}_k d\mathbf{Z}_k^p \end{aligned} \quad (62)$$

鉴于式(61)右边第2项已通过变分推断方法达到最小极值点, 因此可忽略该项, 从而获得似然函数 $p(\mathbf{Y}_k | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1})$ 的近似值为

$$p(\mathbf{Y}_k | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}) \approx \exp \left(\mathcal{L}_k^{(i)} \right) \quad (63)$$

其中, $\mathcal{L}_k^{(i)}$ 进一步展开为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k^{(i)} &= \sum_{j=1}^{m_k} \ln \left(\mathcal{N} \left(y_k^{v,j}; g^v(\bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j}, \bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}), R^{y^v} \right) \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{m_k} \ln \left(\mathcal{N} \left(\mathbf{y}_k^{p,j}; \mathbf{g}^p(\bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j}), \mathbf{R}^{y^p} \right) \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{m_k} \ln \left(\mathcal{N} \left(\bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j}; \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^p \bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}, \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{X}}^{(i)}} \left[(s\mathbf{X}_k)^{-1} \right]^{-1} \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T \right) \right) \\ &+ \ln \mathcal{N} \left(\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}; \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)} \right) \\ &+ \sum_{t=1}^{n_{\mathbf{y}}^p} \left[\ln \left(\left(\beta_{k|k-1}^{t,(i)} \right)^{\alpha_{k|k-1}^{t,(i)}} \left(\beta_{k|k}^{t,(i)} \right)^{-\alpha_{k|k}^{t,(i)}} \right) \right. \\ &- \ln \frac{\Gamma \left(\alpha_{k|k-1}^{t,(i)} \right)}{\Gamma \left(\alpha_{k|k}^{t,(i)} \right)} - \left(\alpha_{k|k-1}^{t,(i)} - \alpha_{k|k}^{t,(i)} \right) \overline{\ln \sigma_k^t} \\ &- \left. \left(\beta_{k|k-1}^{t,(i)} - \beta_{k|k}^{t,(i)} \right) \left(\overline{\sigma_k^t} \right)^{-1} \right] \\ &- \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sum_{j=1}^{m_k} \left(\left(\mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^v,(i),j} \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{z}^p,(i),j} \left(\mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^v,(i),j} \right)^T \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{y^v,(i),j} \mathbf{P}_{k|k}^{(i)} \left(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{y^v,(i),j} \right)^T \right) \left(\mathbf{R}^{y^v} \right)^{-1} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^p,(i),j} \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{z}^p,(i),j} \left(\mathbf{H}_{\mathbf{z}^p}^{y^p,(i),j} \right)^T \right) \left(\mathbf{R}^{y^p} \right)^{-1} \right. \\ &+ \left. \left(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}^p} \mathbf{P}_{k|k}^{(i)} \left(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{z}^p} \right)^T + \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{z}^p,(i),j} \right) \right. \\ &\cdot \left. \left(\mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{X}}^{(i)}} \left[(s\mathbf{X}_k)^{-1} \right] \mathbf{T}_{\theta_k^{(i)}}^T \right) \right] \\ &- \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\mathbf{P}_{k|k}^{(i)} \left(\mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)} \right)^{-1} \right) + \frac{1}{2} \left(n_{\mathbf{x}} + m_k n_{\mathbf{y}}^p \right) \\ &\cdot \left(\ln 2\pi + 2 \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \mathbf{P}_{k|k}^{(i)} \right| + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_k} \ln \left| \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{z}^p,(i),j} \right| \end{aligned} \quad (64)$$

$$\overline{\ln \sigma_k^t} = \mathbb{E}_{q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell}} [\ln \sigma_k^t] = -\psi \left(\alpha_{k|k}^{t,(i)} \right) + \ln \beta_{k|k}^{t,(i)} \quad (65)$$

$$\overline{(\sigma_k^t)^{-1}} = \mathbb{E}_{q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell}} \left[(\sigma_k^t)^{-1} \right] = \frac{\alpha_{k|k}^{t,(i)}}{\beta_{k|k}^{t,(i)}} \quad (66)$$

其中, $\psi(\cdot)$ 为digamma函数。

对所有粒子的权值进行归一化处理:

$$w_k^{(i)} = \frac{\tilde{w}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \tilde{w}_k^{(i)}} \quad (67)$$

若有效粒子数 N_e 低于预设阈值, 则对粒子进行重采样, 以解决粒子退化问题。有效粒子数 N_e 按照式(68)计算^[47]为

$$N_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(w_k^{(i)} \right)^2} \quad (68)$$

3.3 算法流程

本文提出的基于变分边缘化粒子滤波的扩展目标跟踪算法在 k 时刻的完整步骤如**算法1**所示。从**算法1**不难看出, 所提算法的计算复杂度, 主要受粒子数 N 与变分贝叶斯推断的最大迭代次数 $\ell_{\max}$ 的影响, 且与这2个参数呈正比关系。通过边缘化方法, 对高维状态空间分解, 粒子滤波算法仅需对单维度变量(即轮廓朝向角)进行粒子采样与权重更新, 在保证估计精度的情况下使用较少的粒子数, 显著降低计算量, 避免传统粒子滤波在处理高维度状态估计问题时会遇到的“维度灾难”问题。在变分贝叶斯推断中, 通过合理设置共轭先验分布, 使得获得的近似后验具有相同的分布形式, 进而迭代计算仅需调整分布的参数, 有效简化计算过程。同时, 从后续的仿真实验可以看到仅需较少次迭代即可收敛。综上所述, 所提算法在估计精度与计算效率之间能够实现较好的平衡。此外, 每个粒子的计算过程是相互独立的, 且由于平均场理论的引入, 每个变量的变分分布参数亦可独立更新, 因此在实际工程应用中, 可采用并行计算方法进一步改善算法的实时性。

4 实验验证

为了验证本文提出算法的可行性与有效性, 针对二维平面上的椭圆机动目标跟踪场景, 开展300次独立的Monte Carlo仿真实验。雷达可获取的量测信息包括径向距离、方位角与多普勒速度, 其量测噪声相互独立, 且都服从零均值高斯分布。本文提出算法简记为VMPF-EOT (Variational Mar-

ginalized Particle Filter Based Extended Object Tracker), 对比算法包括MEM-EKF^[17] (Multiplicative Error Model Extended Kalman Filter), MEM-EKF-D^[37] (MEM-EKF Doppler)以及RM-EOT^[13] (Random Matrix Based Extended Object Tracker)。上述对比算法的状态模型与量测模型均是在笛卡儿坐标系下建立的, 需对雷达在极坐标系下获得的位置量测及其统计信息进行转换计算, 然后利用转换后的量测信息进行目标跟踪。

算法 1 基于变分边缘化粒子滤波的扩展目标跟踪算法
Alg. 1 Variational marginalized particle filtering based extended object tracking algorithm

输入: 分布参数 $\{\bar{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{(i)}, \{\alpha_{k-1|k-1}^{t,(i)}, \beta_{k-1|k-1}^{t,(i)}\}_{t=1}^{n_y^p}, \theta_{k-1}^{(i)}, w_{k-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$, 量测 $\mathbf{Y}_k$.

输出: 分布参数 $\{\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(i)}, \{\alpha_{k|k}^{t,(i)}, \beta_{k|k}^{t,(i)}\}_{t=1}^{n_y^p}, \theta_k^{(i)}, w_k^{(i)}\}_{i=1}^N$.

步骤1 状态预测:

- (1) 轮廓朝向角预测: 根据式(17), 采样新粒子集 $\{\theta_k^{(i)}\}_{i=1}^N$;
- (2) 运动状态与轮廓尺寸预测:

for $i = 1, 2, \dots, N$

根据式(20)和式(21), 计算 $p(\mathbf{x}_k | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1})$;
 根据式(23)和式(24), 计算 $p(\mathbf{X}_k | \theta_k^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1})$;
 end for

步骤2 量测更新:

- (1) 运动状态与轮廓尺寸更新:

for $i = 1, 2, \dots, N$

初始化:

$\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i),0} = \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k}^{(i),0} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)}$;
 $\alpha_{k|k}^{t,(i),0} = \alpha_{k|k-1}^{t,(i)}, \beta_{k|k}^{t,(i),0} = \beta_{k|k-1}^{t,(i)} (t = 1, 2, \dots, n_y^p)$;
 $\bar{\mathbf{z}}_k^{p,(i),j,0} = \mathbf{y}_k^{p,j}, \boldsymbol{\Sigma}_k^{z^{p,(i),j},0} = s\bar{\mathbf{X}}_k (j = 1, 2, \dots, m_k)$;
 for $l = 1, 2, \dots, \ell_{\max}$

根据式(35)—式(37), 计算 $q_{\mathbf{x}}^{(i),\ell}(\mathbf{x}_k)$;
 根据式(42)—式(44), 计算 $q_{\mathbf{X}}^{(i),\ell}(\mathbf{X}_k)$;
 根据式(47)—式(49), 计算 $q_{\mathbf{Z}^p}^{(i),\ell}(\mathbf{Z}_k^p)$;
 end for

4.1 仿真场景构建

雷达采样间隔 $T = 40 \text{ ms}$, 径向距离、方位角以及多普勒速度量测噪声方差分别设置为 0.01 m^2 , 0.001 rad^2 和 $0.01 \text{ m}^2/\text{s}^2$ 。椭圆扩展目标长轴为 5 m , 短轴为 2 m , 做转弯率未知的恒定速率运动, 真实运动轨迹如图2所示, 图3给出目标真实转弯率随时

间的变化。每个采样时刻目标产生的量测个数 m_k 服从 $\lambda = 20$ 的泊松分布, 位置量测通过在目标表面上均匀采样获得。

采用恒定转弯率与速率模型(Constant Turn Rate and Velocity Vehicle Model)对目标运动状态随时间的演变建模:

$$\mathbf{x}_{k-1} = f_k(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} x_{k-1} + \frac{v_{k-1}^x}{w_{k-1}} \sin(w_{k-1}T) - \frac{v_{k-1}^y}{w_{k-1}} (1 - \cos(w_{k-1}T)) \\ y_{k-1} + \frac{v_{k-1}^x}{w_{k-1}} (1 - \cos(w_{k-1}T)) + \frac{v_{k-1}^y}{w_{k-1}} \sin(w_{k-1}T) \\ v_{k-1}^x \cos(w_{k-1}T) - v_{k-1}^y \sin(w_{k-1}T) \\ v_{k-1}^x \sin(w_{k-1}T) + v_{k-1}^y \cos(w_{k-1}T) \\ w_{k-1} \end{bmatrix} + \mathbf{w}_k \quad (69)$$

其中, 过程噪声 $\mathbf{w}_k$ 协方差矩阵 $\mathbf{Q}_k^x$ 为

$$\mathbf{Q}_k^x = \text{blkdiag} \left\{ q_1 \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \frac{T^2}{2} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \frac{T^2}{2} \mathbf{I}_{2 \times 2} & T \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, q_2 T \right\} \quad (70)$$

初始时刻, 扩展目标状态联合先验分布为

$$p(\mathbf{x}_0, \theta_0, \mathbf{X}_0) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_0; \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0) \mathcal{N}(\theta_0; \bar{\theta}_0, \Theta_0) \cdot \prod_{t=1}^{n_y^p} \mathcal{IG}(\sigma_0^t; \alpha_0^t, \beta_0^t) \quad (71)$$

其中, 初始目标中心运动状态估计 $\bar{\mathbf{x}}_0 = [0 \text{ m}, 0 \text{ m}, 0 \text{ m/s}, 0 \text{ m/s}, 0 \text{ rad/s}]^T$, 初始目标中心状态估计误差协方差矩阵 $\mathbf{P}_0 = \text{diag}(1 \text{ m}^2, 1 \text{ m}^2, 1 \text{ m}^2/\text{s}^2, 1 \text{ m}^2/\text{s}^2, 0.001 \text{ rad}^2/\text{s}^2)$, 初始轮廓朝向角估计 $\bar{\theta}_0 = 0 \text{ rad}$, 初始轮廓朝向角估计误差方差 $\Theta_0 = 0.001 \text{ rad}^2$, 初始伽马分布参数 $\{\alpha_0^t = 6, \beta_0^t = 25\}_{t=1}^{n_y^p}$ 。基于分布 $\mathcal{N}(\theta_0; \bar{\theta}_0, \Theta_0)$ 产生初始粒子集 $\{\theta_0^{(i)}\}_{i=1}^N$, 则目标状态先验分布近似为

$$p(\mathbf{x}_0, \theta_0, \mathbf{X}_0) = \sum_{i=1}^N \left(w_0^{(i)} \delta(\theta_0 - \theta_0^{(i)}) \cdot \mathcal{N}(\mathbf{x}_0; \bar{\mathbf{x}}_0^{(i)}, \mathbf{P}_0^{(i)}) \cdot \prod_{t=1}^{n_y^p} \mathcal{IG}(\sigma_0^t; \alpha_0^{t,(i)}, \beta_0^{t,(i)}) \right) \quad (72)$$

其中, $w_0^{(i)} = 1/N$, $\bar{\mathbf{x}}_0^{(i)} = \bar{\mathbf{x}}_0$, $\mathbf{P}_0^{(i)} = \mathbf{P}_0$, $\{\alpha_0^{t,(i)} = \alpha_0^t, \beta_0^{t,(i)} = \beta_0^t\}_{t=1}^{n_y^p}$ 。

仿真实验中, 其余超参数设置如表1所示。

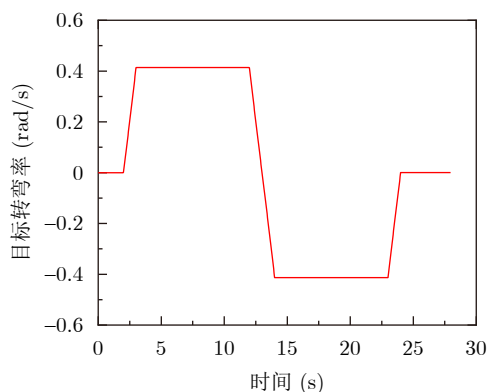


图3 目标真实转弯率

Fig. 3 True object turn rate

表1 仿真参数

Tab. 1 Simulation parameters

参数	数值
粒子数 N	10
最大迭代次数 $\ell_{\max}$	5
过程噪声参数 q_1	0.1
过程噪声参数 q_2	0.1
轮廓朝向角过程噪声方差 Q_k^{θ}	0.005
遗忘因子 ρ_k	0.99
重采样阈值 N_{thr}	0.2N
轮廓缩放系数 s	1/4

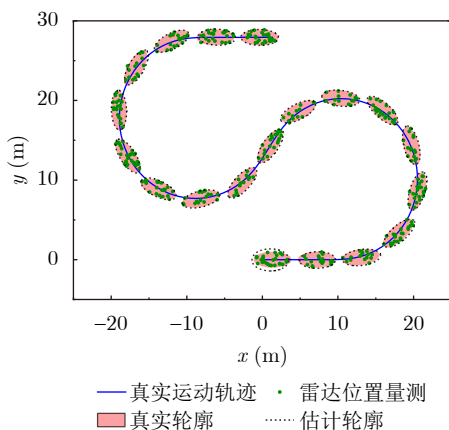


图2 基于VMPF-EOT算法的扩展目标跟踪

Fig. 2 Extended object tracking based on VMPF-EOT

4.2 结果与分析

为了有效衡量扩展目标算法对目标中心位置与轮廓的联合估计效果, 采用交并比(Intersection over Union, IoU)评价算法性能的好坏^[20]。IoU取值范围为[0, 1], IoU值越接近1, 则表示算法估计性能越好。

$$\text{IoU} = \frac{S_1 \cap S_2}{S_1 \cup S_2} \quad (73)$$

其中, $S_1 \cap S_2$ 与 $S_1 \cup S_2$ 分别表示目标真实轮廓面积 S_1 与目标估计轮廓面积 S_2 的交集与并集。

图2给出本文提出的VMPF-EOT算法在不同时刻对矩形扩展目标的跟踪效果。由图2可以看出, 初始时刻由于目标轮廓先验信息未知, 轮廓估计精度不高, 随着量测信息的累积与状态的迭代更新, 轮廓估计精度不断提高, 目标不论是直线运动还是持续转弯, 估计轮廓始终能与真实轮廓保持较好的吻合。

图4给出基于300次Monte Carlo仿真实验结果统计得到的IoU均值以及轮廓朝向角、目标长度与

宽度估计的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)。结合图3与图4(a)可以看出, 本文VMPF-EOT算法对目标轮廓朝向角的估计误差逐渐收敛至一个稳定的值域内并做小幅波动, 基本上不受目标运动状态的影响, 而其他算法在目标做持续转弯运动时, 对目标轮廓朝向角的估计误差较大, 这表明采用边缘化粒子滤波算法能够有效提升目标轮廓朝向角的估计精度, 且在跟踪机动目标时估计性能优势更加明显。值得注意的是, RM-EOT算法在目标做机动运动时的估计误差显著大于其他算法, 主要是因为RM-EOT算法是直接采用随机矩阵对目标轮廓建模, 轮廓朝向角与尺寸信息均隐含于随机矩阵中, 而MEM-EKF, MEM-EKF-D与VMPF-EOT算法均显式定义目标轮廓朝向角, 当目标转弯率较大时, 能够快速响应目标轮廓状态的变化。在目标处于匀速直线运动阶段, 目标量测的空间统计分布与真实轮廓形状较一致且稳定, 进而RM-EOT算法能够精确地捕捉目标轮廓状态, 而MEM-EKF算法由于显式参数化轮廓建模, 受噪声和模型线性化误差影响, 估计结果波动较大, 导致其轮廓估计

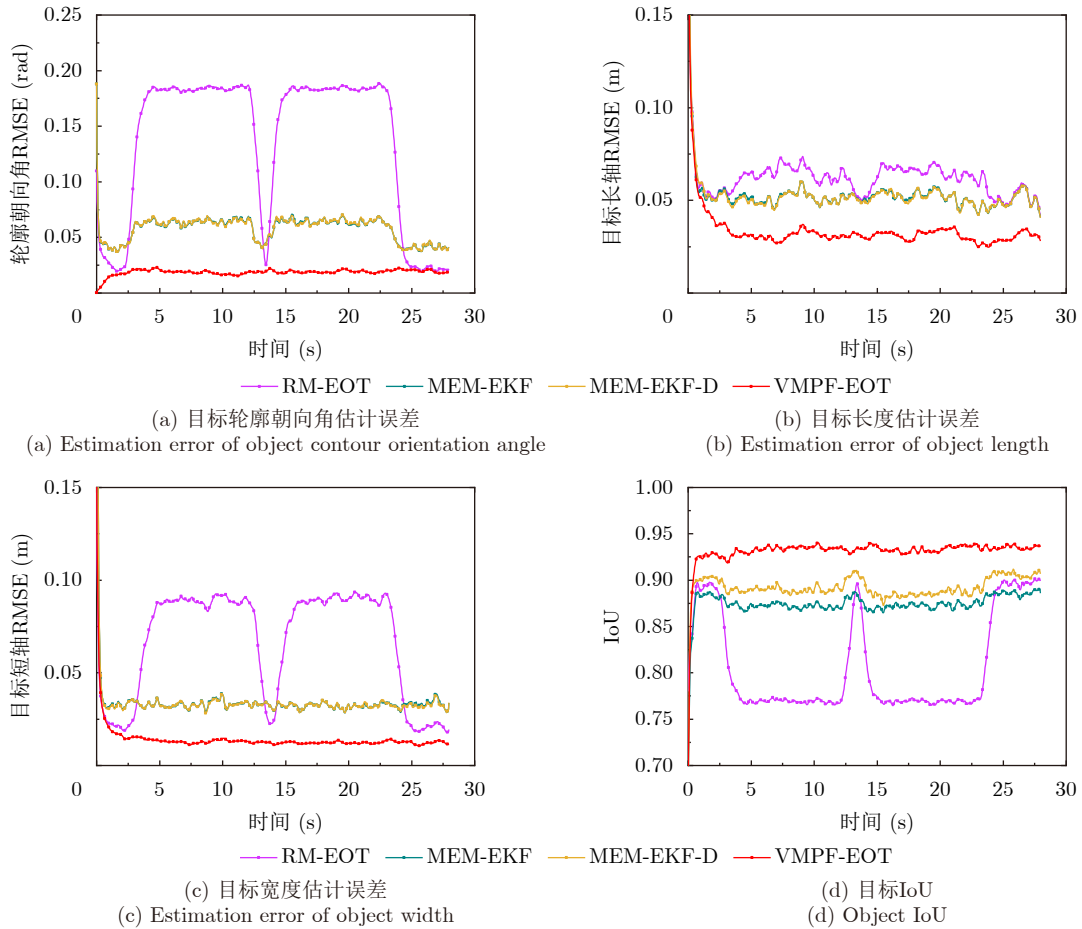


图4 目标轮廓估计结果

Fig. 4 Estimation results of object contour state

精度要低于RM-EOT算法。从图4(b)和图4(c)可以看出, VMPF-EOT算法对轮廓尺寸的估计精度显著优于RM-EOT, MEM-EKF以及MEM-EKF-D算法, 这是因为轮廓朝向角与轮廓尺寸估计之间存在耦合关系, 轮廓朝向角估计性能的提升有利于改善轮廓尺寸的估计精度。图4(d)给出了各算法在不同时刻跟踪矩形目标的IoU值, 其反映目标综合跟踪效果, 从图中看出本文提出的VMPF-EOT算法的跟踪精度与稳定性均优于对比算法。

图5给出基于300次Monte Carlo仿真实验结果统计得到的目标中心位置、速度以及转弯率估计的均方根误差。从图5可以看出, RM-EOT与MEM-EKF算法对目标位置、速度以及转弯率估计精度相当, 且均低于MEM-EKF-D与VMPF-EOT算法, 这是因为前者只利用了雷达位置量测信息, 多普勒速度量测信息的缺失, 使得估计性能要劣于后者。尽管MEM-EKF-D与VMPF-EOT算法均额外使用雷达速度量测用于目标跟踪, 但是VMPF-EOT算法对运动状态估计精度要优于MEM-EKF-D算法, 造成

上述现象的原因有两方面: 一是MEM-EKF-D算法采用坐标转换后的位置量测用于目标跟踪, 量测转换不可避免地会造成信息损失, 而VMPF-EOT算法借助辅助变量, 直接建立极坐标系下的量测方程, 并通过变分贝叶斯方法迭代计算, 求得目标状态的更优解; 二是VMPF-EOT算法对轮廓状态的估计精度优于MEM-EKF-D算法, 有益于运动状态估计性能的提升。

4.3 参数选择

本节将详细探讨参数选择对算法性能的影响。

首先, 考察粒子数 N 对所提出算法估计精度的影响。固定其他仿真参数不变, 变分推断的最大迭代次数 $\ell_{\max}$ 取10, 估计结果在图6中给出。可以看出, 当粒子数 $N \geq 6$ 时, 表征轮廓估计精度的IoU曲线基本重合, 这意味着仅需要较少的粒子, 就能保证算法的估计性能。这是因为算法基于边缘化方法, 对高维状态空间进行分解, 仅对单一维度变量进行粒子采样估计, 粒子的利用效率较高。

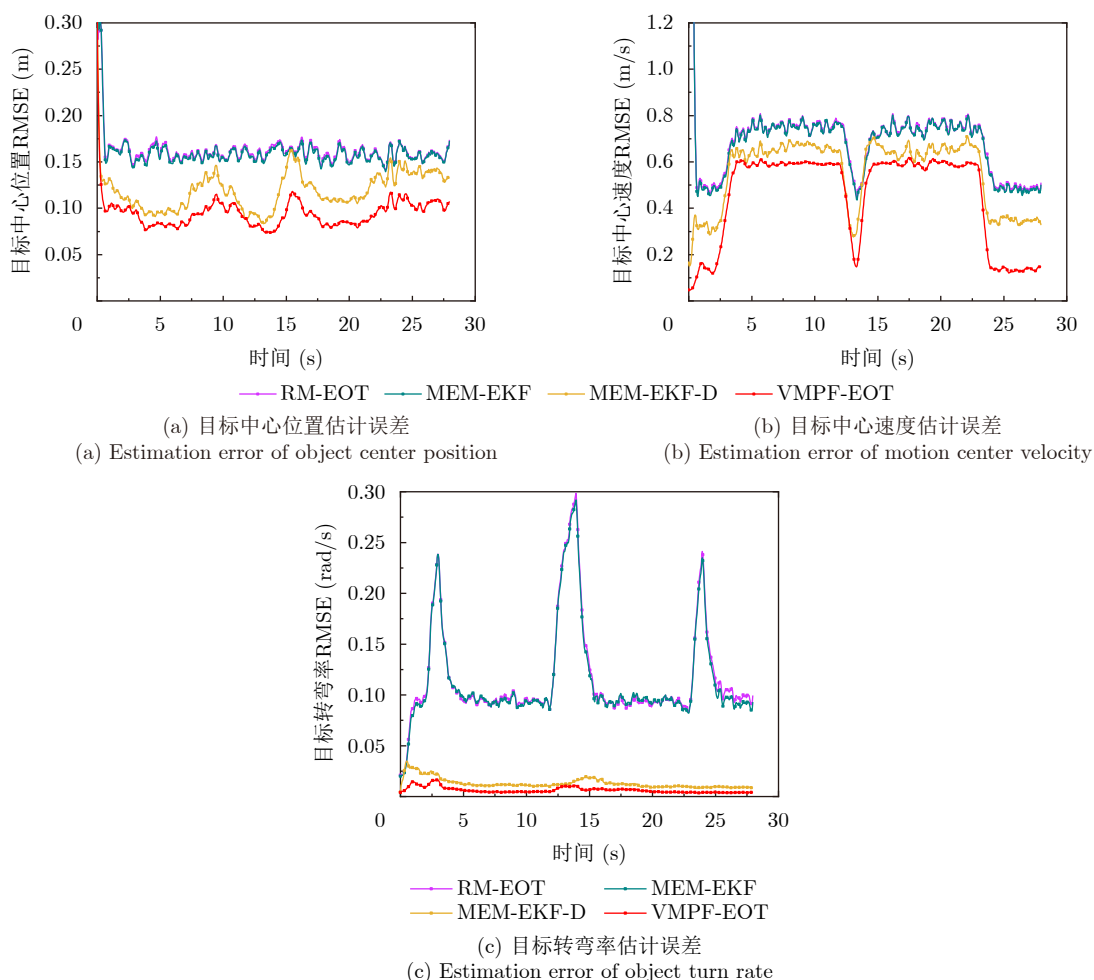


图5 目标运动估计结果

Fig. 5 Estimation results of object motion state

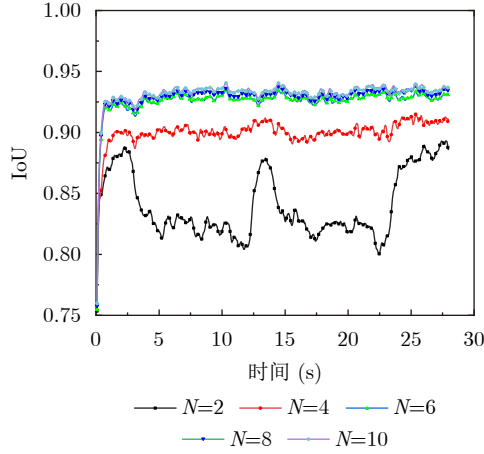


图6 VMPF-EOT算法在粒子数不同时的轮廓估计精度

Fig. 6 Contour estimation accuracy of VMPF-EOT algorithm with different particle numbers

接下来, 考虑变分推断的最大迭代次数 $\ell_{\max}$ 对所提算法估计精度的影响。固定其他仿真参数不变, 粒子数 N 取6, 估计结果在图7(a)中给出。当最大迭代次数 $\ell_{\max} \geq 4$ 时, IoU曲线重合度非常高, 这意味变分推断经过几次迭代即可收敛。为了进一步验证以上结论, 采用自适应迭代方法, 将相对估计误差 e_r 作为判断是否终止迭代计算的条件^[48]。

$$e_r = \max \left\{ \left\{ \left| \frac{[\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{\ell+1}]_t - [\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{\ell}]_t}{[\bar{\mathbf{x}}_{k|k}^{\ell}]_t} \right| \right\}_{t=1}^{n_x}, \left\{ \left| \frac{\bar{\sigma}_{k|k}^{t, \ell+1} - \bar{\sigma}_{k|k}^{t, \ell}}{\bar{\sigma}_{k|k}^{t, \ell}} \right| \right\}_{t=1}^{n_y} \right\} < \varepsilon \quad (74)$$

其中, $[\cdot]_t$ 表示向量第 t 个元素; ε 为一个数值很小的

正实数, 可根据实际精度要求设置合理的值。在本次仿真实验中, 阈值 ε 取0.01。图7(a)中, 采用自适应迭代方法时, 算法的估计精度与固定点迭代方法($\ell_{\max} \geq 4$)相当。图7(b)给出每个采样时刻自适应迭代方法所需的迭代次数, 在整个跟踪过程中, 最大迭代次数为4次, 而在大多数时刻迭代次数维持在2次左右。因此, 变分推断方法的引入对算法计算复杂度的增加是在可控的范围内的。

基于以上关于参数选择的仿真实验结论, 在实际应用中, 为了保证VMPF-EOT算法能够在计算复杂度与算法性能之间达到较好的平衡, 对参数 N 和 $\ell_{\max}$ 的设置可参考以下流程: 首先, 变分推断方法使用自适应的迭代方式, 迭代终止阈值 ε 选择一个较小值, 以保证迭代计算的收敛; 然后, 选择保证算法达到或接近最优性能时所需的最小粒子数; 最后, 将变分推断的最大迭代次数设置为保证迭代收敛的最小值。

本文使用的仿真平台软件为Matlab2024b, 台式电脑CPU 型号为英特尔酷睿i5-13600KF, 内存为32 GB。表2给出各对比算法单步长运行时间的对比结果, 其中VMPF-EOT算法的参数选择调整为 $N = 6$, $\ell_{\max} = 4$, 因为算法性能基本达到最优的同时, 所需的计算开销最小, 并不影响算法对比的公平性。RM-EOT算法所需的计算时间最少, 相比之下, MEM-EKF与MEM-EKF-D算法的计算时间大幅提升, 这是因为后者采用序贯的方式逐个处理每个量测信息, 而RM-EOT采用批处理方式更新目标状态。由于边缘化变分粒子滤波计算框架的引入, VMPF-EOT算法所需运行时间最多,

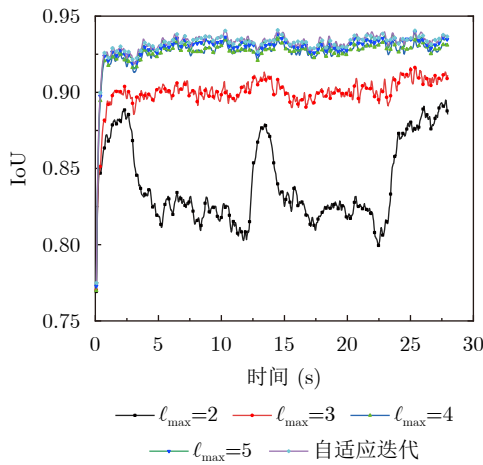
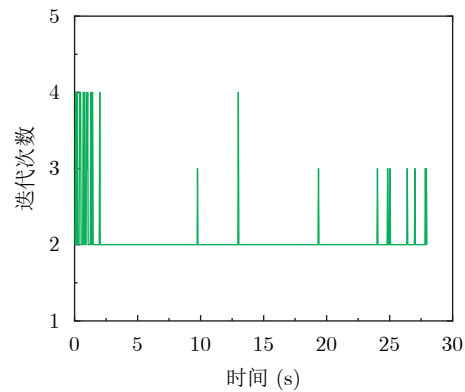
(a) 迭代次数不同时的轮廓精度
(a) Contour estimation accuracy with different iteration numbers(b) 自适应迭代方法在不同时刻的迭代次数
(b) Iteration number of adaptive iterative method over time

图7 VMPF-EOT算法在迭代次数不同时的估计结果

Fig. 7 Estimation results of VMPF-EOT algorithm with different iteration numbers

表 2 各算法的平均单步长运行时间

Tab. 2 Average single-step running time of various algorithms

算法	运行时间(ms)
RM-EOT	0.0653
MEM-EKF	0.3274
MEM-EKF-D	0.4659
VMPF-EOT	0.7238
VMPF-EOT(并行计算)	0.2587

但相较于MEM-EKF-D算法增幅有限,这是因为对计算时间影响的2个参数(即粒子数与变分推断迭代次数)在基本上不影响估计性能的条件下,可设置为较小的值。鉴于每个粒子状态的更新是彼此独立的,以及变分推断中各变量变分分布的更新亦是彼此独立的,可采用并行计算改善VMPF-EOT的实时性,从表2中可看到,其计算时间显著下降。在工程应用中,可借鉴该思路以应对实时性与估计精度难以同时满足的情形。

5 结语

针对车载毫米波雷达扩展目标跟踪问题,本文提出了一种变分边缘化粒子滤波算法,实现目标运动状态与轮廓状态的联合递推估计。以椭圆对目标平面轮廓形状建模,显式定义轮廓朝向角,并选取合适的参数化分布作为轮廓朝向角与尺寸的共轭先验联合分布,以便于目标状态分布的迭代更新。通过引入量测源位置作为辅助变量,建立扩展目标的雷达量测方程,其描述极坐标下获得的位置、多普勒速度量测与笛卡儿坐标系下的扩展目标状态之间复杂的非线性关系。基于边缘化思想,采用粒子滤波算法单独估计目标轮廓朝向角,并以变分贝叶斯方法,迭代求解以目标轮廓朝向角估计为条件的目标运动状态与轮廓尺寸的联合后验概率分布。通过实验仿真验证本文提出算法的有效性,经分析得出,所提算法在机动场景下能够稳定精确地估计出轮廓状态,相比现有算法具有性能优势。

考虑到实际道路场景下,目标运动受限于二维平面,可忽略其垂直方向上的运动自由度,基于雷达量测垂直维度的统计特性提取目标高度信息。在后续研究中,可在此基础上,结合本文所提出的算法,推广至三维场景下,以满足更加广泛的应用需求。此外,结合数据关联算法,提升目标跟踪的鲁棒性,以应对复杂场景下的多目标跟踪问题,亦是未来研究方向之一。

利益冲突 所有作者均声明不存在利益冲突

Conflict of Interests The authors declare that there is no conflict of interests

参考文献

- [1] PANDHARIPANDE A, CHENG C H, DAUWELS J, *et al.* Sensing and machine learning for automotive perception: A review[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2023, 23(11): 11097–11115. doi: [10.1109/JSEN.2023.3262134](https://doi.org/10.1109/JSEN.2023.3262134).
- [2] 张新钰, 卢毅果, 高鑫, 等. 面向智能网联汽车的车路协同感知技术及发展趋势[J]. *自动化学报*, 2025, 51(2): 233–248. doi: [10.16383/j.aas.c230575](https://doi.org/10.16383/j.aas.c230575).
ZHANG Xinyu, LU Yiguo, GAO Xin, *et al.* Vehicle-road collaborative perception technology and development trend for intelligent connected vehicles[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2025, 51(2): 233–248. doi: [10.16383/j.aas.c230575](https://doi.org/10.16383/j.aas.c230575).
- [3] ZHANG Yuxiao, CARBALLO A, YANG Hanting, *et al.* Perception and sensing for autonomous vehicles under adverse weather conditions: A survey[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2023, 196: 146–177. doi: [10.1016/j.isprsjprs.2022.12.021](https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2022.12.021).
- [4] SRIVASTAV A and MANDAL S. Radars for autonomous driving: A review of deep learning methods and challenges[J]. *IEEE Access*, 2023, 11: 97147–97168. doi: [10.1109/ACCESS.2023.3312382](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3312382).
- [5] 黄岩, 张慧, 兰吕鸿康, 等. 汽车毫米波雷达信号处理技术综述[J]. *雷达学报*, 2023, 12(5): 923–970. doi: [10.12000/JR23119](https://doi.org/10.12000/JR23119).
HUANG Yan, ZHANG Hui, LAN Lyuhongkang, *et al.* Overview of signal processing techniques for automotive millimeter-wave radar[J]. *Journal of Radars*, 2023, 12(5): 923–970. doi: [10.12000/JR23119](https://doi.org/10.12000/JR23119).
- [6] PATOLE S M, TORLAK M, WANG Dan, *et al.* Automotive radars: A review of signal processing techniques[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2017, 34(2): 22–35. doi: [10.1109/MSP.2016.2628914](https://doi.org/10.1109/MSP.2016.2628914).
- [7] ZHUANG Yuan, WANG Binliang, HUAI Jianzhu, *et al.* 4D iRIOM: 4D imaging radar inertial odometry and mapping[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2023, 8(6): 3246–3253. doi: [10.1109/LRA.2023.3266669](https://doi.org/10.1109/LRA.2023.3266669).
- [8] MEYER F and WILLIAMS J L. Scalable detection and tracking of geometric extended objects[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 6283–6298. doi: [10.1109/TSP.2021.3121631](https://doi.org/10.1109/TSP.2021.3121631).
- [9] XIA Yuxuan, GARCÍA-FERNÁNDEZ Á F, MEYER F, *et al.* Trajectory PMB filters for extended object tracking using belief propagation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(6): 9312–9331. doi: [10.1109/TAES.2023.3317233](https://doi.org/10.1109/TAES.2023.3317233).
- [10] GRANSTRÖM K, FATEMI M, and SVENSSON L. Poisson multi-bernoulli mixture conjugate prior for multiple extended target filtering[J]. *IEEE Transactions on*

- Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(1): 208–225. doi: [10.1109/TAES.2019.2920220](https://doi.org/10.1109/TAES.2019.2920220).
- [11] GRANSTRÖM K, BAUM M, and REUTER S. Extended object tracking: Introduction, overview, and applications[J]. *Journal of Advances in Information Fusion*, 2017, 12(2): 139–174.
- [12] YURDAKUL O C, ÇETINKAYA M, ÇELEBI E, *et al.* A Rao-Blackwellized particle filter for superelliptical extended target tracking[C]. The 2024 27th International Conference on Information Fusion, Venice, Italy, 2024: 1–8. doi: [10.23919/FUSION59988.2024.10706504](https://doi.org/10.23919/FUSION59988.2024.10706504).
- [13] KOCH J W. Bayesian approach to extended object and cluster tracking using random matrices[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(3): 1042–1059. doi: [10.1109/TAES.2008.4655362](https://doi.org/10.1109/TAES.2008.4655362).
- [14] LAN Jian and LI Xiaorong. Tracking of extended object or target group using random matrix: New model and approach[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, 52(6): 2973–2989. doi: [10.1109/TAES.2016.130346](https://doi.org/10.1109/TAES.2016.130346).
- [15] FELDMANN M, FRÄNKEN D, and KOCH W. Tracking of extended objects and group targets using random matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(4): 1409–1420. doi: [10.1109/TSP.2010.2101064](https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2101064).
- [16] ORGUNER U. A variational measurement update for extended target tracking with random matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(7): 3827–3834. doi: [10.1109/TSP.2012.2192927](https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2192927).
- [17] YANG Shishan and BAUM M. Tracking the orientation and axes lengths of an elliptical extended object[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(18): 4720–4729. doi: [10.1109/TSP.2019.2929462](https://doi.org/10.1109/TSP.2019.2929462).
- [18] GRAMSCH C, YANG Shishan, and ALQADERI H. A batch update using multiplicative noise modelling for extended object tracking[C]. The 2024 27th International Conference on Information Fusion, Venice, Italy, 2024: 1–8. doi: [10.23919/FUSION59988.2024.10706375](https://doi.org/10.23919/FUSION59988.2024.10706375).
- [19] ZHANG Le and LAN Jian. Tracking of extended object using random matrix with non-uniformly distributed measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 3812–3825. doi: [10.1109/TSP.2021.3090946](https://doi.org/10.1109/TSP.2021.3090946).
- [20] STEUERNAGEL S, THORMANN K, and BAUM M. Random matrix-based tracking of rectangular extended objects with contour measurements[C]. The 2024 27th International Conference on Information Fusion, Venice, Italy, 2024: 1–8. doi: [10.23919/FUSION59988.2024.10706288](https://doi.org/10.23919/FUSION59988.2024.10706288).
- [21] CAO Xiaomeng, LAN Jian, LIU Yushuang, *et al.* Tracking of rectangular object using key points with regionally concentrated measurements[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2024, 25(6): 5312–5327. doi: [10.1109/TITS.2023.3332606](https://doi.org/10.1109/TITS.2023.3332606).
- [22] XIA Yuxuan, WANG Pu, BERNTORP K, *et al.* Learning-based extended object tracking using hierarchical truncation measurement model with automotive radar[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2021, 15(4): 1013–1029. doi: [10.1109/JSTSP.2021.3058062](https://doi.org/10.1109/JSTSP.2021.3058062).
- [23] TUNCER B, ORGUNER U, and ÖZKAN E. Multi-ellipsoidal extended target tracking with variational bayes inference[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 3921–3934. doi: [10.1109/TSP.2022.3192617](https://doi.org/10.1109/TSP.2022.3192617).
- [24] BAUM M and HANEBECK U D. Extended object tracking with random hypersurface models[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, 50(1): 149–159. doi: [10.1109/TAES.2013.120107](https://doi.org/10.1109/TAES.2013.120107).
- [25] WAHLSTRÖM N and ÖZKAN E. Extended target tracking using Gaussian processes[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(16): 4165–4178. doi: [10.1109/TSP.2015.2424194](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2424194).
- [26] 郭云飞, 李勇, 任昕, 等. 基于高斯过程的多机动扩展目标跟踪[J]. 自动化学报, 2020, 46(11): 2392–2403. doi: [10.16383/j.aas.c180849](https://doi.org/10.16383/j.aas.c180849).
- GUO Yunfei, LI Yong, REN Xin, *et al.* Multiple maneuvering extended target tracking based on Gaussian process[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(11): 2392–2403. doi: [10.16383/j.aas.c180849](https://doi.org/10.16383/j.aas.c180849).
- [27] 陈辉, 边斌超, 连峰, 等. 基于Transformer复杂运动辨识的机动星凸形扩展目标跟踪方法[J]. 雷达学报(中英文), 2024, 13(3): 629–645. doi: [10.12000/JR24031](https://doi.org/10.12000/JR24031).
- CHEN Hui, BIAN Binchao, LIAN Feng, *et al.* A novel method for tracking complex maneuvering star convex extended targets using Transformer network[J]. *Journal of Radars*, 2024, 13(3): 629–645. doi: [10.12000/JR24031](https://doi.org/10.12000/JR24031).
- [28] LAN Jian. Extended object tracking using random matrix with extension-dependent measurement numbers[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(4): 4464–4477. doi: [10.1109/TAES.2023.3241888](https://doi.org/10.1109/TAES.2023.3241888).
- [29] ŞAHİN K K, BALCI A E, and ÖZKAN E. Random matrix extended target tracking for trajectory-aligned and drifting targets[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2024, 18(11): 2247–2263. doi: [10.1049/rsn2.12628](https://doi.org/10.1049/rsn2.12628).
- [30] WEN Zheng, LAN Jian, ZHENG Le, *et al.* Velocity-dependent orientation estimation using variance adaptation for extended object tracking[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2024, 31: 3109–3113. doi: [10.1109/LSP.2024.3492718](https://doi.org/10.1109/LSP.2024.3492718).
- [31] 李佳彤, 杨金龙. 基于PMBM滤波的机动非椭圆扩展目标跟踪算法[J]. 信号处理, 2023, 39(6): 1108–1119. doi: [10.16798/j.issn.1003-0530.2023.06.016](https://doi.org/10.16798/j.issn.1003-0530.2023.06.016).
- LI Jiatong and YANG Jinlong. A maneuvering non-

- ellipsoidal extended target tracking algorithm based on PMBM filter[J]. *Journal of Signal Processing*, 2023, 39(6): 1108–1119. doi: [10.16798/j.issn.1003-0530.2023.06.016](https://doi.org/10.16798/j.issn.1003-0530.2023.06.016).
- [32] LI Guchong, LI Gang, and HE You. PMBM-based unresolved-group object tracking[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2024, 60(4): 4229–4240. doi: [10.1109/TAES.2024.3373561](https://doi.org/10.1109/TAES.2024.3373561).
- [33] GARCÍA-FERNÁNDEZ Á F, XIA Yuxuan, and SVENSSON L. Poisson multi-bernoulli mixture filter with general target-generated measurements and arbitrary clutter[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2023, 71: 1895–1906. doi: [10.1109/TSP.2023.3278944](https://doi.org/10.1109/TSP.2023.3278944).
- [34] 陈辉, 张丁丁, 连峰, 等. 扩展目标跟踪Student's t逆Wishart平滑算法[J]. 电子与信息学报, 2024, 46(8): 3353–3362. doi: [10.11999/JEIT231145](https://doi.org/10.11999/JEIT231145).
CHEN Hui, ZHANG Dingding, LIAN Feng, *et al.* Student's t inverse Wishart smoothing algorithm for extended target tracking[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2024, 46(8): 3353–3362. doi: [10.11999/JEIT231145](https://doi.org/10.11999/JEIT231145).
- [35] GRANSTRÖM K, NATALE A, BRACA P, *et al.* Gamma Gaussian inverse Wishart probability hypothesis density for extended target tracking using X-band marine radar data[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2015, 53(12): 6617–6631. doi: [10.1109/TGRS.2015.2444794](https://doi.org/10.1109/TGRS.2015.2444794).
- [36] LAN Jian and LI Xiaorong. Extended-object or group-target tracking using random matrix with nonlinear measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(19): 5130–5142. doi: [10.1109/TSP.2019.2935866](https://doi.org/10.1109/TSP.2019.2935866).
- [37] THORMANN K and BAUM M. Incorporating range rate measurements in EKF-based elliptical extended object tracking[C]. The 2021 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems, Karlsruhe, Germany, 2021: 1–6. doi: [10.1109/MFI52462.2021.9591170](https://doi.org/10.1109/MFI52462.2021.9591170).
- [38] KELLNER D, BARJENBRUCH M, KLAPPSTEIN J, *et al.* Tracking of extended objects with high-resolution Doppler radar[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2016, 17(5): 1341–1353. doi: [10.1109/TITS.2015.2501759](https://doi.org/10.1109/TITS.2015.2501759).
- [39] SCHON T, GUSTAFSSON F, and NORDLUND P J. Marginalized particle filters for mixed linear/nonlinear state-space models[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2279–2289. doi: [10.1109/TSP.2005.849151](https://doi.org/10.1109/TSP.2005.849151).
- [40] MUSTIERE F, BOLIC M, and BOUCHARD M. Rao-Blackwellised particle filters: Examples of applications[C]. The 2006 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, Ottawa, ON, Canada, 2006: 1196–1200. doi: [10.1109/CCECE.2006.277461](https://doi.org/10.1109/CCECE.2006.277461).
- [41] DOUCET A, DE FREITAS N, MURPHY K, *et al.* Rao-Blackwellised particle filtering for dynamic Bayesian networks[C]. The Sixteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Stanford, California, 2000: 176–183. doi: [10.5555/2073946.2073968](https://doi.org/10.5555/2073946.2073968).
- [42] CHENG Cheng, TOURNERET J Y, and LU Xiaodong. A marginalised particle filter with variational inference for non-linear state-space models with Gaussian mixture noise[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2022, 16(2): 238–248. doi: [10.1049/rsn2.12179](https://doi.org/10.1049/rsn2.12179).
- [43] BADAR T, SÄRKKÄ S, ZHAO Zheng, *et al.* Rao-Blackwellized particle filter using noise adaptive Kalman filter for fully mixing state-space models[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2024, 60(5): 6972–6982. doi: [10.1109/TAES.2024.3409644](https://doi.org/10.1109/TAES.2024.3409644).
- [44] CHENG Cheng and TOURNERET J Y. A variational marginalized particle filter for jump Markov nonlinear systems with unknown transition probabilities[J]. *Signal Processing*, 2021, 188: 108226. doi: [10.1016/j.sigpro.2021.108226](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2021.108226).
- [45] TZIKAS D G, LIKAS A C, and GALATSANOS N P. The variational approximation for Bayesian inference[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(6): 131–146. doi: [10.1109/MSP.2008.929620](https://doi.org/10.1109/MSP.2008.929620).
- [46] BISHOP C M. Pattern Recognition and Machine Learning[M]. New York: Springer, 2006: 462–465.
- [47] ARULAMPALAM M S, MASKELL S, GORDON N, *et al.* A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(2): 174–188. doi: [10.1109/78.978374](https://doi.org/10.1109/78.978374).
- [48] 胡玉梅, 潘泉, 胡振涛, 等. 基于自然梯度的噪声自适应变分贝叶斯滤波算法[J]. 自动化学报, 2023, 49(10): 2094–2108. doi: [10.16383/j.aas.c210964](https://doi.org/10.16383/j.aas.c210964).
HU Yumei, PAN Quan, HU Zhentao, *et al.* A novel noise adaptive variational Bayesian filter using natural gradient[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(10): 2094–2108. doi: [10.16383/j.aas.c210964](https://doi.org/10.16383/j.aas.c210964).

作者简介

周浩文, 博士, 主要研究方向为车载毫米波雷达数据处理、信息融合、非线性估计与滤波。

王 奇, 硕士, 主要研究方向为车载毫米波雷达数据处理。

(责任编辑: 于青)