



论 文

局部松弛电路理论及其在电热分析中的应用

骆祖莹*, 赵国兴

北京师范大学信息科学与技术学院, 北京 100875

* 通信作者. E-mail: luozy@bnu.edu.cn

收稿日期: 2010-01-29; 接受日期: 2011-04-08

国家高技术研究发展计划 (批准号: 2009AA01Z126) 和国家自然科学基金 (批准号: 60876025) 资助项目

摘要 在复杂度日益增高的高性能集成电路设计中, 高效的性能分析是一项重要的设计内容, 其中由电源线/地线网络 (P/G) 分析与芯片热分析构成的电热分析则是目前研究的热点问题. 针对电热分析方程所具有的大规模稀疏 (电导或热导) 系数矩阵, 根据该系数矩阵所具有的对称正定严格对角占优等特性, 本文从理论上证明了电热分析具有局部性, 在相同的截断误差限松弛结束条件下, 局部松弛和全局松弛具有相同的松弛精度. 基于局部松弛理论, 本文提出了一个高效实用的局部过松弛 (SOR) 算法 (LSOR2), 并在文章最后将其用于如下的 3 个具体的电热分析问题研究: (1) P/G 网中的过压降点电压变化统计分析; (2) 3D 热分析中的过热点温度变化统计分析; (3) 单开路故障下的 P/G 网快速分析. 实验数据表明: 与全局 SOR 算法相比, 在保证精度的前提下, LSOR2 算法可以将电热分析的求解速度提高 1–2 个数量级.

关键词 集成电路 电热分析 SOR 算法 电源线/地线网络

1 引言

在追求性能的驱动下, 高端芯片的生产工艺和体系结构不断改进, 高性能集成电路越来越复杂, 如何在设计中提高其性能分析速度就成为电子设计自动化 (EDA) 研究中一个永恒不变的主题^[1,2], 其中包括 P/G 网分析和热分析两项内容^[3]的电热分析则是目前 EDA 研究的热点问题^[1–13].

随着工艺及频率的不断提高, 高端芯片的高功耗问题日益严重. 在低功耗设计中, 必须尽量降低工作电压, 造成芯片的工作电流非常大并且变化也非常快, 芯片的供电网络 (P/G 网) 因此产生了较大的 IR 和 Ldi/dt 电压降. 由于供电电压直接决定了逻辑门的时延, P/G 网设定的供电电压波动范围比较小, 所以在 P/G 网设计优化过程中, 必须不断地对 P/G 网中的节点电压向量进行求解, 即进行 P/G 分析^[4–11]. 同时高端芯片的高功耗还会产生大量的热量, 如果芯片封装的散热设计不好, 就会产生过高的工作温度, 降低芯片的性能与可靠性, 所以在设计中还必须对芯片进行热分析, 特别是 3D 热分析^[12]. 由于 P/G 分析和 3D 热分析可以用一个通用的电热分析方程进行模型化, 所以 P/G 分析和 3D 热分析在芯片设计中统称为电热分析^[3].

电热分析作为芯片性能分析的重要研究内容, 目前已提出了大量的高效分析算法, 其中比较成熟的算法有: 基于不完全 Cholesky 分解的预优共轭梯度算法 (ICCG)^[4]、连续过松弛算法 (SOR)^[5]、多

网格算法 (MG)^[6]、随机行走算法 (RW)^[7,8]、等效电路算法^[9,10]。随着集成电路进入纳米工艺时代, 工艺参数变化 (PV) 日益严重, IC 设计从确定式设计转向统计式设计, 出现了面向制造的设计方法 (DFM)^[2], 也出现了大量的电热统计分析算法^[8,10-12], 其中包括: 笔者提出的统计式等效电路算法^[10]和单点 SOR 统计算法 (SNSOR)^[11,12]。单点 SOR 算法可以对电热分析中的过电压降点的电压变化和过热点的温度变化进行精确快速地分析, 与经典的全局 ICCG 算法和全局 SOR 算法 (GSOR) 相比, 可以将分析速度提高 1-2 个数量级^[11,12]。同时基于 SNSOR 算法, 笔者还提出了 P/G 网开路电阻单故障分析算法 (SDSOR)^[13]。

基于笔者在电热分析中的大量研究工作^[2-4,9-13], 特别是用于 P/G 网过电压降点单点电压变化分析的 SNSOR 算法^[11], 本文从理论上对电热分析的局部松弛理论进行了数学推导, 根据电热分析的大规模稀疏系数矩阵具有对称正定的特性, 推导出电热分析具有局部性, 进而证明了在相同截断误差限的前提下, 局部松弛和经典的全局松弛具有相同的精度, 并给出了一个高效实用的局部松弛算法 (LSOR2)。与我们先前提出的 SNSOR^[11] 相比, LSOR2 具有理论完备性、更低的算法复杂度、确定的算法精度、更高的理论概括性与更广的应用范围。

本文最后将 LSOR2 算法分别应用于: (1)P/G 网中的过电压降点电压变化统计分析; (2)3D 热分析中的过热点温度变化统计分析; (3) 单开路故障下的 P/G 网快速分析。实验数据表明: 与经典的全局 ICCG 算法和全局 SOR 算法相比, 本文所给出的 LSOR2 算法能够在保证相同精度的前提下, 有效地降低超大规模集成电路局部电热分析的算法复杂度, 获得 1-2 个数量级的加速效果; 与 RW 算法^[7,8] (另一种局部算法) 相比, LSOR2 算法具有高效高精度的特点。总之, 与现有松弛技术^[14] 相比, 本文针对局部电热分析所给出的局部电路松弛理论及其高效实用的算法, 不仅是对 SOR 理论的改进, 而且还丰富了现有的电路松弛理论, 是对现有大规模电网络分析理论的重要补充。

2 电热分析的研究基础

2.1 电热分析方程

P/G 分析和三维 (3D) 热分析共用一个静态分析的求解方程^[3]

$$GX = B. \quad (1)$$

此方程被称为电热分析方程, 其参数在 P/G 分析和 3D 热分析中具有近似意义。在 P/G 分析中^[3-11], B 表示所有节点上所连的电流向量, G 表示所有节点之间的电导矩阵, X 表示所有节点的电压向量, G 和 B 为已知项, X 为待求解的项。用节点电压向量 V 代替 X , 用电流向量 I 代替 B , 就可以得到标准的 P/G 分析方程

$$GV = I. \quad (2)$$

而在 3D 热分析中^[12], B 表示所有节点上所连的功耗密度向量, G 表示所有节点之间的热导矩阵, X 表示所有节点的温度向量, 同样, G 和 B 为已知项, X 为待求解的项。用节点温度向量 T 代替 X , 用功耗密度向量 P 代替 B , 就可以得到标准的 3D 热分析方程

$$GT = P. \quad (3)$$

由于 P/G 分析和 3D 热分析均采用电热分析方程进行求解, 所以 P/G 分析和 3D 热分析合称为电热分析^[3], P/G 分析方法可以直接用于 3D 热分析^[3,12]。在式 (1) 中, G 为系数矩阵, 在 P/G 分析中, G 为 5 对角的对角占优稀疏矩阵; 而在 3D 热分析中, G 为 7 对角的对角占优稀疏矩阵。

2.2 电热分析的 Gauss-Seidel(GS) 和 SOR 迭代方法

电热分析可以采用 Gauss-Seidel 迭代方法对式 (1) 进行求解^[5], 如下所示:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{\sum_{j \in N_i} g_{i,j}} \left(b_i + \sum_{j \in N_i} (g_{i,j} x_j^{(k)}) \right), \quad (4)$$

式中 $x_j^{(k)}$ 是节点 j 的第 k 次迭代电压 (或温度) 值, b_i 是节点 i 的吸纳电流 (或功耗密度) 输入值 (吸入为负值), N_i 是节点 i 的邻点集合, $g_{i,j}$ 是节点 i 和其邻点 j 之间的电导 (或热导). 电热分析也可以采用效率更高的 SOR 迭代算法对式 (1) 进行求解^[5], 如下所示:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega) x_i^{(k)} + \frac{\omega}{\sum_{j \in N_i} g_{i,j}} \left(b_i + \sum_{j \in N_i} (g_{i,j} x_j^{(k)}) \right), \quad (5)$$

式中 ω 是为超松弛因子, 其最优解 ω_{opt} 可以用下式计算:

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(I - D^{-1}G)^2}}, \quad (6)$$

式中 G 为电导矩阵, D 是 G 的对角矩阵, I 是单位矩阵, ρ 是矩阵 $I - D^{-1}G$ 的谱半径函数. 也可采用一维搜索找到 ω_{opt} ^[11].

2.3 全局 SOR 迭代算法

式 (5) 可以简单实现为下述全局 SOR 算法.

全局 SOR 算法 (GSOR)

步骤 1: 初始化.

- 1.1) 输入系数矩阵 G 和激励向量 B .
- 1.2) 输入初始向量 $X^{(0)}$, 一般是所有节点电压 (或温度) 取为 V_{DD} (或环境温度 T_a).
- 1.3) 设定舍入误差 ε , 并令 $k = 0$.

步骤 2: 第 $k+1$ 次迭代计算.

- 2.1) 如果所有节点都松弛完毕, 就转到步骤 3; 否则, 顺序取出一个新节点 i .
- 2.2) 用式 (5) 计算 $x_i^{(k+1)}$, 并计算其松弛改进量 $\delta = |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}|$.
- 2.3) 如果 $\delta > \varepsilon$, 则取 $S_i^{(k+1)} = 1$; 否则, 取 $S_i^{(k+1)} = 0$.
- 2.4) 返回步骤 2.1.

步骤 3: 判断终止.

如果所有的 i , 都有 $S_i^{(k+1)} = 0$ 则计算终止; 否则, 令 $k = k + 1$ 并转向步骤 2.

2.4 单点 SOR 迭代算法 (SNSOR)

文献 [11] 首次给出了高效的单点 SOR 迭代算法 (SNSOR), SNSOR 算法流程如下所示. SNSOR 算法模拟了波浪的传播过程, 将加上单位激励的问题节点 q 作为振动源点, SNSOR 的一次松弛迭代相当于一个振动波传播. 在传播过程中, 振幅变化较大的边缘节点可以升级为内部节点 (即 $\delta > \varepsilon_2$), 并将其未松弛的邻点作为边缘节点续入松弛集, 即实现了波浪的传播; 振动波传播终止于振幅变化较小的边缘节点 (即 $\delta < \varepsilon_2$); 对于内部节点, 如果其振幅变化非常小 (即 $\delta < \varepsilon_3$), 则认为它是松弛

单点 SOR 算法 (SNSOR)^[11]

步骤 1: 初始化.

- 1.1) 输入系数矩阵 G 和激励向量 B .
- 1.2) 输入初始向量 $X^{(0)}$, 一般是所有节点电压 (或温度) 取为 V_{DD} (或环境温度 T_a).
- 1.3) 设定最大舍入误差 ε_1 , 标准舍入误差 $\varepsilon_2 = 0.1\varepsilon_1$, 最小舍入误差 $\varepsilon_3 = 0.01\varepsilon_1$.
- 1.4) 清零所有节点的松弛状态 $\text{flag1}[i]$ (0 为未松弛节点, 1 为边缘松弛节点, 2 为内部松弛节点); 并清零所有节点的松弛结束状态 $\text{flag2}[i]$ (0 为未结束, 1 为松弛结束).
- 1.5) 加上单位激励的问题节点 q 构成了初始松弛集 $A^{(0)}$, 并将其松弛状态 $\text{flag1}[q]$ 设为 1, 即边缘松弛节点. 并令 $k = 0$ 和最大松弛改进量 $\max \delta = 0.0$.

步骤 2: 第 $k+1$ 次迭代计算.

- 2.1) 如果 $A^{(k)}$ 中节点松弛完毕, 则转到步骤 3, 否则, 从 $A^{(k)}$ 中再取出一个节点 i .
- 2.2) 用式 (5) 计算 $x_i^{(k+1)}$, 并计算其松弛改进量 $\delta = |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}|$. 并根据 δ 来更新 $\max \delta$.
- 2.3) 对于 $\text{flag1}[i]=2$ (即内部松弛节点), 如果 $\delta < \varepsilon_3$, 则将节点 i 标记为松弛结束节点, 即 $\text{flag2}[i]=1$.
- 2.4) 对于 $\text{flag1}[i]=1$ (即边缘松弛节点), 如果 $\delta \leq \varepsilon_2$, 则检查该节点是否处于孤立状态 (即不与内部松弛节点相邻), 如果是孤立的边缘松弛节点, 则将节点 i 标记为松弛结束节点.
- 2.5) 对于 $\text{flag1}[i]=1$ (即边缘松弛节点), 如果 $\delta > \varepsilon_2$, 则将节点 i 升级为内部松弛节点 (即 $\text{flag1}[i]=2$), 并将其未松弛的邻点 j 升级为边缘松弛节点 (即 $\text{flag1}[j]=1$), 再续入 $A^{(k)}$ 中.
- 2.6) 返回步骤 2.1.

步骤 3: 计算下次迭代需要更新的变量.

先将 $A^{(k)}$ 中所有松弛未结束节点 i 放入 $A^{(k+1)}$, 再将松弛已结束节点的 flag1 和 flag2 标志清零.

步骤 4: 判断终止.

如果 $\max \delta \leq \varepsilon_1$, 则计算终止; 否则, 令 $k = k + 1$, $\max \delta = 0.0$, 并返回步骤 2.

结束节点; 对于边缘节点, 如果它的邻点中无内部节点, 则定义为处于孤立状态, 也认为它是松弛结束节点. 如果松弛集所有节点的最大振幅变化小于一个松弛限 (即 $\max \delta < \varepsilon_1$), 则认为松弛结束, 即波浪传播达到了一种动态平衡.

与传统的 GSOR 算法相比, SNSOR 算法是一种局部松弛算法, 具有精度高复杂度小的优点^[11]; 但由于它是对自然现象的一种简单模拟, SNSOR 不具有理论的完备性. 本文工作就是从理论的角度, 推导出一种具有理论完备性的局部分析算法, 并且这种算法还要继承 SNSOR 的高效性优点, 并具有更广的应用范围.

3 局部 SOR 分析理论

3.1 局部 SOR 理论

对于电热分析方程 (1), 根据 Kirchhoff 电流定律 (KCL), 电导 (或热导) 矩阵 G 具有如下性质^[5]:

定理 1 电热分析方程 (1) 中的矩阵 G 满足:

- 1) G 为对称矩阵,
- 2) G 对角线元素为正,
- 3) G 为弱对角占优矩阵,
- 4) G 为正定矩阵.

简而言之, G 为对角占优对称正定的大规模稀疏矩阵. 由定理 1 知电热分析方程 (1) 有唯一解.

在 P/G 网优化或 ECO 设计中, 仅对式 (1) 中 G 和激励向量 B 进行局部变动, 如果直接采用全局 ICCG 算法和全局 SOR 算法对式 (1) 进行求解, 计算量比较大. 单点 SOR 算法^[11,12] 和单故障 SOR 算法^[13] 利用电热分析的局部性^[10], 进行局部松弛可以大大降低计算的复杂性. 在局部松弛中, 我们假设所有节点中仅有 $m(m \ll N)$ 个节点加上单位激励 (其余节点的激励为 0), 这些节点构成了初始松弛集 $A^{(0)}$. 对于局部激励可以用式 (7) 进行表示:

$$GX = \sum_{q \in A^{(0)}} B_q, \quad (7)$$

式中 $B_q = [0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$ 为仅在节点 q 加上单位激励的输入向量.

定理 2 采用式 (5) 进行全局 SOR, 来求解式 (7) 具有如下的性质:

- 1) 若对某个节点 i 满足任意 $j \in N_i, |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)}| \leq \varepsilon$, 则有 $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq (2\omega + 1)\varepsilon$,
- 2) 若对某个节点 i 满足任意 $j \in N_i, x_j^{(k-1)} = x_j^{(k)}$, 则有 $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)}$.

证明 1) 由 $x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{\sum_{j \in N_i} g_{i,j}}(b_i + \sum_{j \in N_i} (g_{i,j}x_j^{(k)}))$ 易知

$$\begin{aligned} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| &= \left| (1 - \omega)(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}) + \frac{\omega}{\sum_{j \in N_i} g_{i,j}} \left(\sum_{j \in N_i} g_{i,j} (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}) \right) \right| \\ &\leq |1 - \omega| |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| + \frac{\omega}{\sum_{j \in N_i} g_{i,j}} \left(\sum_{j \in N_i} g_{i,j} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \right) \\ &\leq (1 + \omega)\varepsilon + \frac{\omega}{\sum_{j \in N_i} g_{i,j}} \left(\sum_{j \in N_i} g_{i,j} \varepsilon \right) = (2\omega + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

2) 是 1) 的直接推论. 证毕.

根据定理 2, 我们可以得出: 对于局部激励, 电热分析具有局部性.

3.2 原理性的局部 SOR 算法 (LSOR1) 及其精度分析

直接根据定理 2, 我们设计了原理性的局部 SOR 算法 1 (LSOR1) 来计算方程 (7), 具体如下所示:

局部 SOR 算法 1 (LSOR1)

步骤 1: 初始化.

- 1.1) 输入系数矩阵 G 和激励向量 B .
- 1.2) 输入初始向量 $X^{(0)}$, 一般是所有节点电压 (或温度) 取为 V_{DD} (或环境温度 T_a).
- 1.3) m 个加上单位激励的节点构成了初始松弛集 $A^{(0)}$.
- 1.4) 节点 $i \in A^{(0)}$ 都具有松弛资格, 即 $S_i^{(0)} = 0$; 令节点 $j \notin A^{(0)}$ 的 $S_j^{(0)} = 0$.
- 1.5) 设定舍入误差 ε , 并令 $k = 0$.

步骤 2: 第 $k+1$ 次迭代计算.

如果 $S_i^{(k)} = 1$, 则用式 (5) 计算 $x_i^{(k+1)}$; 否则, 令 $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)}$.

步骤 3: 计算下次迭代需要更新的变量.

- 3.1) 对所有的 i , 令 $S_i^{(k+1)} = 0$.
- 3.2) 对所有的 i , 如果 $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| > \varepsilon$, 则取 $S_i^{(k+1)} = 1$, 并令 $S_j^{(k+1)} = 1, j \in N_i$.

步骤 4: 判断终止.

如果所有的 $i, S_i^{(k+1)} = 0$ 则计算终止; 否则, 令 $k = k + 1$ 并转向步骤 2.

定理 3 LSOR1 算法与舍入误差为 $(2\omega + 1)\varepsilon$ 的全局 SOR 算法具有同样计算精度.

证明 我们对迭代步骤 k 做归纳推导.

1) $k = 0$ 时, $x_i^{(k)} = V_{DD}$ (或环境温度 T_a), 结论显然成立.

2) 假设 LSOR1 算法第 k 次计算后的结果与舍入误差为 $(2\omega + 1)\varepsilon$ 的全局 SOR 算法计算结果相同.

3) 则第 $k + 1$ 次计算时,

a) 若 $S_i^{(k)} = 1$, 则按照式 (5) 做迭代计算, LSOR1 算法与 GSOR 算法结果相同.

b) 若 $S_i^{(k)} = 0$, 则 LSOR1 算法中 $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)}$; 而 GSOR 算法仍然按照式 (5) 做迭代. 设迭代后值为 $\bar{x}_i^{(k+1)}$, 由于 $S_i^{(k)} = 0$, 必然有任意的 $j \in N_i$, $|x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)}| \leq \varepsilon$, 所以由定理 2 可知

$$|x_i^{(k+1)} - \bar{x}_i^{(k+1)}| = |x_i^{(k)} - \bar{x}_i^{(k+1)}| \leq (2\omega + 1)\varepsilon,$$

即第 $k + 1$ 次迭代计算舍入误差不超过 $(2\omega + 1)\varepsilon$. 证毕.

而对于舍入误差为 ε 的全局 SOR 算法, 其计算精度则由下述定理给出.

定理 4 超松弛迭代 (SOR) 算法的舍入误差估计.

1) SOR 算法对于正定并满足性质 A 的矩阵具有数值稳定性和误差估计公式^[15],

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |x_k - \alpha| \leq \varepsilon c \|\alpha\| \text{cond}(A),$$

其中 α 为精确解, $\text{cond}(A)$ 为系数矩阵的条件数, c 为常数.

2) 如果截断误差为期望 ε 的均匀随机向量, 则 SOR 算法的累计舍入误差 r 为^[16]

$$r = \frac{1}{\omega} A^{-1} \varepsilon.$$

联合定理 3 和 4, 我们得出如下结论: (1) LSOR1 算法与全局 SOR 算法具有相同的计算精度, (2) LSOR1 算法与全局 SOR 算法具有一个确定的计算误差. 这些结论为局部 SOR 奠定了坚实的理论基础.

3.3 局部 SOR 算法的改进

上述原理性的 LSOR1 算法具有直观和易于理解的优点, 但也有迭代次数较多、效率较低的缺点. 根据已有的研究工作^[11-13], 一种改进的更为实用的局部 SOR 算法 2 如下所示. 与原理性的 LSOR1 算法相比, 改良的局部 SOR 算法具有如下优点: (1) 如步骤 2.3 所示, 如果节点 i 的松弛改进量 $\delta = |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}| > \varepsilon$, 可以将其邻点 j 续入 $A^{(k)}$, 这样就可以自动展长松弛集、减少迭代次数; (2) 在步骤 3 中, 先将 $A^{(k)}$ 中所有节点的松弛标志清 0, 再将 $A^{(k+1)}$ 中所有节点的松弛标志置 1, 就可以避免“先将所有节点的松弛标志清 0”这样的全局操作; (3) 松弛的结束条件改为松弛集 $A^{(k+1)}$ 为空集, 也避免了“如果所有的 $S_i^{(k+1)} = 0$ 则计算终止”这样的全局操作, 所以改良的局部 SOR 算法更突出了局部松弛的特点, 算法效率更高.

3.4 局部 SOR 算法优越性的实验验证

为了验证局部 SOR 算法的优越性, 我们对已有的全局 SOR 算法 (GSOR)^[5] 与单点 SOR 算法 (SNSOR)^[11]、原理性的局部 SOR 算法 (LSOR1) 和实用的局部 SOR 算法 (LSOR2) 进行了对比实验. 为了便于比较算法精度, 需统一截断误差限, 所以 SNSOR 算法的最大截断误差限 ε_1 和其他 3 种算法截断误差限均设为 10^{-9} , 按照 SNSOR 算法流程定义, 其标准舍入误差 $\varepsilon_2 = 0.1\varepsilon_1 = 10^{-10}$, 最小舍入

局部 SOR 算法 2 (LSOR2)

步骤 1: 初始化.

- 1.1) 输入系数矩阵 G 和激励向量 B .
- 1.2) 输入初始向量 $X^{(0)}$, 一般是所有节点电压 (或温度) 取为 V_{DD} (或环境温度 T_a).
- 1.3) m 个加上单位激励的节点构成了初始松弛集 $A^{(0)}$.
- 1.4) 节点 $i \in A^{(0)}$ 都具有松弛资格, 即 $S_i^{(0)} = 1$; 令节点 $j \notin A^{(0)}$ 的 $S_j^{(0)} = 0$.
- 1.5) 设定舍入误差 ε , 并令 $k = 0$.

步骤 2: 第 $k+1$ 次迭代计算.

- 2.1) 如果 $A^{(k)}$ 中节点松弛完毕, 则转到步骤 3, 否则, 从 $A^{(k)}$ 中再取出一个节点 i .
- 2.2) 用式 (5) 计算 $x_i^{(k+1)}$, 并计算其松弛改进量 $\delta = |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}|$.
- 2.3) 如果 $\delta > \varepsilon$, 则将节点 i 放入 $A^{(k+1)}$, 对于它的所有邻点 $j(j \in N_i)$, 如果 $S_j^{(k)} = 0$, 将邻点 j 续入 $A^{(k)}$, 并令 $S_j^{(k)} = 1$.
- 2.4) 返回步骤 2.1.

步骤 3: 计算下次迭代需要更新的变量.

先将 $A^{(k)}$ 中所有节点的松弛标志清 0, 再将 $A^{(k+1)}$ 中所有节点的松弛标志置 1.

步骤 4: 判断终止.

如果松弛集 $A^{(k+1)}$ 为空集, 则计算终止; 否则, 令 $k = k + 1$ 并转向步骤 2.

误差 $\varepsilon_3 = 0.01\varepsilon_1 = 10^{-11}$. 在实验中, 我们先选用一个节点 q , 只在 q 上加一个单位激励 (其余节点均不加激励) I_q , 采用 4 种算法来求解节点电压向量 V_q , 比较 4 种算法的松弛范围与精度; 然后选用 900 个点, 来比较 4 种算法的运行时间.

验证实验 1. 采用一个节点数为 202440 的电路来考察对比算法的收敛速度、松弛范围和最大松弛误差. 收敛速度是指松弛算法的迭代次数 N_{it} , N_{it} 越小表示收敛速度越快; 松弛范围是指第 k 次迭代的有效松弛点数 $NN_{SOR}^{(k)}$, 其中 GSOR 的有效松弛点数是指电路中 $\delta > \varepsilon$ 的所有节点, 其他 3 种局部算法的松弛范围是其松弛集 $A^{(k)}$ 中的所有节点数, 即 $A^{(k)}$ 的长度; 最大松弛误差 $E_{\max}^{(k)}$ 是指第 k 次迭代中所有松弛节点的松弛误差最大值, 节点 i 电压第 k 次松弛的误差 $e_i^{(k)}$ 可采用下式进行计算,

$$e_i^{(k)} = \left| x_i^{(k)} - \frac{b_i + \sum_{j \in N_i} (g_{i,j} x_j^{(k)})}{\sum_{j \in N_i} g_{i,j}} \right|. \quad (8)$$

图 1 给出了松弛过程中最大松弛误差 $E_{\max}$ 的演化情况, 其横坐标是 SOR 松弛迭代的次数.

图 1 给出如下结论: (1) 4 种 SOR 算法收敛于近似相同的 $E_{\max}$, 这表明定理 3 和定理 4 所给出的“局部松弛和全局松弛具有相同松弛精度”结论的正确性. (2) SNSOR 算法和改良局部松弛算法 LSOR2 具有最快的 $E_{\max}$ 收敛速度.

图 2 给出了在迭代过程中有效松弛节点数的变化情况, 其中横坐标是迭代次数. 从图 2 可以得出如下结论: (1) GSOR 算法尽管要对所有节点进行松弛运算, 但 $\delta > \varepsilon$ 的有效松弛运算节点数小于所有节点数的 5%, 这表明正如定理 2 所指出的那样, 单点激励 (或局部激励) 的 P/G 分析具有局部性. (2) 对于局部松弛理论所给出的原型局部松弛算法 LSOR1, 其迭代的特点是迭代次数多但每次迭代的有效松弛节点数少, 其迭代次数为 159, 远大于 LSOR2 算法的 74 次和 GSOR 算法的 125 次, 这体现了 LSOR1 算法收敛速度慢的缺点. (3) 对于 SNSOR 算法^[11], 其迭代次数为 73, 是 4 种方法中收敛

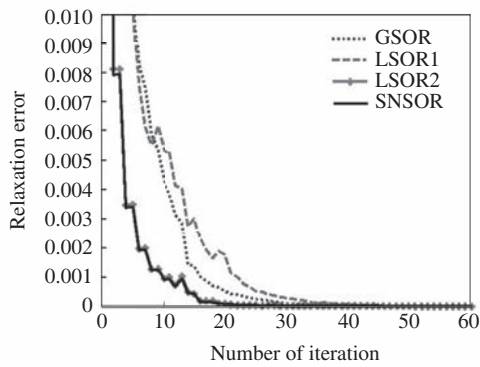

 图 1 4 种 SOR 算法的 $E_{\max}$ 收敛速度

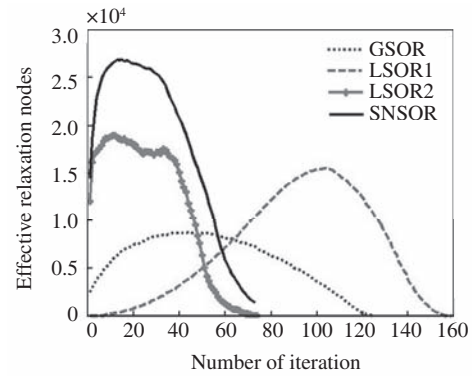
 Figure 1 $E_{\max}$ convergence speed


图 2 4 种 SOR 算法的有效松弛节点数

Figure 2 The number of effective relaxation nodes

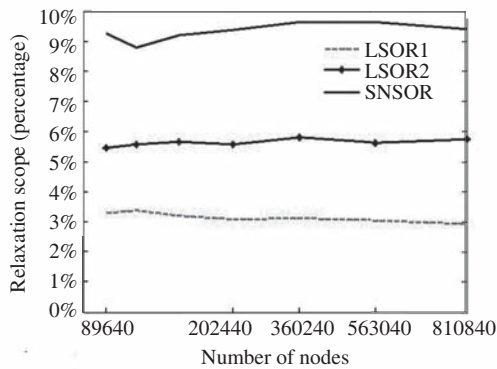


图 3 3 种局部 SOR 算法的松弛节点数

Figure 3 Relaxation scope comparison

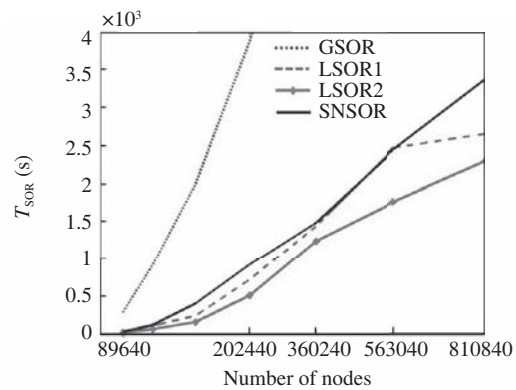

 图 4 4 种 SOR 算法的 T_{SOR}

 Figure 4 T_{SOR} comparison

速度最快的, 但每次迭代的有效松弛节点数是 3 种局部算法中最多的. (4) 对于改良的局部松弛算法 LSOR2, 其迭代次数为 74, 不仅解决了 LSOR1 算法收敛速度慢的问题, 而且解决了 SNSOR 算法每次迭代松弛节点较多的问题, 所以 LSOR2 算法不仅收敛速度快 (仅比 SNSOR 多 1 次) 而且松弛范围小, 是一种好的局部 SOR 算法.

验证实验 2. 对于图 2 中有效松弛节点数曲线进行累加可以获得 3 种局部松弛算法的松弛节点总数 NN_{ASOR} , 除以迭代次数 N_{it} 可以获得单次迭代平均松弛节点总数 $NN_{\text{SOR}} = NN_{\text{ASOR}}/N_{\text{it}}$, 最后用表达式 NN_{SOR}/N 计算出局部松弛算法的松弛范围, 其中 N 是电路的节点总数. 本文采用所有 7 个实验电路来考察 3 种局部松弛算法的松弛节点范围, 所有实验数据列在图 3 中, 其横坐标是实验电路的节点数. 图 3 给出如下结论: (1) 3 种局部松弛方法都具有很好的局部性, 其松弛节点范围均小于实验电路节点总数的 10%, 其中收敛速度慢的 LSOR1 算法具有最好的松弛局部性, 约为 3%. (2) 与其有相似收敛速度的 SNSOR 算法比较, LSOR2 算法松弛范围为 5%–6%, SNSOR 算法松弛范围为 8%–10%, 这表明 LSOR2 算法的松弛局部性明显好于 SNSOR 算法, 因此 LSOR2 算法复杂度要低于 SNSOR 算法.

验证实验 3. 对于每个实验电路, 我们选用 900 个点来依次计算每个单点激励的节点电压向量, 比较 4 种对比算法的运行时间 T_{SOR} . 所有实验电路的 T_{SOR} 列于图 4 中, 横坐标是测试电路的节点数.

图 4 给出如下结论: (1) GSOR 算法最慢, 即具有最高的算法复杂度. (2) LSOR2 算法最快, 即具有最低的算法复杂度. (3) 和笔者以前提出的 SNSOR 算法相比, LSOR2 算法可以明显地降低算法复杂度.

综合图 1 到 4 的数据, 可以得出如下总的结论:

- (1) 对于拥有对角占优正定稀疏系数矩阵的电热分析方程, 其具有分析局部性.
- (2) 局部 SOR 算法具有与 GSOR 相同的松弛精度, 局部 SOR 算法比 GSOR 快得多.
- (3) 改良的局部 SOR 算法 LSOR2 具有最快的收敛速度与运行速度.

(4) 对于具有分析局部性的电热分析问题, LSOR2 可以在保证精度的前提下, 大大提高电热分析的速度.

4 局部 SOR 分析理论在电热分析中的应用

本部分给出了局部 SOR 分析理论在电热分析领域的诸多应用, 包括 P/G 网过压降点的单点电压变化统计分析^[11]、过热点的单点温度变化统计分析^[12]、P/G 网单开路故障的快速分析^[13]. 本部分先重点对过压降点的单点电压变化统计分析进行论述, 用以说明局部 SOR 理论的诸多优点, 再对后面的 2 种应用进行简单介绍.

4.1 P/G 网的单点 SOR 统计分析方法

随着纳米时代的到来, 工艺参数变化变得比较显著, 在 P/G 网设计中不得不正视其影响, 因此 P/G 网分析算法研究也由确定式算法研究转向统计式算法研究, 并出现相应的研究成果^[2]. 如果采用已有的全局分析算法进行统计分析, 其算法复杂度比较高, 难以对规模越来越大的 P/G 网进行快速统计分析, 所以文献^[11]仅针对设计者感兴趣的过压降节点进行单点 SOR 统计分析, 以提高分析效率. P/G 网的单点 SOR 统计分析方法包括如下 4 个算法步骤:

- (1) 采用电导矩阵期望值 G_0 和电流向量的期望值 I_0 来计算节点电压向量的期望值 V_0 .
- (2) 根据 V_0 标出电压降较大的过压降点 (问题节点), 并建立问题节点集合.
- (3) 采用单点 SOR 算法计算问题节点 q 的电阻向量 R_q .
- (4) 基于 R_q , 根据电导矩阵变化值 ΔG 和电流向量变化值 ΔI 来计算节点 q 的电压变化方差 $v_{\sigma q}$.

其中第 3 步采用“单点 SOR 算法计算问题节点 q 的电阻向量 R_q ”是决定整个方法计算效率的关键, 其工作原理是: 将单位激励 $I_q = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ 加到问题节点 q 上, 计算 P/G 网的节点电压降向量 V_q , V_q 和 R_q 之间的关系是^[11]

$$V_q = G^{-1}I_q = RI_q = R_q, \quad (9)$$

式中 $R = G^{-1}$ 是电阻矩阵. 可以采用全局 ICCG 算法和全局 SOR 算法计算式 (9), 但效率不高, 本文采用 LSOR2 算法求解 V_q . 由于只有一个激励, 所以对于 LSOR2 算法的步骤 1.3, 只将节点 q 放入松弛集 A 中 (A 的长度为 1), 就可以变为单点 SOR 算法.

本文采用 GSOR, ICCG 和 LSOR2 这 3 个算法来处理 P/G 网单点电压变化统计分析问题. 在实验中, 实验电路采用 31×31 PAD 阵列进行供电, 共产生 900 个过压降点. 实验中共包括两种工艺参数变化: 节点吸纳电流变化和互连电导变化, 两种变化均为空间相关, 但相互独立. 其中节点吸纳电流按照正态分布 $N(i\mu, i\sigma)$, $i\sigma = 0.2i\mu$, 电导也按照正态分布 $N(g\mu, g\sigma)$, $g\sigma = 0.2g\mu$. 实验数据列在表 1 和表 2 中.

表 1 3 种算法在精度方面的比较

Table 1 Accuracy comparison amid different algorithms

Nodes (k)	Conductors (k)	GSOR		ICCG		LSOR2	
		Mean error	$E_{\max}$	Mean error	$E_{\max}$	Mean error	$E_{\max}$
89.64	180	0.96%	4.70%	0.96%	4.70%	0.96%	4.70%
202.44	405	0.47%	3.39%	0.47%	3.39%	0.47%	3.39%
360.24	720	1.44%	3.52%	1.44%	3.52%	1.45%	3.53%
563.04	1125	Base	Base	0.0015%	0.0021%	0.0068%	0.0085%
810.84	1620	Base	NA	0.0010%	0.0018%	0.0103%	0.0125%
1103.64	2205	Base	NA	0.0003%	0.0008%	0.0151%	0.0184%
1441.44	2880	Base	NA	0.0013%	0.0027%	0.0201%	0.0243%

表 2 3 种算法在效率方面的比较

Table 2 Efficiency comparison amid different algorithms

Nodes (k)	Conductors (k)	Simulation $T_{\text{sim}}(\text{s})$	GSOR		ICCG		LSOR2	
			$T_{\text{solv}}(\text{s})$	Accelerate	$T_{\text{solv}}(\text{s})$	Accelerate	$T_{\text{solv}}(\text{s})$	Accelerate
89.64	180	2396.6	336.6	7.12	307.9	7.78	21.20	113.0
202.44	405	17350.4	2641.3	6.57	1411.3	12.29	69.70	248.9
360.24	720	47422.5	7629.8	6.22	4344.7	10.91	158.36	299.5
563.04	1125	NA	15604.1	Base	9168.0	1.70	308.14	50.64
810.84	1620	NA	28523.7	Base	15288.3	1.87	559.38	50.99
1103.64	2205	NA	48496.9	Base	24157.7	2.01	1024.05	47.36
1441.44	2880	NA	69608.7	Base	35625.0	1.95	1758.47	39.58

本文先采用 Monte Carlo(MC) 模拟方法, 用 GSOR 算法对 5000 个随机输入进行求解, 以获取 900 个过压点电压变化的均方差, 其模拟时间为 T_{sim} , 再分别采用 GSOR 算法、全局 ICCG 算法和 LSOR2 算法通过先求解 R_q 再计算该点电压变化, 来求解 900 个过压点的均方差, 其运行时间为 T_{solv} . 对于较小实验电路, 本文根据模拟结果来统计出 3 种求解方法所求出 900 个均方差的平均误差和最大误差, 平均误差小于 1.5%、最大误差小于 5% 这样的结果表明基于 R_q 来计算 $v\sigma_q$ 的解析分析方法比较精确 (感兴趣的读者可以参阅文献 [11]). 对于较大实验电路, 本文则根据 GSOR 求解结果来统计出另两种求解方法所求出 900 个均方差的平均误差和最大误差, 从最大误差小于 0.03% 这样的结果, 可以清楚地看出 LSOR2 具有和 GSOR 近似相同的求解精度, 从实验角度证明了本文理论部分所给出的“LSOR2 和 GSOR 具有相同精度”的结论.

从表 2 可以进一步看出: (1) 对于较小实验电路, 3 种求解方法均快于模拟方法, 局部的 LSOR2 算法远快于全局的 GSOR 和 ICCG 算法, 加速可以达到 299 倍. (2) 对于较大实验电路, 与全局的 GSOR 算法相比, 局部的 LSOR2 算法可以获得 50 倍的加速. (3) 与 GSOR 算法相比, 基于 LU 分解的 ICCG 算法更快, 其原因在于 P/G 网分析的系数矩阵是 5 对角, 更为稀疏, 因此对于特别稀疏的系数矩阵, 基于 LU 分解的 ICCG 算法要比基于迭代松弛的 GSOR 算法要快. 综合表 1 和表 2 的分析可以得出这样的结论: LSOR2 算法可以在保证精度的前提下, 大幅度提高 P/G 网单点分析的速度.

表 3 LSOR2 算法高效率的原因

Table 3 Reasons for LSOR2's high efficiency

Circuit	Nodes	Conductors	GSOR		LSOR2		
Blocks	(k)	(k)	N_{it}	Accelerate	N_{it}	$NN_{SOR}(k)$	Relaxation percentage
900	810.840	1620	147.71	50.99	151.60	41.03	5.060%
1225	1103.305	2205	147.87	67.97	150.83	42.05	3.811%
1600	1440.720	2880	147.55	77.78	151.48	41.12	2.854%
2025	1823.085	3645	147.87	89.09	151.47	43.28	2.374%
2500	2250.400	4500	147.02	111.03	152.74	35.65	1.584%

表 4 LSOR2 和 RW 的算法比较

Table 4 Algorithm comparison between LSOR2 and RW

Nodes	Conductors	RW			LSOR2			
		NN_{ARW}	Mean error	E_{max}	NN_{ASOR}	Percentage	Mean error	E_{max}
(k)	(k)							
89.64	180	926.70	0.81%	2.90%	49.59	5.35%	0.105%	0.121%
202.44	405	2182.12	0.78%	3.14%	557.46	25.55%	0.023%	0.033%
360.24	720	3992.18	0.79%	2.97%	901.35	22.58%	0.038%	0.049%
563.04	1125	6328.24	0.87%	3.49%	1078.08	17.04%	0.069%	0.080%
810.84	1620	9238.06	0.86%	4.42%	1423.63	15.41%	0.437%	0.486%
1103.64	2205	12626.04	0.99%	4.62%	2559.78	20.27%	0.193%	0.221%
1441.44	2880	16581.23	1.10%	5.43%	3830.40	23.10%	0.289%	0.327%
			0.89%	3.85%		18.47%	0.165%	0.188%

为了调查 LSOR2 算法高效率的原因, 我们设计了一个实验, 将实验电路的块数从 900 块逐次增加到 2500 块, 观察 LSOR2 的加速、迭代次数 N_{it} 、单次迭代松弛节点数平均值 NN_{SOR} 及 LSOR2 的松弛局域比等变化情况, 所有数据列于表 3 中. 在表 3 中, 随着电路块数的逐次增加, 与 GSOR 算法相比, LSOR2 算法加速比从 50.99 逐次增加到 111.03; 相较于变化微小的 N_{it} 和 NN_{SOR} , LSOR2 的松弛局域比却随着电路块数的增加而快速减少. 以上结果表明: (1) LSOR2 算法具有局域性; (2) LSOR2 算法的局域性决定了它的算法效率, 局域性越好则加速效果越明显.

随机行走算法 (RW)^[7] 是一种单点求解算法, 已被应用于 P/G 网单点电压分析^[7] 及其统计分析^[8]. 作为两种局部算法, 本文采用 LSOR2 和 RW 计算所有 900 个问题节点的电压变化期望值, 其中 LSOR2 的截断误差取为 10^{-7} , RW 的随机行走次数设为 10000 次, 随机行走的最大长度设为电路最大距离 (两个相距最远节点之间的节点数). 与 ICCG 算法计算出所有节点电压变化的期望值向量相比, 可以统计出 900 个问题节点的最大误差与平均误差. 表 4 列出了所有对比数据, 其中 NN_{ARW} 是 RW 算法每个问题节点的行走节点总数, NN_{ASOR} 是 LSOR2 算法每个问题节点的松弛节点总数, 节点数比率等于 NN_{ASOR}/NN_{ARW} . 表 4 中实验结果表明: (1) LSOR2 算法更高效, 它所需计算的节点数仅为 RW 算法 18.47%; (2) LSOR2 算法更精确, 它的最大误差与平均误差仅为 0.188% 和 0.165%, 而 RW 算法分别为 3.85% 和 0.89%. 因此, 与 RW 算法相比, LSOR2 算法是一种更好的 P/G 网局部 (单点) 分析算法.

表 5 3 种算法在效率与精度方面的比较

Table 5 Algorithm comparison on accuracy and efficiency

Nodes (k)	Thermal conductor (k)	GSOR		ICCG		LSOR2	
		Accelerate	$E_{\max}$	Accelerate	$E_{\max}$	Accelerate	$E_{\max}$
220.5	613.21	23.75	2.32%	7.55	2.32%	371.5	2.42%
544.5	1518.01	24.44	1.67%	5.53	1.69%	745.3	1.66%
1012.5	2826.01	24.31	0.57%	5.49	0.57%	1109.6	0.55%
1624.5	4537.21	24.57	1.84%	5.38	1.83%	1403.2	1.83%
2380.5	6651.61	Base	Base	NA	NA	69.3	0.05%
3280.5	9169.21	Base	Base	NA	NA	77.2	0.05%
4324.5	12090.01	Base	Base	NA	NA	82.5	0.05%
4900.5	13701.61	Base	Base	NA	NA	90.1	0.05%

4.2 3D 热分析的单元 SOR 统计分析方法

与 4.1 部分同理, 本文采用 GSOR、全局 ICCG、LSOR2 这 3 个算法来处理芯片 3D 热分析单元温度变化统计分析问题. 与文献 [12] 一样, 实验测例被均匀分为 900 块, 采用棋盘格方式加上热源向量, 高密度热源块周围为弱密度热源块, 共产生 450 个过热点. 实验中共包括两种工艺参数变化: 节点热源变化和互连热导变化, 两种变化均为空间相关, 但相互独立. 其中节点热源按照正态分布 $N(i\mu, i\sigma)$, $i\sigma = 0.2i\mu$, 热导也按照正态分布 $N(g\mu, g\sigma)$, $g\sigma = 0.2g\mu$.

通过实验可以获得如表 1 和表 2 那样的数据, 精简后的实验数据列在表 5 中. 本文先采用 MC 模拟方法获取 450 个过热点温度变化的均方差, 其模拟时间为 T_{sim} , 再分别采用 GSOR 算法、全局 ICCG 算法和 LSOR2 算法, 通过先求解 R_q 、再计算该点温度变化, 来求解 450 个过热点的均方差, 其运行时间为 T_{solv} . 通过 $T_{\text{sim}}/T_{\text{solv}}$, 可以得到该求解方法的加速比, 并根据模拟结果来统计出 3 种求解方法所求出 450 个均方差的平均误差和最大误差, 表 5 中仅列出最大误差. 从最大误差小于 2.42% 这样的结果, 可以看出本文局部 LSOR2 方法与全局 GSOR 方法、全局 ICCG 方法具有着近似相同的计算误差. 对于较大实验电路, 本文则根据 GSOR 求解结果来统计出 LSOR2 求解方法所求出 450 个均方差的最大误差, 从最大误差小于 0.05% 这样的结果, 可以清楚地看出 LSOR2 具有和 GSOR 近似相同的求解精度, 进一步从实验角度证明了本文理论部分所给出的“LSOR2 和 GSOR 具有相同精度”的结论.

从表 5 可以进一步看出: (1) 对于前 4 个小测例, 3 种求解方法均快于模拟方法, 局部的 LSOR2 算法远快于全局的 GSOR 和 ICCG 算法, 加速可以达到 1403 倍. (2) 对于后 4 个大测例, 与全局的 GSOR 算法相比, 局部的 LSOR2 算法可以获得 90 倍的加速. (3) 与 GSOR 算法相比, 基于 LU 分解的 ICCG 算法变得非常慢, 其原因在于 3D 热分析的系数矩阵是 7 对角, 这表明: 对于具有不很稀疏系数矩阵的 3D 热分析问题, 基于 LU 分解的 ICCG 算法难于进行高效率求解. 综合表 5 的所有分析可以得出这样的结论: LSOR2 算法可以在保证精度的前提下, 大幅度提高 3D 热分析的速度.

4.3 P/G 网的单开路故障 SOR 分析方法

在文献 [13] 中采用单故障 SOR 算法 (SDSOR) 对单开路故障进行快速测试. 本文分别采用 GSOR 算法和 LSOR2 算法对 1000 个单开路故障进行快速测试, 有别于 GSOR 算法截断误差 ϵ , LSOR2 算

表 6 1000 个单开路故障 P/G 网全局分析与局部分析的方法比较
Table 6 Algorithm comparison on 1000 single open-defect P/G analyses

Nodes (k)	Conductors (k)	GSOR		LSOR2	
		$T_{\text{solv}}(\text{s})$	$T_{\text{solv}}(\text{s})$	Accelerate	E_{max}
89.64	180.60	117.97	9.22	21.84	0.002%
202.44	405.90	381.84	21.84	21.84	0.002%
360.24	721.20	1155.78	45.23	21.84	0.002%
563.04	1126.50	1767.141	77.36	22.84	0.002%
810.84	1621.80	3300.578	115.30	28.63	0.002%
1103.64	2207.10	7742.594	163.50	47.36	0.002%
1441.44	2882.40	9197.094	239.14	38.46	0.002%

法的截断误差 $\varepsilon_1 = 3\varepsilon$, 以保证 LSOR2 算法的局部分析性^[13], 具体实验数据列于表 6 中. 与全局的 GSOR 算法相比, 局部的 LSOR2 算法可以提供 21–47 倍的加速, 而其最大误差仅为 0.002%, 这表明: LSOR2 算法可以在保证精度的前提下, 大幅度提高单开路故障的测试效率.

5 结论

针对具有稀疏系数矩阵的电热分析问题, 本文先从计算数学出发, 推导出电热分析局部松弛理论, 指出局部松弛可以获得与全局松弛相同的松弛精度, 而其电路松弛范围要小得多, 同时设计了相应的实用算法 LSOR2; 然后结合实际的 3 个电热分析具体问题, 给出了 LSOR2 算法的实际应用, 显示了该算法具有与经典的全局 SOR 算法 (GSOR) 近似相同的精度, 但算法效率能够提高 1–2 个数量级. 从理论上讲, 本文工作是对大规模电网络分析理论的重要补充; 从实践上讲, 本文工作为越来越复杂的集成电路性能分析提供一个有效的算法复杂度降低途径.

参考文献

1 ITRS. The International Technology Roadmap for Semiconductors. [Http://public.itrs.net/](http://public.itrs.net/). 2008
2 Luo Z Y. Power consumption and process variations: two challenges to design of next-generation ICs. J comput (in Chinese), 2007, 30: 1054–1063
3 Luo Z Y. Survey and preview on studies of electro-thermal(ET) analysis. J computer-aid des comput graph(in Chinese), 2009, 21: 1203–1211
4 Wu X H, Hong X L, Cai Y C, et al. Area minimization of power distribution network using efficient nonlinear programming techniques. IEEE Trans CAD, 2004, 23: 1086–1094
5 Zhong Y, Wong D F. Fast algorithms for IR drop analysis in large power grid. In: Proceedings of IEEE/ACM International Conference on Computer Aided Design. New York: ACM Press, 2005. 351–357
6 Cai Y C, Pan Z, Luo Z Y. Geometric multigrid based algorithm for transient RLC power/ground grid analysis. J Computer-Aid Des Comput Graph(in Chinese), 2005, 17: 33–38
7 Qian H F, Nassif R, Sapatnekar S S. Random walks in a supply Network. In: Proceedings of IEEE/ACM Design Automation Conference. New York: ACM Press, 2003. 93–98
8 Li P. Variational analysis of large power grids by exploring statistical sampling sharing and spatial locality. In: Proceedings of IEEE/ACM International Conference on Computer Aided Design. New York: ACM Press, 2005. 644–650

- 9 Luo Z Y, Cai Y C, Tan X D, et al. Time-domain analysis methodology for large-scale RLC circuits and its applications. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2006, 49: 665–680
- 10 Luo Z Y, Tan X D. Efficient statistical analysis method of power/ground(P/G) network. *Progr Nat Sci*, 2008, 18: 189–196
- 11 Luo Z Y, Tan X D. Statistic analysis of power/ground networks using single-node SOR method. In: *Proceedings of the 9th International Symposium on Quality Electronic Design*. San Jose, CA, 2008, 867–872
- 12 Luo Z Y, Fan J, Tan X D. Localized statistical 3D thermal analysis considering electro-thermal coupling. In: *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. Taipei, 2009, 1289–1292
- 13 Luo Z Y, Zhang Y B, Yu X C. Single open-defect analysis method for power/ground networks. *J Comput Res Dev(in Chinese)*, 2009, 46: 1234–1240
- 14 Wang H, Yang H Z. *Computer-aided Electronic Circuit Analysis and Design Methods*. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2009 [汪蕙, 杨华中. 电子电路的计算机辅助分析与设计方法. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2009]
- 15 Wozniakowski H. Round-off error analysis of iterations for large linear systems. *Num Math*, 1978, 30: 301–314
- 16 Lynn M S. On the round-off error in the method of successive over-relaxation. *Math Comput*, 1964, 18: 36–49

Localized relaxation theory of circuits and its applications in electro-thermal analyses

LUO ZuYing* & ZHAO GuoXing

College of Information Science and Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

*E-mail: luozy@bnu.edu.cn

Abstract In the high-performance IC design with increasing design complexity, it is a very important design content to efficiently analyze IC parameters. Thus, the electro-thermal(ET) analyses including power/ground(P/G) analysis and thermal analysis are hot topics in today's IC research. Since ET analysis equation has a sparse, positive definite and strictly diagonally dominant coefficient-matrix, we prove that the ET analysis has the advantage of locality. Owing to this advantage, localized relaxation method is formally proposed, which has the same accuracy as the global relaxation done with the constraint of the same truncation error limitation. Based on the localized relaxation theory, an efficient and practical localized successive over-relaxation algorithm(LSOR2) is introduced and applied to solve the following three ET analysis problems: (1) Single-node statistical voltage analysis for over-IR-drop nodes in P/G networks; (2) single-node statistical temperature analysis for hot spots in 3D thermal analysis; (3) fast single open-defect analysis for P/G networks. A large amount of experimental data demonstrates that compared with the global successive over-relaxation(SOR) algorithm, LSOR2 can speed up 1–2 orders of magnitudes with the same accuracy in ET analyses.

Keywords integrated circuit, electro-thermal analysis, SOR algorithm, power/ground network