

## 公交线路配车问题的不确定双层规划模型

薛运强<sup>\*1,2,3</sup>, 郭俊<sup>1</sup>, 安静<sup>1</sup>, 薛逻维<sup>1</sup>, 桑梓<sup>1</sup>

(1. 华东交通大学 交通运输与物流学院, 南昌 330013; 2. 东南大学 交通学院, 南京 210096;  
3. 江西省高铁区域发展研究中心, 南昌 330013)

**摘要:** 为合理优化公交线路配车, 考虑现实中公交站点乘客数量不确定性因素, 引入不确定理论构建公交线路配车的不确定双层规划模型. 上层目标为公交运营企业的收益最大化, 下层目标为乘客出行时间和费用总成本最小, 约束条件是政府要求的服务水平、乘车率, 通过MATLAB进行编程求解. 以南昌市210路公交车为例, 利用所构建的不确定双层规划模型对早高峰07:00-08:00配车进行优化, 在给定80%乘车率的约束条件下, 单方向配车数量由26辆减少到23辆, 减少11.5%; 优化后高峰小时乘客总加权成本相比优化前小幅增加0.5%, 基本持平; 高峰小时该线路的利润比优化前增加了112元, 提高29.6%. 结果显示, 利用所构建模型优化早高峰小时线路配车效果明显. 该研究为公交运营者考虑现实中不确定因素更合理地优化线路配车提供了理论支持.

**关键词:** 城市交通; 线路配车; 不确定双层规划模型; 公共交通; 不确定理论

## Uncertain Bi-level Programming Model for Vehicle Allocation Problem of Bus Lines

XUE Yun-qiang<sup>1,2,3</sup>, GUO Jun<sup>1</sup>, AN Jing<sup>1</sup>, XUE Luo-wei<sup>1</sup>, SANG Zi<sup>1</sup>

(1. College of Transportation and Logistics, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;  
2. School of Transportation, Southeast University, Nanjing 210096, China;  
3. High-speed Rail and Regional Development Research Center of Jiangxi Province, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** In order to rationally optimize the bus line allocation, this paper considers the uncertainty in passenger demand at bus stops and introduces the uncertainty theory to construct an uncertain bi-level programming model for bus line allocation. Among them, the upper-level goal is to maximize the revenue of the bus operation enterprise, and the lower-level goal is to minimize the total travel time and the cost of passengers. The constraints include the service level and the ride rate required by the government. The model is solved through Matlab programming. Taking Bus Line No. 210 in Nanchang as an example, the uncertain bi-level programming model is used to optimize the vehicle allocation in the morning peak 07:00-08:00, and under the ride rate limit of 80%. The fleet size of vehicles is reduced from 26 to 23 by 11.5%; the total weighted cost of passengers after peak hours slightly increased by 0.5%; and the profit increased by 112 yuan with a rate of 29.6% after optimization. The results show that the optimization effectiveness of the uncertain bi-level model for vehicle allocation is significant in the early peak hours. The study provides theoretical support for bus operators to rationally optimize vehicle allocation considering uncertain factors in reality.

**Keywords:** urban traffic; vehicle allocation; uncertain bi-level programming model; public transportation; uncertainty theory

收稿日期: 2019-11-04

修回日期: 2019-12-05

录用日期: 2020-01-07

基金项目: 国家自然科学基金/ National Natural Science Foundation of China(71961006); 江西省社科规划项目青年项目/ Social Science Planning Fund Youth Project of Jiangxi Province, China(18GL37); 江西省高校人文社科基金/ College Humanities and Social Sciences Fund of Jiangxi Province(GL18219).

作者简介: 薛运强(1983-), 男, 山东新泰人, 讲师, 博士.

\*通信作者: xueyunqiang@ecjtu.edu.cn

## 0 引言

公共交通因其安全、高效、便捷、环保,成为缓解城市交通问题的有效交通方式,优先发展公共交通已成为普遍共识<sup>[1-2]</sup>.常规公交线路的开辟和车辆配置问题,不仅关系企业的成本和收益,还与公交的服务水平、乘客的乘车满意度有重要关系<sup>[2]</sup>.如何确定合理的配车数量,在保证公交运营者基本收益的同时使公交服务的社会效益最优是值得探讨的问题.

国内外众多学者对公交线路配车优化问题做了深入研究,考虑公交运营者和出行者两个群体权益的双层规划模型使用较多.赵淑芝<sup>[2]</sup>以公交运营者的成本和公交服务水平加权和为目标,建立多车型公交线路配车优化模型.邸振<sup>[3]</sup>以公交企业收益作为上层目标,乘客出行的时间和费用加权总成本最小为下层目标,政府行为作为约束条件,建立公交线路车辆配置双层规划模型.Liu Tao<sup>[4]</sup>构建双目标双层优化模型,上层模型的两个目标是从公交运营者角度使总运营成本最小,乘客出行总时间成本最小;下层模型是基于发车时刻考虑车辆容量约束的交通分配问题.Filipe Monnerat等<sup>[5]</sup>考虑车队管理问题,建立车辆和驾驶员的分配模型,目标是总成本最小.然而,公交在运行中往往会出现许多不确定因素,不同站点的服务时间窗口和乘客需求量都是无法准确估计的.在公交线路开辟和车辆配置过程中,往往根据历史数据或者经验对这些变量进行估计,对需要解决的问题进行预测,得出一个相对可靠的结果,这样会有一个较大误差.为了尽量降低误差,刘宝碇<sup>[6]</sup>提出了不确定理论,不断完善使其形成规范的公理化数学体系.Liu<sup>[6]</sup>在考虑规划问题时引入了不确定变量,首次提出了不确定规划.以不确定规划为代表的确定理论在交通、物流、金融领域得到广泛和成功的应用<sup>[7]</sup>,交通方面的应用主要包括车辆调度问题、关键路问题等<sup>[7]</sup>.焦登娅<sup>[8]</sup>在刘宝碇研究的基础上构建不确定规划模型解决含有不确定因素的物流车辆调度问题,不确定因素考虑了送货点对货物需求量的不确定性和行程时间的不确定性.张凤娇<sup>[9]</sup>利用刘宝碇提出的不确定时间测度模型,研究车辆路径问题,用混合智能算法求出最优解.

柳伍生<sup>[10]</sup>利用公交IC卡数据分析公交站点的客流不确定性,提出概率推导模型及算法,没有继续应用到公交配车、运营调度等问题.

综上所述,利用不确定理论研究公交线路配车问题的成果较少,本文考虑公交站台乘客数量的不确定性,同时考虑公交运营者的成本收益、公交乘客的时间和费用成本,构建公交线路配车问题的不确定双层规划模型,以为公交线路配车问题提供理论支持.

## 1 不确定理论

一段时间内(如一个发车间隔)每个公交站点到达的人数都是不确定的,它是在一个范围内波动的不确定变量.下面给出不确定理论的相关概念.

### 1.1 不确定测度和不确定空间

定义 1<sup>[6]</sup> 设  $L$  是非空集合  $\Gamma$  上的一个  $\sigma$ -代数,则集合函数  $M: L \rightarrow [0, 1]$  称为一个不确定测度,如果  $M: L \rightarrow [0, 1]$  满足如下 3 条公理:

公理 1(规范性) 对于全集  $\Gamma$ ,  $M\{\Gamma\} = 1$ .

公理 2(自对偶性) 对任意事件  $A$ ,  $M\{A\} + M\{A^c\} = 1$ ,  $A^c$  是  $A$  的补集.

公理 3(次可加性) 对可数个事件  $A_1, A_2, \dots$ , 满足  $M\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} M\{A_i\}$ .

定义 2<sup>[6]</sup> 由上述非空集合  $\Gamma$ ,  $\Gamma$  上的  $\sigma$ -代数  $L$ , 不确定测度  $M$  组成的三元组  $(\Gamma, L, M)$  称为不确定空间.

### 1.2 不确定变量和不确定分布

定义 3<sup>[6]</sup> 称  $\xi$  是一个不确定变量,如果  $\xi$  是从不确定空间  $(\Gamma, L, M)$  到实数集  $\mathbf{R}$  的可测函数.也就是说对实数集中任意的 Borel 集  $B$ , 集合  $\{\xi \in B\} = \{\gamma \in \Gamma | \xi(\gamma) \in B\}$  是一个事件,其中,  $\gamma$  是非空集合  $\Gamma$  中的元素值.

定义 4<sup>[6]</sup> 称不确定变量  $\xi$  为线性的,如果它服从下列线性不确定分布  $\Phi(s)$ , 该分布记为  $L(a, b)$ , 其中,  $a, b$  为常数值,为不确定变量  $\xi$  取值范围的边界值,且满足  $a < b$ .

$$\Phi(s) = \begin{cases} 0, & s \leq a \\ (s-a)/(b-a), & a \leq s \leq b \\ 1, & s \geq b \end{cases} \quad (1)$$

以南昌市210路公交为例进行调查分析,获得该线路2019年3月25~31日一个星期早高峰(07:00-08:00)的IC卡数据和线路全天票款数据,如表1和表2所示.各个站点和时间段刷卡乘客数量和投币乘客数量的比例大体一致,根据早高峰IC卡刷卡量占全天刷卡量的比例,近似得到早高峰

投币的乘客数量.通过一个星期的调查数据可知,每个站点到达的人数是在一个范围内波动的不确定变量.对现状一个星期的各公交站点到达人数进行拟合,进行卡方检验可知(见3.1节卡方检验表3),站点乘客到达的不确定变量符合线性不确定分布.

表1 210路早高峰(07:00-08:00)刷卡量和发车数(2019年3月25~31日)

Table 1 Cards volume and number of vehicles in 07:00-08:00 AM from Mar. 25~31, 2019 for bus line 210

| 日期  | 25日   | 26日   | 27日   | 28日   | 29日   | 30日   | 31日 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 刷卡量 | 1 914 | 1 895 | 1 907 | 1 745 | 2 032 | 1 528 | 934 |
| 发车数 | 14    | 17    | 16    | 16    | 14    | 15    | 16  |

表2 210路早高峰(07:00-08:00)各站点上下车人数(2019年3月29日)

Table 2 Number of passengers of line 210 getting on and off at each station during 07:00-08:00 AM on Mar. 29, 2019

| 站点 | 上车人数/人次 | 下车人数/人次 | 站点 | 上车人数/人次 | 下车人数/人次 | 站点 | 上车人数/人次 | 下车人数/人次 |
|----|---------|---------|----|---------|---------|----|---------|---------|
| 1  | 137     | 0       | 9  | 206     | 114     | 17 | 114     | 137     |
| 2  | 46      | 0       | 10 | 137     | 69      | 18 | 23      | 114     |
| 3  | 69      | 0       | 11 | 23      | 91      | 19 | 69      | 160     |
| 4  | 160     | 0       | 12 | 46      | 137     | 20 | 0       | 69      |
| 5  | 183     | 23      | 13 | 137     | 46      | 21 | 23      | 709     |
| 6  | 206     | 0       | 14 | 69      | 23      | 22 | 0       | 137     |
| 7  | 274     | 0       | 15 | 23      | 46      | 23 | 0       | 69      |
| 8  | 411     | 23      | 16 | 183     | 183     | 24 | 0       | 389     |

## 2 公交线路配车的不确定双层规划模型

### 2.1 模型建立

从公交企业利益和乘客利益两个角度考虑,在相关约束条件下分别建立上层公交收益和下层乘客收益两层目标函数.

模型构建基于如下模型假设:①公交线路确定后再进行线路公交车配置;②公交车辆车速由历史运行数据取均值得到;③上车规则是先到先上车;④若乘客等到第1趟公交车未能上车,算作留客,影响公交服务满意度.乘客的到达服从线性不确定分布(案例分析中给出验证该分布的卡方检验过程).

(1) 目标函数.

考虑公交企业收益的上层目标函数为

$$\max p_1 = \rho_1 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m U_{ij} - C_1 n - C_2 x, x \in \mathbf{N}_+, n \in \mathbf{N}_+ \quad (2)$$

式中:  $U_{ij}$  为公交车  $j$  到达公交站  $i$  时的上车人数,

$$U_{ij} = \begin{cases} W_{ij}, & W_{ij} \leq q_{ij} \\ q_{ij}, & W_{ij} > q_{ij} \end{cases}, \text{其中, } W_{ij} \text{ 为公交车 } j \text{ 到达站点 } i$$

时站台候车乘客数,  $q_{ij}$  为可乘车人数,  $q_{ij} = C - V_{ij} + D_{ij}$ ,  $C$  为车内最大容量,  $V_{ij}$  为公交车  $j$  从始发站到站  $i$  之间的乘客数,  $D_{ij}$  为公交车  $j$  到站  $i$  时下车的乘客数;  $C_1$  为平均每辆公交车运营成本;  $C_2$  为一辆公交车分摊的固定成本;  $x$  为时间段  $[T_1, T_2]$  内配置的车辆数;  $n$  为  $[T_1, T_2]$  内运行的车辆数;  $m$  为站点数;  $\rho_1$  为公交票价.

乘客出行时间和费用成本加权和最小的下层目标函数为

$$\min p_2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left\{ \alpha [\rho_1 U_{ij} + \rho_2 (W_{ij} - U_{ij})] + \beta W_{ij} \frac{y}{2} \right\} \quad (3)$$

式中:  $\alpha, \beta$  为加权系数;  $\rho_2$  为乘客改乘其他交通方式的费用;  $y$  为发车时间间隔.

(2) 约束条件.

从政府角度考虑,乘客的乘车率应不小于某一值  $\delta$ ; 高峰时段, 应有一个最大的发车间隔限制; 公交线路的长度、公交车行驶速度、配置车辆数、时间间隔应该满足

$$\frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m U_{ij}}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m W_{ij}} \geq \delta \quad (4)$$

$$t_1 \leq y \leq t_2 \quad (5)$$

$$\frac{L}{vx} \leq y \quad (6)$$

式中:  $t_1, t_2$  分别为发车间隔的最小值与最大值;  $L$  为公交线路长度;  $v$  为公交车在研究时段的历史车速均值.

### 2.2 求解思路

首先,对原始数据进行处理,确定各站点不确定分布参数  $a, b$  的值; 然后,通过具体的  $a, b$  值拟合现状的OD出行量,利用MATLAB来对模型进行求解; 最后,得出各站点乘客需求量不确定情况下的最优发车间隔.

各站点的乘客到达服从参数为  $a, b$  的线性不确定分布(案例分析中给出验证该分布的卡方检验过程),利用调查得到的各站点乘客到达量的均值和方差,得出各站点到达人数符合相应线性不确定分布的到达人数,再在现状调查的基础上反推出各站点的OD出行量.

对现行不确定分布函数关于  $x$  求导,得到其概率密度函数为

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < s < b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$E(s) = \int_{-\infty}^{\infty} s f(s) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} s ds = \frac{1}{2}(b+a) \quad (8)$$

$$D(s) = E(s^2) - [E(s)]^2 = \int_a^b s^2 \frac{1}{b-a} ds - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (9)$$

式(8)和式(9)为均值、方差的计算公式. 利用反推得出的OD出行量,对模型中的相关参数进行取值,其依据主要是查阅相关资料和咨询公交公司的运营管理人员,最后得出的一个相对比较合理的参考值.

由式(4)~式(6)决定的下层目标函数的解是有

限的. 通过分析可知,模型的下层目标函数是一个关于发车间隔  $y$  的单调递增函数,且配车数为整数,可以快速缩小搜寻范围,如最优解只能出现在图1中  $AB, EI, FJ, GL, HK, DC$  上.

结合上文所述,最优配车数应该在  $A, E, F, G, H, D$  点上; 带入式(4)进行检验,删除不满足条件的点,将满足条件的点带入上层目标函数,使上层目标函数取值最大的点就是最优的配车数.

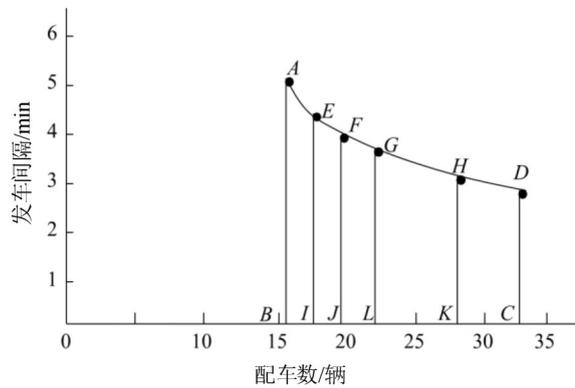


图1 配车数—发车间隔示意图

Fig. 1 Relationship of number of vehicles and departure intervals

## 3 案例分析

### 3.1 案例介绍

本文以南昌市210路公交车为例进行公交线路配车优化. 南昌210路公交车,全长20 km,设站26处,线路双向配车51辆,驾驶员63人. 早高峰(07:00-08:00)刷卡量约为2 000,发车班次为16班.

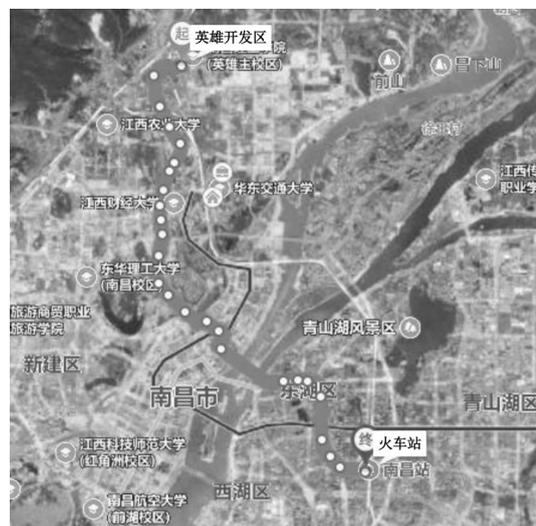


图2 210路公交走向和站点分布图

Fig. 2 Stops and route distribution of bus line 210 in Nanchang City

对现状一个星期的各公交站点到达人数进行拟合卡方检验可知,站点乘客到达的不确定变量符合线性不确定分布.表3是以线路一个星期刷卡量为不确定变量,验证乘客数量作为不确定变量服从线性不确定分布(参数拟合值取  $a=100, b=2\ 000$ ,即满足卡方检验).样本分组数为  $g=7$ ,线性不确定分布中有两个参数  $a, b$ ,参数个

数  $l=2$ ,故卡方统计量的自由度  $\chi_{DF} = g - 1 - l = 7 - 1 - 2 = 4$  (DF 是 Degrees of Freedom的简写,表示统计量的自由度).查卡方分布分位数表,  $\chi_{0.01}^2 = 7.779 > 3.31$ ,因此有99%的概率不能拒绝乘客数量服从线性不确定分布.每个站点公交乘客数量服从线性不确定分布的卡方检验类似.

表3 早高峰乘客数量服从线性不确定分布的卡方检验统计表  
Table 3 Chi-square test statistics for passenger numbers in morning peak hour satisfying linear uncertainty distributions

| 日期         | 刷卡量 $f_i$ | 理论概率 $P_i$ | 理论量 $F_i$ | $f_i - F_i$ | $(f_i - F_i)^2$ | $(f_i - F_i)^2 / F_i$ |
|------------|-----------|------------|-----------|-------------|-----------------|-----------------------|
| 2019-03-25 | 1 914     | 0.16       | 1 927     | -12.82      | 164.38          | 0.09                  |
| 2019-03-26 | 1 895     | 0.16       | 1 907     | -11.64      | 135.47          | 0.07                  |
| 2019-03-27 | 1 907     | 0.16       | 1 919     | -12.39      | 153.40          | 0.08                  |
| 2019-03-28 | 1 745     | 0.15       | 1 747     | -2.31       | 5.34            | 0.00                  |
| 2019-03-29 | 2 032     | 0.17       | 2 052     | -20.16      | 406.42          | 0.20                  |
| 2019-03-30 | 1 528     | 0.13       | 1 517     | 11.19       | 125.13          | 0.08                  |
| 2019-03-31 | 934       | 0.07       | 886       | 48.13       | 2 316.47        | 2.61                  |
| 总计         | 11 955    | 1.00       | 1 1955    |             |                 | $\chi^2 = 3.13$       |

3.2 模型求解及分析

模型中相关参数取值如下:210路公交车长度为20 km,车辆全程的平均速度为15 km/h,时间为晚高峰(17:00-18:00);乘车率不低于80%,各站台乘客的到达率相互独立,服从参数为  $a, b$  的不确定分布;时间成本与经济成本的加权系数都取1,

公交票价分为两种,刷卡和不刷卡分别取2元和1.4元,公交车的运营成本取80元/次,配车成本取100元/辆.

根据建立的双层优化模型,利用MATLAB编写程序计算得到不同配车数量下的运营指标,如表4所示.

表4 不同配车数量下运营指标计算结果  
Table 4 Calculation results of operation indicators under different number of vehicles

| 配车数/辆 | 发车间隔/min | 乘车率/%  | 企业利润/元 | 乘客出行经济成本/元 | 乘客出行时间成本/min | 加权之后的总成本 |
|-------|----------|--------|--------|------------|--------------|----------|
| 32    | 2.5      | 100.00 | 54     | 4 087      | 3 233        | 7 320    |
| 27    | 3.0      | 90.40  | 377    | 3 695      | 3 880        | 7 575    |
| 23    | 3.5      | 81.76  | 490    | 3 399      | 4 527        | 7 926    |
| 20    | 4.0      | 74.65  | 662    | 3 257      | 5 174        | 8 431    |
| 18    | 4.5      | 68.57  | 628    | 3 158      | 5 820        | 8 978    |
| 16    | 5.0      | 63.72  | 737    | 3 082      | 6 467        | 9 549    |

表4中配车数为20, 18, 16辆的乘车率均小于80%,不满足最小乘车率要求,故不是最优配车数;根据上文解题思路可知,在满足乘车率的要求下,使企业利润最大的配车数就是该线路下行方向的最优配车数,由表4可知,当配车数为23辆时,企业利润最大,故最优配车数为23辆.

210路公交车上行方向现状配置的车辆数是26辆,本文模型计算的最优配车数是23辆,减少

11.5%.从数据上看,优化结果比较接近现状,在一定程度上反映出该模型具有一定的实用性.从表5优化前后数据看:优化后高峰时乘客总加权成本相比于优化前小幅增加0.5%,基本持平;高峰时该线路的利润比优化前增加了112元,增加29.6%;综上,早高峰线路配车优化效果明显.

模型上层决策变量取值为整数,比一般双层规划模型求解更加方便;上层规划模型能够比较

直观地反映公交公司、乘客、政府三者间相互影响、相互制约关系;将优化结果与实际情况比较,模型结果比较接近实际情况.

表 5 线路配车优化前后指标对比

Table 5 Comparison of indicators before and after vehicle allocation optimization for bus line

| 指标 | 配车数/辆 | 发车间隔/min | 乘车率/% | 企业利润/元 | 乘客出行费用成本/元 | 乘客出行时间成本/min | 加权之后的总成本 |
|----|-------|----------|-------|--------|------------|--------------|----------|
| 优化 | 23    | 3.5      | 81.76 | 490    | 3 399      | 4 527        | 7 926    |
| 现状 | 26    | 3.0      | 85.40 | 378    | 3 625      | 4 259        | 7 884    |

#### 4 结 论

本文考虑公交站点乘客数量的不确定性,以公交企业收益和乘客出行总成本为目标,构建不确定双层规划模型,对公交线路进行车辆配置优化.以南昌市210路公交为例,对早高峰配车数进行优化.分析结果显示,本文不确定双层规划模型的优化效果明显;模型变量取整数有利于模型求解,提高了模型的实用性.本文为公交运营者优化线路配车提供了理论支持.

乘客选择公交车辆时,模型假设公交车只要没有达到荷载人数,乘客就会上车,没有考虑车内拥挤程度对乘客选择的影响,在一定程度上影响了模型计算结果的可靠性.本文只研究了站点乘客数量这一不确定变量下的配车问题,公交线路配人、行车时刻表,构成行车作业计划、公交网络的优化,以及区域调度等问题在线路运行时间、公交站点乘客数量等多重不确定因素下的优化问题有待进一步讨论.

#### 参考文献:

- [1] 侯彦娥,孔云峰,朱艳芳,等. 公交司机排班问题的混合元启发算法研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2018, 18(1): 133-138. [HOU Y E, KONG Y F, ZHU Y F, et al. A hybrid metaheuristic algorithm for the transit bus and driver scheduling problem[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2018, 18(1): 133-138.]
- [2] 赵淑芝,王东,刘华胜,等. 常规公交线路多车型配置优化模型[J]. 北京工业大学学报, 2017, 43(10): 1529-1534. [ZHAO S Z, WANG D, LIU H S, et al. Multi-vehicle-type configuration model of regular bus lines [J]. Journal of Beijing University of Technology, 2017, 43(10): 1526-1534.]
- [3] 邱振. 常规公交线路(网)车辆配置双层规划模型研究[D]. 南昌: 华东交通大学, 2010. [DI Z. A Bi-level programming model for vehicle allocation of bus lines (Network) [D]. Nanchang: East China Jiaotong University, 2010.]
- [4] LIU T, CEDER A. Integrated public transport timetable synchronization and vehicle scheduling with demand assignment: A bi-objective bi-level model using deficit function approach[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2018, 117(11): 935-955.
- [5] MONNERAT F, DIAS J, ALVES M J. Fleet management: A vehicle and driver assignment model[J]. European Journal of Operational Research, 2019, 278(1): 64-75.
- [6] LIU B. Uncertainty theory(2nd ed.)[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [7] LIU B. Theory and practice of uncertain programming (2nd ed.)[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
- [8] 焦登娅. 车辆调度问题的不确定规划模型[D]. 北京: 清华大学, 2015. [JIAO D Y. Uncertain programming model for vehicle routing problem[D]. Beijing: Tsing Hua University, 2015.]
- [9] 张凤娇,张兴芳. 基于不确定理论的车辆路径问题[C]. 南京: 第九届中国不确定系统年会、第十三届中国青年信息与管理学者大会, 2011: 33-39. [ZHANG F J, ZHANG X F. Vehicle routing problem based on uncertainty theory[C]. Nanjing: The 9th China Uncertainty System Annual Conference & the 13th China Youth Information and Management Scholars Conference, 2011: 33-39.]
- [10] 柳伍生,周向栋,谭倩. 多元数据下的公交站点客流不确定性分析[J]. 交通运输系统工程与信息, 2018, 18(2): 149-156. [LIU W S, ZHOU X D, TAN Q. Uncertainty analysis to passenger flow of bus stations based on multivariate data fusion[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2018, 18(2): 149-156.]