

<http://bhxb.buaa.edu.cn> jbuaa@buaa.edu.cn

DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2023.0529

运载火箭助推段大攻角剖面高精度弹道解析解

张珂洋¹, 王鹏², 于琦¹, 余文斌^{1,*}, 陈万春¹

(1. 北京航空航天大学 宇航学院, 北京 102206; 2. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076)

摘 要: 针对运载火箭助推段预测校正制导方法中在线快速轨迹预测困难的问题, 提出一种适用于大攻角剖面的运载火箭助推段高精度弹道解析解。推导得到以质量为自变量的纵平面简化动力学模型, 并创新性地攻角的正弦值设计为关于质量的多项式。因为大攻角机动的影响, 简化动力学模型依旧是高度非线性的, 无法直接求得解析解。通过受力分析, 构造近似多项式替代原方程中非线性强但模值较小的项, 并将真实值与近似值之差作为摄动小量。根据摄动理论可以对动力学模型进行分阶以获得可以解析求解的子系统。对子系统积分可以得到速度、弹道倾角、航程和高度的解析解。仿真实验表明: 在大攻角条件下, 所提出解析解的精度比现有解析解至少提升了85%。

关 键 词: 解析解; 助推段弹道; 大攻角剖面; 运载火箭; 摄动法

中图分类号: V448.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5965(2025)10-3524-11

运载火箭主动段关机点参数, 特别是速度、弹道倾角和高度, 将直接决定入轨精度, 因此主动段弹道规划与制导是运载火箭设计的核心^[1]。火箭在主动段受力复杂, 约束条件多, 且速度、高度和弹道倾角相互耦合, 给弹道规划和制导带来了巨大的挑战^[2]。近年来, 随着数学手段的发展, 越来越多的新方法被应用在运载火箭上升段制导问题上。在文献[3]中, Cheng等针对复杂上升轨迹规划问题, 基于Newton-Kantorovich/伪谱方法, 将其转化为凸规划问题, 利用现有的凸优化方法迭代求解。Sun等^[4]研究了离散约束和动力学方程的凸方法, 提出了一种基于缩小信赖域约束的迭代算法, 提高了优化效率, 但由于轨迹优化方法对计算能力要求较高, 还无法在线应用。预测校正方法^[5-6]因其鲁棒性强、与轨迹优化法相比计算量相对较小等特点逐渐成为运载火箭主动段制导律的研究热点。该方法常用数值积分算法预测终端状态, 根据状态偏差校正当前控制剖面^[7], 然而弹道预测的计算效率将直接

决定制导律能否满足在线应用的要求。

为了减轻弹载计算机的负担以实现在线制导, 弹道解析解凭借较高的计算效率被越来越多的学者所重视^[8-9]。但由于推力的存在, 助推段动力学方程相互耦合且非线性强, 很难获得高精度的解析解。早在1903年, 齐奥尔科夫斯基在忽略重力和气动力的假设下, 推导得到了火箭速度与火箭质量、推进剂比冲之间的关系^[10], 这是最早的运载火箭主动段解析解。胡锦涛在其博士论文中, 忽略地球自转, 在零攻角假设下推导考虑气动力影响的运载火箭主动段速度、高度和弹道倾角解析解^[11]。Zhao等在文献[11]的基础上, 在零攻角处对各状态量使用一阶泰勒级数展开, 通过正则摄动法求得各状态增量的解析解, 进而推导得到非零攻角下的运载火箭解析解^[12], 但随着攻角的增加, 使用一阶泰勒级数近似的精度将显著降低, 因此Zhao等推导得到的解析解只适用于小攻角场景。

固体火箭发动机一般无法进行推力调节或提

收稿日期: 2023-08-17; 录用日期: 2023-10-24; 网络出版时间: 2023-11-01 16:05

网络出版地址: link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20231101.1418.004

*通信作者. E-mail: yuwenbin_buaa@163.com

引用格式: 张珂洋, 王鹏, 于琦, 等. 运载火箭助推段大攻角剖面高精度弹道解析解[J]. 北京航空航天大学学报, 2025, 51(10): 3524-3534.

ZHANG K Y, WANG P, YU Q, et al. Analytical solutions for ascent trajectory under high angle-of-attack conditions[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2025, 51(10): 3524-3534 (in Chinese).

前关机, 因此需要在高空执行大攻角机动以实现能量管理^[13], 其攻角剖面的最大值有时甚至会超过 60°, 此时无法再像文献 [13] 和文献 [14] 那样使用零攻角假设来简化动力学模型, 而大攻角条件下的助推段动力学方程具有高度非线性特点, 各状态量耦合严重, 解析求解具有较大难度。因此本文在考虑地球自转的前提下, 研究了一种运载火箭在大攻角剖面下的弹道解析解。首先, 基于量级分析对助推段动力学方程进行合理简化, 建立以质量为自变量的运载火箭纵平面运动简化方程; 其次, 根据攻角的实际规律创新性地设计正弦攻角剖面, 使用切比雪夫插值多项式近似余弦攻角剖面; 巧妙设计简单多项式对动力学模型中的复杂非线性项进行近似, 利用辅助飞行变量求解近似多项式的系数; 然后, 使用正则摄动法对原系统分阶并解析求解零阶和一阶子系统; 最后, 通过数值仿真实验验证了在大攻角的飞行条件下, 与现有解析解相比, 助推段弹道解析解的精度至少提升了 85%。

1 助推段动力学模型的简化

假设地球为一旋转的均质圆球, 运载火箭质心的运动方程^[14]如下:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{R \cos \phi} \quad (1)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{R} \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = V \sin \gamma \quad (3)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} + \frac{P}{m} \cos \alpha \cos \beta + \omega_e^2 R \cos^2 \phi \sin \gamma - g \sin \gamma - \omega_e^2 R \sin \phi \cos \phi \cos \gamma \cos \psi \quad (4)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{mV} + \frac{P \sin \alpha}{mV} - \frac{g \cos \gamma}{V} + \frac{V \cos \gamma}{R} + \frac{\omega_e^2 R}{V} \cdot (\cos^2 \phi \cos \gamma + \sin \phi \cos \phi \sin \gamma \cos \psi) + 2\omega_e \cos \phi \sin \psi \quad (5)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Z}{mV \cos \gamma} - \frac{P \cos \alpha \sin \beta}{mV \cos \gamma} + \frac{V \cos \gamma \sin \psi \tan \phi}{R} + \frac{\omega_e^2 R \sin \phi \cos \phi \sin \psi}{V \cos \gamma} + 2\omega_e (\sin \phi - \cos \phi \tan \gamma \cos \psi) \quad (6)$$

$$\frac{dm}{dt} = -q_m \quad (7)$$

式中: R 为火箭质心到地心的距离; λ 和 ϕ 分别为经度和纬度; V 为相对地球的飞行速度; γ 为当地弹道倾角; ψ 为当地航向角 (北偏东为正); m 为火箭质量; D 、 L 和 Z 分别为气动阻力、气动升力和气动横向力; α 和 β 分别为攻角和侧滑角; g 为当地重力加

速度; ω_e 为地球自转角速度; q_m 为火箭质量流量; P 为当地推力, 其与真空推力 P_0 、当地大气压强 P_a 和火箭发动机尾喷管截面积 S_N 的关系为

$$P = P_0 - S_N P_a \quad (8)$$

由式 (1) ~ 式 (8) 可知, 助推段动力学模型具有高度非线性特点, 难以获得精确的解析解。因此, 有必要根据助推段弹道特点, 对上述方程进行适当的简化。

在主动段飞行过程中, 火箭主要在纵向平面内进行机动转弯, 由地球自转引起的横向运动范围较小且容易修正, 因此可以忽略横向运动, 仅考虑纵向平面内的运动, 即仅以航程 x 、地心距 R 、飞行速度 V 、弹道倾角 γ 和质量 m 为状态量。

首先, 对速度方程 (即式 (4)) 进行简化, 地球自转角速度^[15] $\omega_e \approx 7.292\ 116 \times 10^{-5}$ rad/s, 主动段飞行高度 H 一般不超过 500 km, 因此 $R = R_e + H < 6\ 871$ km 且 $\omega_e^2 R < 0.04$ m/s², 其中, $R_e = 6\ 371$ km 为地球平均半径。而火箭的推重比一定大于 1, 即 $\omega_e^2 R \ll g < P/m$, 所以地球自转对飞行速度的影响可以忽略。其次, 对弹道倾角方程 (式 (5)) 进行简化。 $\omega_e R/V$ 项可以视为火箭所处位置的地球自转线速度与火箭飞行速度之比, 该比值一定远小于 1, 因此在方程中, 含 $\omega_e^2 R/V$ 的项对弹道倾角的影响远小于科氏力项, 可以忽略。此外, 在文献 [16] 中已经证明了当飞行器在纵向平面内飞行时, $\cos \phi \sin \psi$ 为常数, 即 $\cos \phi \sin \psi = \cos \phi_0 \sin \psi_0$, 其中, ϕ_0 和 ψ_0 分别表示 ϕ 和 ψ 的初值。

以米诺陶 IV 运载火箭为例, 其质量流量为常值^[17], 结合式 (7) 可知, 常值质量流量下质量和时间可做线性变换, 因此可以使用质量代替时间作为自变量, 如此一来, 可以减少质心运动方程组的个数, 简化动力学模型, 将式 (1) ~ 式 (6) 除以式 (7) 可得

$$\frac{dx}{dm} = -\frac{V}{q_m} \cos \gamma \quad (9)$$

$$\frac{dR}{dm} = -\frac{V}{q_m} \sin \gamma \quad (10)$$

$$\frac{dV}{dm} = -\frac{1}{q_m} \left(-\frac{D}{m} + \frac{P_0 - S_N P_a}{m} \cos \alpha - g \sin \gamma \right) \quad (11)$$

$$\frac{d\gamma}{dm} = -\frac{1}{q_m} \left(-\frac{g \cos \gamma}{V} + 2\omega_e \cos \phi_0 \sin \psi_0 \right) - \frac{1}{q_m} \left[\frac{L}{mV} + \frac{(P_0 - S_N P_a) \sin \alpha}{mV} + \frac{V \cos \gamma}{R} \right] \quad (12)$$

2 攻角剖面设计

在纵向平面内, 火箭通过调节攻角来改变推力方向, 进而调整轨迹。为了推导弹道解析解, 需要

设计一个攻角剖面。传统的运载火箭助推段一般直接对攻角剖面进行规划^[18],但由于在运载火箭的飞行动力学模型中,攻角 α 以三角函数的形式出现(如式(11)和式(12)所示),所以本文创新性地将 $\sin\alpha$ 看作一个整体进行规划,如此一来,可以大幅降低解析解推导的复杂程度。此外,运载火箭在级间分离和跨声速飞行时通常都要求攻角收敛到零,且火箭每一级的攻角一般遵循“快速增长,缓慢降低”的变化规律。因此,在满足攻角变化规律的前提下,为了简化解析解推导,创新性地将攻角剖面设计为

$$\sin\alpha = Q_{\sin\alpha} = c_0 + c_1m + c_2m^2 + c_3m^3 \tag{13}$$

式中: c_0 、 c_1 、 c_2 和 c_3 为攻角剖面的系数。

此外,式(11)中还需要用到 $\cos\alpha$ 。此处构造切比雪夫插值多项式 $Q_{\cos\alpha}$ 来近似 $\cos\alpha$,如下:

$$\cos\alpha \approx Q_{\cos\alpha} = \sum_{i=0}^N k_i^{\cos\alpha} m^i \tag{14}$$

图1对比了 $\cos\alpha$ 的真实剖面与近似多项式的结果。从图中可以看出,近似剖面具有较高的拟合精度,可以满足解析解的推导需要。

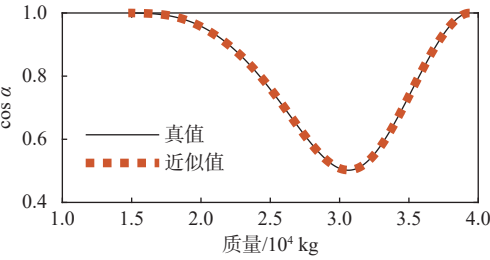


图1 攻角余弦值近似解的精度

Fig. 1 Accuracy of approximate solution of $\cos\alpha$

3 辅助飞行变量

为了利用摄动法推导式(9)~式(12)的近似解析解,需要先使用关于质量的多项式函数对部分高度非线性的状态量进行近似。由于无法获知终端状态的准确值,在求解近似函数的系数时需要事先引入一些辅助飞行变量。为了与真实飞行状态进行区分,使用上标“^”来表示辅助飞行变量。通过对速度、弹道倾角和地心距的微分方程进行进一步简化,辅助飞行变量只与初始状态和质量相关,因而便于求解。

首先对速度微分方程(式(11))进行简化。该式中涉及3种作用力:阻力、推力和重力,其中阻力远小于推力和重力。因此,可以粗略构造一个关于质量的一次函数 Q_D 来近似辅助阻力 $\hat{D}$,形式如下:

$$\hat{D} \approx Q_D = k_0^D + k_1^D m \tag{15}$$

式中: k_0^D 和 k_1^D 为拟合系数,可由当前阻力值和预测的终端阻力值求解。由于运载火箭主动段的关机高度较高,大气密度较小,预测的终端阻力可以假设为0。

将重力加速度 g 和弹道倾角 γ 视为常数,分别以初始值代替,并忽略大气压强对发动机推力的影响,则式(11)可以简化为

$$\frac{d\hat{V}}{dm} \approx -\frac{1}{q_m} \sum_{i=1}^{N-1} f_i^{\hat{V}} m^i \tag{16}$$

式中: $f_i^{\hat{V}}$ 为多项式系数,其表达式形式复杂但可以通过多项式运算简单地计算得到。

对式(16)积分可得辅助速度解析解为

$$\hat{V} = \sum_{i=0}^N F_i^{\hat{V}} m^i + F_{\ln}^{\hat{V}} \ln m \tag{17}$$

式中: $F_i^{\hat{V}}$ 和 $F_{\ln}^{\hat{V}}$ 为多项式系数。

然后,对弹道倾角微分方程(式(12))进行简化。该式中涉及5种作用力:升力、推力、重力、由地球曲率引起的离心力和由地球自转引起的惯性力。因为气动力和由大气压强引起的推力变化对运载火箭飞行的影响很小,可以粗略使用关于质量的一次多项式来近似 $0.5\rho V S_{\text{ref}}/m$ 和 P_a/mV 项:

$$\frac{0.5\hat{\rho}\hat{V}S_{\text{ref}}}{m} \approx Q_{\hat{\rho}\hat{V}} = k_0^{\hat{\rho}\hat{V}} + k_1^{\hat{\rho}\hat{V}} m \tag{18}$$

$$\frac{\hat{P}_a}{m\hat{V}} \approx Q_{\hat{P}_a(0)} = k_0^{\hat{P}_a} + k_1^{\hat{P}_a} m \tag{19}$$

式中: S_{ref} 为气动参考面积。

此外,由于已经获得 $\hat{V}$ 的解析表达式,可以构造一个关于质量的二次多项式来近似 $1/\hat{V}$,如下所示:

$$\frac{1}{\hat{V}} \approx Q_{\hat{V}} = k_0^{\hat{V}} + k_1^{\hat{V}} m + k_2^{\hat{V}} m^2 \tag{20}$$

与式(15)同理,在求解式(18)和式(19)的拟合系数时,可以假设终端密度和终端大气压强的值均为0。

众所周知,气动力系数随攻角和马赫数变化。由于运载火箭具有轴对称的气动外形,当给定马赫数时,其升力系数一般可以表示为攻角的奇数次幂级数形式。而在区间 $[-\pi/2, \pi/2]$ 内, $\sin\alpha$ 和 α 为单调关系,因此可以利用线性函数对升力系数进行近似,如下:

$$C_L \approx Q_{C_L} = k_1^{C_L} \sin\alpha = k_1^{C_L} Q_{\sin\alpha} \tag{21}$$

运载火箭主动段的高度变化相对地球半径而言属于小量,可以将 $\hat{V}\cos\hat{\gamma}/\hat{R}$ 项和 $\hat{g}\cos\hat{\gamma}/\hat{V}$ 项中的 $\hat{R}$ 和 $\hat{g}$ 视为常数,分别以初始值代替。由于辅助飞行变量是真实飞行状态的粗略近似,本文可以将 $\cos\hat{\gamma}$ 视为常数。综上,式(12)可被简化为

$$\frac{d\hat{\gamma}}{dm} \approx \sum_{i=-1}^N f_i^{\hat{\gamma}} m^i + f_{\ln}^{\hat{\gamma}} \ln m \quad (22)$$

式中: $f_i^{\hat{\gamma}}$ 和 $f_{\ln}^{\hat{\gamma}}$ 为多项式系数。

对式 (22) 积分可得辅助弹道倾角解析解为

$$\hat{\gamma} = \gamma_0 + f_{-1}^{\hat{\gamma}} \ln \frac{m}{m_0} + \sum_{i=0}^N \frac{f_i^{\hat{\gamma}}}{i+1} (m^{i+1} - m_0^{i+1}) + f_{\ln}^{\hat{\gamma}} (m \ln m - m_0 \ln m_0) - f_{\ln}^{\hat{\gamma}} (m - m_0) \quad (23)$$

最后推导辅助地心距。因为地心距微分方程 (式 (10)) 中含有 $\sin \hat{\gamma}$ 项, 需要先对该项进行简化。实际上, 由于 $\hat{\gamma}$ 的解析式精度并不高, $\sin \hat{\gamma}$ 的精度也不高。进而, 在求解辅助地心距的过程中, 无法利用高次多项式对 $\sin \hat{\gamma}$ 进行高精度近似。为了简化运算, 采用关于 m 的线性多项式粗略近似 $\sin \hat{\gamma}$ 项:

$$\sin \hat{\gamma} \approx k_0^{\sin \hat{\gamma}} + k_1^{\sin \hat{\gamma}} m \quad (24)$$

将式 (17) 和式 (24) 代入式 (10) 可得辅助地心距微分方程:

$$\frac{d\hat{R}}{dm} = \sum_{i=0}^{N+1} f_i^{\hat{R}} m^i - \frac{F_{\ln}^{\hat{R}} k_0^{\sin \hat{\gamma}}}{q_m} \ln m - \frac{F_{\ln}^{\hat{R}} k_1^{\sin \hat{\gamma}}}{q_m} m \ln m \quad (25)$$

式中: $f_i^{\hat{R}}$ 为多项式系数。

对式 (25) 进一步积分可得辅助地心距的解析解为

$$\begin{aligned} \hat{R} = R_0 - \frac{F_{\ln}^{\hat{R}} k_1^{\sin \hat{\gamma}}}{2q_m} (m^2 \ln m - m_0^2 \ln m_0) + \\ \sum_{i=0}^{N+1} \frac{f_i^{\hat{R}}}{i+1} (m^{i+1} - m_0^{i+1}) + \frac{F_{\ln}^{\hat{R}} k_1^{\sin \hat{\gamma}}}{4q_m} (m^2 - m_0^2) - \frac{1}{q_m} \cdot \\ \left[F_{\ln}^{\hat{R}} k_0^{\sin \hat{\gamma}} (m \ln m - m_0 \ln m_0) - F_{\ln}^{\hat{R}} k_0^{\sin \hat{\gamma}} (m - m_0) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

4 动力学模型的分解

在本节中, 利用辅助飞行变量来构造近似多项式, 以替换式 (9) ~ 式 (12) 中具有高度非线性, 但模值较小的项, 然后根据摄动理论将真实值与近似值之差作为摄动小量进行修正。

首先, 将式 (9) ~ 式 (12) 改写成如下形式:

$$\frac{dx}{dm} = -V [\mathcal{Q}_{\cos \gamma(1)} - \varepsilon (\mathcal{Q}_{\cos \gamma(1)} - \cos \gamma)] / q_m \quad (27)$$

$$\frac{dR}{dm} = -V [\mathcal{Q}_{\sin \gamma} - \varepsilon (\mathcal{Q}_{\sin \gamma} - \sin \gamma)] / q_m \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dm} = \frac{\mathcal{Q}_{\hat{D}} - \varepsilon (\mathcal{Q}_{\hat{D}} - D)}{q_m m} + \frac{\mathcal{Q}_g - \varepsilon (\mathcal{Q}_g - g \sin \gamma)}{q_m} - \\ \frac{P_0 \mathcal{Q}_{\cos \alpha}}{q_m m} + \frac{S_N \mathcal{Q}_{\cos \alpha}}{q_m} \left[\mathcal{Q}_{P_a(1)} - \varepsilon \left(\mathcal{Q}_{P_a(1)} - \frac{P_a}{m} \right) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dm} = \frac{S_N \mathcal{Q}_{\sin \alpha}}{q_m} \left(\mathcal{Q}_{P_a(2)} - \varepsilon \left(\mathcal{Q}_{P_a(2)} - \frac{P_a}{mV} \right) \right) - \\ \frac{\mathcal{Q}_{C_L} - \varepsilon (\mathcal{Q}_{C_L} - C_L)}{q_m} \left(\mathcal{Q}_{\hat{V}} - \varepsilon \left(\mathcal{Q}_{\hat{V}} - \frac{\rho V S_{\text{ref}}}{2m} \right) \right) - \\ \frac{P_0 \mathcal{Q}_{\sin \alpha}}{q_m m} \left(\mathcal{Q}_{\hat{V}} - \varepsilon \left(\mathcal{Q}_{\hat{V}} - \frac{1}{V} \right) \right) - \frac{2\omega_e \cos \phi_0 \sin \psi_0}{q_m} - \\ \left\{ \frac{V}{q_m \bar{R}} - \frac{\bar{g}}{q_m} \left[\mathcal{Q}_{\hat{V}} - \varepsilon \left(\mathcal{Q}_{\hat{V}} - \frac{1}{V} \right) \right] \right\} \cdot \\ [\mathcal{Q}_{\cos \gamma(2)} - \varepsilon (\mathcal{Q}_{\cos \gamma(2)} - \cos \gamma)] \end{aligned} \quad (30)$$

式中: $\varepsilon = 1$, 用于实施摄动法; $\bar{R}$ 为 $\hat{R}$ 初始和终端值的均值; $\bar{g}$ 由 $\bar{R}$ 计算得到。

在航程和地心距微分方程 (式 (27) 和式 (28)) 中, 使用如下所示的方法近似 $\cos \gamma$ 和 $\sin \gamma$:

$$\begin{cases} \cos \hat{\gamma} \approx \mathcal{Q}_{\cos \gamma(1)} = \cos \hat{\gamma}^* - \sin \hat{\gamma}^* (\gamma - \hat{\gamma}^*) \\ \sin \hat{\gamma} \approx \mathcal{Q}_{\sin \gamma} = \sin \hat{\gamma}^* + \cos \hat{\gamma}^* (\gamma - \hat{\gamma}^*) \end{cases} \quad (31)$$

式中: $\hat{\gamma}^*$ 为辅助弹道倾角初始和终端值的均值。

在式 (29) 和式 (30) 中, 分别使用关于质量的一次函数 $\mathcal{Q}_g$ 和 $\mathcal{Q}_{\cos \gamma(2)}$ 来近似 $g \sin \gamma$ 和 $\cos \gamma$ 项, 如下:

$$\begin{cases} \hat{g} \sin \hat{\gamma} \approx \mathcal{Q}_g = k_0^g + k_1^g m \\ \cos \hat{\gamma} \approx \mathcal{Q}_{\cos \gamma(2)} = k_0^{\cos \gamma} + k_1^{\cos \gamma} m \end{cases} \quad (32)$$

分别使用关于质量的二次函数 $\mathcal{Q}_{P_a(1)}$ 和 $\mathcal{Q}_{P_a(2)}$ 来近似 P_a/m 和 P_a/mV 项, 形式如下:

$$\begin{cases} \hat{P}_a / m \approx \mathcal{Q}_{P_a(1)} = k_0^{P_a} + k_1^{P_a} m + k_2^{P_a} m^2 \\ \hat{P}_a / m\hat{V} \approx \mathcal{Q}_{P_a(2)} = k_0^{P_a} + k_1^{P_a} m + k_2^{P_a} m^2 \end{cases} \quad (33)$$

利用第 3 节中介绍的辅助飞行变量, 可以确定上述多项式的系数。根据摄动法的要求, 将状态量展开为一阶级数, 即

$$\begin{cases} x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} \\ R = R^{(0)} + \varepsilon R^{(1)} \\ V = V^{(0)} + \varepsilon V^{(1)} \\ \gamma = \gamma^{(0)} + \varepsilon \gamma^{(1)} \end{cases} \quad (34)$$

式中: 上角标 “(0)” “(1)” 分别表示零阶和一阶状态量。将式 (34) 代入式 (27) ~ 式 (30), 并根据正则摄动法将其展开成 ε 的幂级数, 合并同阶的 ε 项可得状态量的零阶微分方程:

$$\frac{dx^{(0)}}{dm} = -\frac{V^{(0)}}{q_m} [(\cos \hat{\gamma}^* + \hat{\gamma}^* \sin \hat{\gamma}^*) - \gamma^{(0)} \sin \hat{\gamma}^*] \quad (35)$$

$$\frac{dR^{(0)}}{dm} = -\frac{V^{(0)}}{q_m} [(\sin \hat{\gamma}^* - \hat{\gamma}^* \cos \hat{\gamma}^*) + \gamma^{(0)} \cos \hat{\gamma}^*] \quad (36)$$

$$\frac{dV^{(0)}}{dm} = \frac{\mathcal{Q}_{\hat{D}}}{mq_m} - \frac{P_0 \mathcal{Q}_{\cos \alpha}}{mq_m} + \frac{S_N \mathcal{Q}_{\cos \alpha} \mathcal{Q}_{P_a(1)} + \mathcal{Q}_g}{q_m} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma^{(0)}}{dm} = -\frac{1}{q_m} \left(\frac{P_0 \mathcal{Q}_{\sin \alpha} \mathcal{Q}_{\hat{V}}}{m} - S_N \mathcal{Q}_{\sin \alpha} \mathcal{Q}_{P_a(2)} \right) - \frac{1}{q_m} \cdot \\ (\mathcal{Q}_{C_L} \mathcal{Q}_{\hat{V}} + V^{(0)} \mathcal{Q}_{\cos \gamma(2)} / \bar{R} - \bar{g} \mathcal{Q}_{\hat{V}} \mathcal{Q}_{\cos \gamma(2)}) - \\ 2\omega_e \cos \phi_0 \sin \psi_0 / q_m \end{aligned} \quad (38)$$

状态量的一阶微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dm} = \frac{V^{(0)}}{q_m} (\gamma^{(1)} \sin \hat{\gamma}^* - \cos \gamma^{(0)}) + \frac{V^{(0)} - V^{(1)}}{q_m} \cdot [(\cos \hat{\gamma}^* + \hat{\gamma}^* \sin \hat{\gamma}^*) - \gamma^{(0)} \sin \hat{\gamma}^*] \quad (39)$$

$$\frac{dR^{(1)}}{dm} = [(\sin \hat{\gamma}^* - \hat{\gamma}^* \cos \hat{\gamma}^*) + \gamma^{(0)} \cos \hat{\gamma}^*] \cdot \frac{V^{(0)} - V^{(1)}}{q_m} - \frac{V^{(0)}}{q_m} (\gamma^{(1)} \cos \hat{\gamma}^* + \sin \gamma^{(0)}) \quad (40)$$

$$\frac{dV^{(1)}}{dm} = -\frac{1}{q_m} \left[\frac{Q_D - D^{(0)}}{m} + (Q_g - g^{(0)} \sin \gamma^{(0)}) \right] - \frac{1}{q_m} \left[S_N Q_{\cos \alpha} \left(Q_{P_a(1)} - \frac{P_a^{(0)}}{m} \right) \right] \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma^{(1)}}{dm} = & \frac{Q_{C_L}}{q_m} \left(Q_{\hat{\gamma}} - \frac{0.5\rho^{(0)}V^{(0)}S_{\text{ref}}}{m} \right) + \frac{(Q_{C_L} - C_L)Q_{\hat{\gamma}}}{q_m} + \\ & \frac{P_0 Q_{\sin \alpha}}{mq_m} \left(Q_{\hat{\gamma}} - \frac{1}{V^{(0)}} \right) - \frac{S_N Q_{\sin \alpha}}{q_m} \left(Q_{P_a(2)} - \frac{P_a^{(0)}}{mV^{(0)}} \right) + \\ & \frac{V^{(0)}}{\bar{R}q_m} (Q_{\cos \gamma(2)} - \cos \gamma^{(0)}) - \frac{V^{(1)}}{\bar{R}q_m} Q_{\cos \gamma(2)} - \\ & \frac{\bar{g}Q_{\hat{\gamma}}}{q_m} (Q_{\cos \gamma(2)} - \cos \gamma^{(0)}) - \frac{\bar{g}Q_{\cos \gamma(2)}}{q_m} \left(Q_{\hat{\gamma}} - \frac{1}{V^{(0)}} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

5 解析解推导

5.1 零阶解析解

首先, 将式 (32) 和式 (33) 代入式 (37), 则速度零阶微分方程可被简化为

$$\frac{dV^{(0)}}{dm} = \sum_{i=-1}^{N+2} f_i^{V^{(0)}} m^i \quad (43)$$

式中: $f_i^{V^{(0)}}$ 为多项式系数。对上式积分并化简可得速度零阶解:

$$V^{(0)} = \sum_{i=0}^{N+3} F_i^{V^{(0)}} m^i + F_{\ln}^{V^{(0)}} \ln m \quad (44)$$

式中: $F_i^{V^{(0)}}$ 和 $F_{\ln}^{V^{(0)}}$ 为化简后的多项式系数。

将式 (32) 和式 (33) 代入式 (38), 弹道倾角零阶微分方程可被简化为

$$\frac{d\gamma^{(0)}}{dm} = \sum_{i=-1}^{N+4} f_i^{\gamma^{(0)}} m^i + f_{\ln,0}^{\gamma^{(0)}} \ln m + f_{\ln,1}^{\gamma^{(0)}} m \ln m \quad (45)$$

式中: $f_i^{\gamma^{(0)}}$ 、 $f_{\ln,0}^{\gamma^{(0)}}$ 和 $f_{\ln,1}^{\gamma^{(0)}}$ 为多项式系数。

对上式积分并化简可得弹道倾角零阶解:

$$\gamma^{(0)} = \sum_{i=0}^{N+5} F_i^{\gamma^{(0)}} m^i + F_{\ln,0}^{\gamma^{(0)}} \ln m + F_{\ln,1}^{\gamma^{(0)}} m \ln m + F_{\ln,2}^{\gamma^{(0)}} m^2 \ln m \quad (46)$$

式中: $F_i^{\gamma^{(0)}}$ 、 $F_{\ln,0}^{\gamma^{(0)}}$ 、 $F_{\ln,1}^{\gamma^{(0)}}$ 和 $F_{\ln,2}^{\gamma^{(0)}}$ 为化简后的系数。

观察可知, 地心距和航程的零阶微分方程在形式上十分相似, 只需要将式 (35) 中的 $K_{\cos \gamma(0)} = \cos \hat{\gamma}^* +$

$\hat{\gamma}^* \sin \hat{\gamma}^*$ 项替换为式 (36) 中的 $K_{\sin \gamma(0)} = \sin \hat{\gamma}^* - \hat{\gamma}^* \cos \hat{\gamma}^*$ 项, 再将 $K_{\cos \gamma(1)} = \sin \hat{\gamma}^*$ 项替换为 $K_{\sin \gamma(1)} = -\cos \hat{\gamma}^*$ 项, 即可获得式 (36)。由于替换项在推导零阶解时均视为常数, 而常数替换后不会改变零阶解的推导过程和解的形式。因此, 先推导航程零阶解, 然后对其进行常数替换即可得到地心距零阶解。

将式 (44) 和式 (46) 代入式 (35) 可得

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(0)}}{dm} = & \sum_{i=0}^{2N+8} f_{2,i}^{x^{(0)}} m^i - \frac{K_{\cos \gamma(0)}}{q_m} F_{\ln}^{V^{(0)}} \ln m + \\ & \frac{K_{\cos \gamma(1)}}{q_m} \sum_{i=0}^{N+5} f_{3,i}^{x^{(0)}} m^i \ln m + K_{\cos \gamma(1)} \cdot \\ & \frac{F_{\ln}^{V^{(0)}} \ln^2 m}{q_m} (F_{\ln,0}^{\gamma^{(0)}} + F_{\ln,1}^{\gamma^{(0)}} m + F_{\ln,2}^{\gamma^{(0)}} m^2) \end{aligned} \quad (47)$$

式中: $f_{2,i}^{x^{(0)}}$ 、 $f_{3,i}^{x^{(0)}}$ 为多项式系数。对上式积分并进行代数化简可得航程零阶解:

$$\begin{aligned} x^{(0)} = & \sum_{i=0}^{2N+9} F_{1,i}^{x^{(0)}} m^i + \sum_{i=1}^{N+6} F_{2,i}^{x^{(0)}} m^i \ln m + F_{\ln,1}^{x^{(0)}} m \cdot \\ & \ln^2 m + F_{\ln,2}^{x^{(0)}} m^2 \ln^2 m + F_{\ln,3}^{x^{(0)}} m^3 \ln^2 m \end{aligned} \quad (48)$$

式中: $F_{1,i}^{x^{(0)}}$ 、 $F_{2,i}^{x^{(0)}}$ 、 $F_{\ln,1}^{x^{(0)}}$ 、 $F_{\ln,2}^{x^{(0)}}$ 和 $F_{\ln,3}^{x^{(0)}}$ 为化简后的多项式系数。

式 (36) 与式 (35) 形式相似, 所以 $R^{(0)}$ 的形式也与 $x^{(0)}$ 相似。这里直接给出地心距零阶解, 见式 (49)。此处只要对航程零阶解推导过程中的常量进行替换, 即可得到式 (49) 中的系数表达式。

$$\begin{aligned} R^{(0)} = & \sum_{i=0}^{2N+9} F_{1,i}^{R^{(0)}} m^i + \sum_{i=1}^{N+6} F_{2,i}^{R^{(0)}} m^i \ln m + F_{\ln,1}^{R^{(0)}} m \cdot \\ & \ln^2 m + F_{\ln,2}^{R^{(0)}} m^2 \ln^2 m + F_{\ln,3}^{R^{(0)}} m^3 \ln^2 m \end{aligned} \quad (49)$$

5.2 一阶解析解

5.2.1 归一化质量

根据摄动法理论, 一阶解是对零阶解的修正, 为保证解析解的精度, 需尽可能降低一阶解的误差。在前文推导过程中, 近似多项式均以真实质量 m 为自变量。但 m 的范围一般在 $10^3 \sim 10^4$ kg, 其高阶幂次运算会产生较大的舍入误差, 而在一阶解推导过程中, 解析解的阶数会更高。因此, 为了提高一阶解的精度, 在推导时引入归一化质量 $\tilde{m}$, 其与真实质量 m 的关系为

$$m = \frac{m_0 + m_f}{2} + \frac{m_0 - m_f}{2} \tilde{m} \quad (50)$$

式中: m_0 和 m_f 分别为初始质量和终端质量。为了后文推导方便, 引入 K_{m0} 和 K_{m1} :

$$\begin{cases} K_{m0} = \frac{m_0 + m_f}{2} \\ K_{m1} = \frac{m_0 - m_f}{2} \end{cases} \quad (51)$$

则基于 m 和 $\tilde{m}$ 的近似多项式有如下所示的转换

关系:

$$\sum_{i=0}^N k_i m^i = \sum_{i=0}^N \left[K_{m1}^i \sum_{j=i}^N (k_j C_j^{j-i} K_{m0}^{j-i}) \tilde{m}^i \right] \quad (52)$$

$$\sum_{i=0}^N \tilde{k}_i \tilde{m}^i = \sum_{i=0}^N \left\{ \left(\frac{1}{K_{m1}} \right)^i \sum_{j=i}^N \left[k_j C_j^{j-i} \left(-\frac{K_{m0}}{K_{m1}} \right)^{j-i} \right] m^i \right\} \quad (53)$$

式中: C_j^{j-i} 代表组合数运算。

5.2.2 速度一阶解

式 (41) 中含有需要通过零阶解求得的阻力 $D^{(0)}$ 、大气压强 $P_a^{(0)}$ 、重力加速度 $g^{(0)}$ 和 $\sin \gamma^{(0)}$, 结合式 (44)、式 (46) 和式 (48) 可知, 上述各项形式极其复杂, 必须对其进行预处理, 否则无法推导解析解。

与式 (22) 和式 (38) 中对升力 L 的处理类似, 将零阶阻力 $D^{(0)}$ 拆分为动压、参考面积与阻力系数乘积的形式, 即

$$D^{(0)} = 0.5 \rho^{(0)} (V^{(0)})^2 S_{\text{ref}} C_D^{(0)} \quad (54)$$

与升力系数的分析同理, 阻力系数也可以表示为 $\sin \alpha$ 的偶数次幂级数形式:

$$C_D = k_0^{C_D} (Ma) + k_2^{C_D} (Ma) \sin^2 \alpha + k_4^{C_D} (Ma) \cdot \sin^4 \alpha \quad (55)$$

为了保证精度且更符合实际, 对零阶阻力系数 $C_D^{(0)}$ 而言, 假设上式中 $k_0^{C_D}$ 、 $k_2^{C_D}$ 、 $k_4^{C_D}$ 均为零阶马赫数 $Ma^{(0)}$ 的函数。 $Ma^{(0)}$ 是零阶速度除以由零阶高度计算得到的零阶声速, 所以其形式也较为复杂。为了便于推导, 构造切比雪夫插值多项式分别近似以下项:

$$Ma^{(0)} \approx \tilde{Q}_{Ma}^{(0)} = \sum_{i=0}^N \tilde{k}_i^{Ma^{(0)}} \tilde{m}^i \quad (56)$$

$$\frac{0.5 \rho^{(0)} (V^{(0)})^2}{m} \approx \tilde{Q}_{\rho V}^{(0)} = \sum_{i=0}^N \tilde{k}_i^{\rho V^{(0)}} \tilde{m}^i \quad (57)$$

$$\frac{P_a^{(0)}}{m} \approx \tilde{Q}_{P_a}^{(0)} = \sum_{i=0}^N \tilde{k}_i^{P_a^{(0)}} \tilde{m}^i \quad (58)$$

$$g^{(0)} \sin \gamma^{(0)} \approx \tilde{Q}_g^{(0)} = \sum_{i=0}^N \tilde{k}_i^{g^{(0)}} \tilde{m}^i \quad (59)$$

使用式 (56) 和式 (57) 所示近似多项式的另一个优势在于, 推导弹道倾角一阶解时可以直接使用上述拟合公式, 减少需要近似变量的数目, 既降低了计算量, 又提升了精度。

利用式 (52) 将 $Q_{\sin \alpha}$ 、 $Q_{\cos \alpha}$ 和 Q_g 转换成归一化质量 $\tilde{m}$ 的函数 $\tilde{Q}_{\sin \alpha}$ 、 $\tilde{Q}_{\cos \alpha}$ 和 $\tilde{Q}_g$ 。再将其与式 (15)、式 (55) ~ 式 (59) 代入式 (41) 可得

$$\frac{dV^{(1)}}{dm} = -\frac{k_0^{\dot{D}}}{q_m} \frac{1}{K_{m0} + K_{m1} \tilde{m}} + \sum_{i=0}^{2N+12} \tilde{f}_i^{V^{(1)}} \tilde{m}^i \quad (60)$$

式中: $\tilde{f}_i^{V^{(1)}}$ 为多项式系数。对上式进行积分可得

$$V^{(1)} = \sum_{i=0}^{2N+13} \tilde{F}_i^{V^{(1)}} \tilde{m}^i + F_{\ln}^{V^{(1)}} \ln (K_{m0} + K_{m1} \tilde{m}) \quad (61)$$

式中: $\tilde{F}_i^{V^{(1)}}$ 和 $F_{\ln}^{V^{(1)}}$ 为多项式系数。

5.2.3 弹道倾角一阶解

为保证精度, 在式 (21) 的基础上对式 (42) 中的升力系数 C_L 使用关于 $\sin \alpha$ 的三次函数近似。采用与阻力系数 C_D 相似的方法, 将拟合系数假设为 $Ma^{(0)}$ 的函数, 即

$$C_L = k_1^{C_L} (Ma) \sin \alpha + k_3^{C_L} (Ma) \sin^3 \alpha \quad (62)$$

然后, 对式 (42) 中的 $\frac{P_0 Q_{\sin \alpha}}{mq_m} \left(Q_{\hat{V}} - \frac{1}{V^{(0)}} \right)$ 项进行处理。该项分母中含有真实质量 m , 且 $V^{(0)}$ 的形式较为复杂, 若直接转换为归一化质量 $\tilde{m}$, 则无法积分得到解析解。所以先使用切比雪夫插值多项式近似 $1/V^{(0)}$, 形式如下:

$$\frac{1}{V^{(0)}} \approx Q_V^{(0)} = \sum_{i=0}^N k_i^{V^{(0)}} m^i \quad (63)$$

将式 (13)、式 (20) 和式 (63) 代入 $\frac{P_0 Q_{\sin \alpha}}{mq_m} \left(Q_{\hat{V}} - \frac{1}{V^{(0)}} \right)$, 并利用式 (52) 将 $Q_{\hat{V}}$ 、 $Q_{\hat{V}}$ 、 $Q_{\cos \gamma(2)}$ 、 $Q_{P_a(2)}$ 、 $V^{(0)}$ 和该项转换成归一化质量 $\tilde{m}$ 的函数。再使用切比雪夫插值多项式近似 $\cos \gamma^{(0)}$, 形式如下:

$$\cos \gamma^{(0)} \approx \tilde{Q}_{\cos \gamma}^{(0)} = \sum_{i=0}^N \tilde{k}_i^{\cos \gamma^{(0)}} \tilde{m}^i \quad (64)$$

由于速度一阶解 $V^{(1)}$ 远小于速度零阶解 $V^{(0)}$, 式 (42) 中的 $\frac{V^{(1)}}{\tilde{K}_{q_m}} Q_{\cos \gamma(2)}$ 项可以被忽略。将式 (21)、式 (56) 和式 (57)、式 (62)、式 (64) 代入式 (42), 并将 $\gamma^{(1)}$ 分解为 $\gamma_1^{(1)}$ 和 $\gamma_2^{(1)}$ 两部分, 整理可得

$$\frac{d\gamma_1^{(1)}}{dm} = \frac{1}{q_m} \frac{P_0 C_0 (k_0^{\hat{V}} - k_0^{V^{(0)}})}{K_{m0} + K_{m1} \tilde{m}} + \sum_{i=0}^{N_1} \tilde{f}_i^{\gamma_1^{(1)}} \tilde{m}^i \quad (65)$$

$$\frac{d\gamma_2^{(1)}}{dm} = \ln (K_{m0} + K_{m1} \tilde{m}) \sum_{i=0}^N \tilde{f}_{\ln, i}^{\gamma^{(1)}} \tilde{m}^i \quad (66)$$

式中: $N_1 = \max \{2N + 3, N + 11\}$ 。观察式 (66) 可以发现 $\ln (K_{m0} + K_{m1} \tilde{m}) \sum_{i=0}^N \tilde{f}_{\ln, i}^{\gamma^{(1)}} \tilde{m}^i$ 项较难求得解析解, 且其阶数相对较小, 所以使用式 (53) 的转换关系, 式 (66) 可被改写为

$$\frac{d\gamma_2^{(1)}}{dm} = \ln m \sum_{i=0}^N f_{\ln, i}^{\gamma^{(1)}} m^i \quad (67)$$

分别对式 (65) 和式 (67) 进行积分, 将二者相加可得弹道倾角一阶解:

$$\gamma^{(1)} = \gamma_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)} = F_{\ln}^{\gamma^{(1)}} \ln(K_{m0} + K_{m1}\tilde{m}) + \sum_{i=0}^{N_1+1} \tilde{F}_i^{\gamma^{(1)}} \tilde{m}^i + \sum_{i=0}^{N+1} F_i^{\gamma^{(1)}} m^i (i \ln m - 1) \quad (68)$$

式中： $F_{\ln}^{\gamma^{(1)}}$ 、 $\tilde{F}_i^{\gamma^{(1)}}$ 和 $F_i^{\gamma^{(1)}}$ 为多项式系数。

5.2.4 航程一阶解

式 (39) 中含有 $\cos \gamma^{(0)}$ 项, 结合式 (46) 可知其积分后无法得到解析解, 因此利用式 (64) 对 $\cos \gamma^{(0)}$ 进行近似。将式 (44)、式 (46)、式 (61) 和式 (68) 代入式 (39), 经过代数运算可知其中包含以下项:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=0}^{N+3} \tilde{F}_i^{V^{(0)}} \tilde{m}^i \sum_{i=0}^{N+1} F_i^{\gamma^{(1)}} m^i (i \ln m - 1) \\ &\ln(K_{m0} + K_{m1}\tilde{m}) \sum_{i=0}^{N+1} F_i^{\gamma^{(1)}} m^i (i \ln m - 1) \\ &\ln(K_{m0} + K_{m1}\tilde{m}) \sum_{i=0}^{2N+15} k_i^{x^{(1)}} \tilde{m}^i \end{aligned} \right. \quad (69)$$

前两项积分后无法得到解析解, 第三项先使用式 (53) 进行转换后再积分, 虽然可以得到解析解, 但阶数较高会引入较大舍入误差, 导致解析解失效。因此, 需要再次使用切比雪夫插值多项式近似 $V^{(0)}\gamma^{(1)}$ 和 $(V^{(0)} - V^{(1)})\gamma^{(0)}$ 项, 形式如下:

$$\left\{ \begin{aligned} &V^{(0)}\gamma^{(1)} \approx \tilde{Q}_{V\gamma 1}^{(1)} = \sum_{i=0}^N \tilde{k}_i^{V\gamma 1} \tilde{m}^i \\ &(V^{(0)} - V^{(1)})\gamma^{(0)} \approx \tilde{Q}_{V\gamma 2}^{(1)} = \sum_{i=0}^N \tilde{k}_i^{V\gamma 2} \tilde{m}^i \end{aligned} \right. \quad (70)$$

将式 (44)、式 (46)、式 (61)、式 (64)、式 (68) 和式 (70) 代入式 (39), 可以获得与弹道倾角一阶微分方程形式类似的表达式, 采用相同的推导方法, 将 $x^{(1)}$ 分解为 $x_1^{(1)}$ 和 $x_2^{(1)}$ 两部分, 其表达式分别为

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dm} = \sum_{i=0}^{2N+13} \tilde{f}_i^{x^{(1)}} \tilde{m}^i + \frac{\cos \hat{\gamma}^* + \hat{\gamma}^* \sin \hat{\gamma}^*}{q_m} \cdot (F_{\ln}^{V^{(0)}} - F_{\ln}^{V^{(1)}}) \ln(K_{m0} + K_{m1}\tilde{m}) \quad (71)$$

$$\frac{dx_2^{(1)}}{dm} = \ln(K_{m0} + K_{m1}\tilde{m}) \sum_{i=0}^N \tilde{f}_{\ln,i}^{x^{(1)}} \tilde{m}^i \quad (72)$$

与式 (66) 处理类似, 对式 (72) 先使用式 (53) 的转换关系可得

$$\frac{dx_2^{(1)}}{dm} = \ln m \sum_{i=0}^N f_{\ln,i}^{x^{(1)}} m^i \quad (73)$$

分别对式 (71) 和式 (73) 积分, 二者求和可得航程一阶解:

$$x^{(1)} = x_1^{(1)} + x_2^{(1)} = F_{\ln}^{x^{(1)}} \left(\tilde{m} + \frac{K_{m0}}{K_{m1}} \right) \ln(K_{m0} + K_{m1}\tilde{m}) + \sum_{i=0}^{2N+14} \tilde{F}_i^{x^{(1)}} \tilde{m}^i + \sum_{i=0}^{N+1} F_i^{x^{(1)}} m^i (i \ln m - 1) \quad (74)$$

式中: $F_{\ln}^{x^{(1)}}$ 、 $\tilde{F}_i^{x^{(1)}}$ 和 $F_i^{x^{(1)}}$ 为多项式系数。

5.2.5 地心距一阶解

式 (40) 中含有 $\sin \gamma^{(0)}$ 项, 结合式 (46) 可知其积分后无法得到解析解, 因此需要先对其进行近似:

$$\sin \gamma^{(0)} \approx \tilde{Q}_{\sin \gamma}^{(0)} = \sum_{i=0}^N \tilde{k}_i^{\sin \gamma^{(0)}} \tilde{m}^i \quad (75)$$

将式 (44)、式 (46)、式 (61)、式 (68)、式 (70) 和式 (75) 代入式 (40), 可以获得与航程一阶微分方程形式类似的表达式, 采用相同的推导方法, 将 $R^{(1)}$ 分解为 $R_1^{(1)}$ 和 $R_2^{(1)}$ 两部分, 其表达式分别为

$$\frac{dR_1^{(1)}}{dm} = \sum_{i=0}^{2N+13} \tilde{f}_i^{R^{(1)}} \tilde{m}^i + \frac{\sin \hat{\gamma}^* - \hat{\gamma}^* \cos \hat{\gamma}^*}{q_m} \cdot (F_{\ln}^{V^{(0)}} - F_{\ln}^{V^{(1)}}) \ln(K_{m0} + K_{m1}\tilde{m}) \quad (76)$$

$$\frac{dR_2^{(1)}}{dm} = \ln(K_{m0} + K_{m1}\tilde{m}) \sum_{i=0}^N \tilde{f}_{\ln,i}^{R^{(1)}} \tilde{m}^i \quad (77)$$

与式 (66) 处理类似, 对式 (77) 先使用式 (53) 的转换关系可得

$$\frac{dR_2^{(1)}}{dm} = \ln m \sum_{i=0}^N f_{\ln,i}^{R^{(1)}} m^i \quad (78)$$

分别对式 (76) 和式 (78) 积分, 二者求和可得地心距一阶解:

$$R^{(1)} = R_1^{(1)} + R_2^{(1)} = F_{\ln}^{R^{(1)}} \left(\tilde{m} + \frac{K_{m0}}{K_{m1}} \right) \ln(K_{m0} + K_{m1}\tilde{m}) + \sum_{i=0}^{2N+14} \tilde{F}_i^{R^{(1)}} \tilde{m}^i + \sum_{i=0}^{N+1} F_i^{R^{(1)}} m^i (i \ln m - 1) \quad (79)$$

式中: $F_{\ln}^{R^{(1)}}$ 、 $\tilde{F}_i^{R^{(1)}}$ 和 $F_i^{R^{(1)}}$ 为多项式系数。

6 结果与讨论

6.1 阶次分析

在本节中, 为了说明一阶解的必要性, 将对比零阶解和一阶解的结果, 并以数值弹道仿真作为基准。以米诺陶 IV 运载火箭^[19]的第一级为飞行器模型, 仿真的初始条件为: 初始航程 $x_0 = 840$ m; 初始高度 $H_0 = 6\,520$ m; 初始速度 $v_0 = 472$ m/s; 初始弹道倾角 $\gamma_0 = 79^\circ$; 初始质量 $m_0 = 77\,937$ kg; 质量流量 $q_m = 797.2$ kg/s; 真空推力 $P_0 = 2\,204.5$ kN; 发动机工作时间为 43 s; 仿真攻角剖面参数为 $c_0 = -6.968\,3$; $c_1 = 4.086\,4 \times 10^{-4}$; $c_2 = -7.752\,0 \times 10^{-9}$; $c_3 = 4.691\,0 \times 10^{-14}$, 如图 2 所示。仿真结果曲线如图 3 所示。表 1 展示了终端误差及计算效率。其中, 数值仿真结果是对式 (1) ~ 式 (7) 采用四阶龙格库塔法进行数值积分得到的。在弹道仿真中, 使用 USSA—1976 标准大气模型^[20]。

随着发动机工作, 火箭质量逐渐减小, 因此在

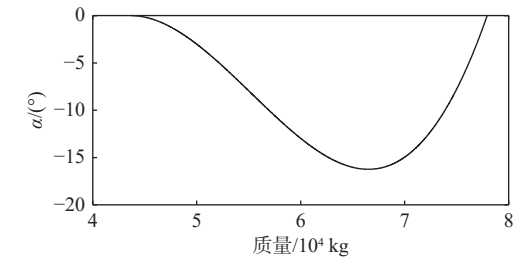


图2 算例一攻角剖面

Fig. 2 AOA profile for case 1

图 2 和图 3 中, 曲线右端点是初始状态, 左端点是终端状态。由图 2 可知, 攻角剖面满足初始和终端时刻收敛到零的要求, 符合工程实际规律。从表 1 的结果可以看出, 一阶近似解的终端误差均小于零阶近似解。针对弹道倾角和高度而言, 一阶近似解的修正更加明显。针对速度而言, 由于零阶近似解的精度已经较高, 一阶近似解的精度提升并不明显。但即使较小的助推段关机点速度误差也会导致较大的落点误差, 因此使用一阶解修正是有意义的。从计算时间上看, 解析解的计算时间比数值仿真低 4 个数量级, 极大地提高了助推段弹道预测的效率。一阶解的计算时间约为零阶解的二倍。即使如此, 与一阶解析解精度提升的意义相比, 其计算效率降低的不足是完全可以承受的。

6.2 不同助推段解析解对比

为了展示本文解析解的优势, 将其与现有的主动段解析解进行对比, 分别是文献 [13] 和文献 [14] 中的解析解。为了更全面地验证运载火箭的实际工作场景, 本文算例中使用与前文不同的初始条件。以米诺陶 IV 运载火箭的第三级为飞行器模型, 仿真初始条件为: 初始航程 $x_0 = 11\,640\text{ m}$; 初始高度 $H_0 = 45\,500\text{ m}$; 初始速度 $v_0 = 1\,600\text{ m/s}$; 初始弹道倾角 $\gamma_0 = 72^\circ$; 初始质量 $m_0 = 39\,380.2\text{ kg}$; 质量流量 $q_m = 403.7\text{ kg/s}$; 真空推力 $P_0 = 1\,223.3\text{ kN}$; 发动机工作时间为 61 s ; 攻角剖面参数: $c_0 = -2.071\,3$, $c_1 = 3.788\,3 \times 10^{-4}$, $c_2 = -2.087\,6 \times 10^{-8}$, $c_3 = 3.197\,5 \times 10^{-13}$, 如图 4 所示。仿真对比结果如图 5 所示。

表 1 算例一解析解终端误差及计算时间

Table 1 Terminal results and computing time for case 1

速度/(m·s ⁻¹)			速度相对误差1/%		速度相对误差2/%	弹道倾角/(°)			弹道倾角相对误差1/%		弹道倾角相对误差2/%
数值仿真	$x^{(0)}$	$x^{(0)} + x^{(1)}$				数值仿真	$x^{(0)}$	$x^{(0)} + x^{(1)}$			
1 609.5	1 607.6	1 607.9	-0.120 2		-0.098 9	41.728 4	43.475 6	41.435 4	4.187 0		-0.702 3
航程/km			航程相对误差1/%		航程相对误差2/%	高度/km			计算时间/s		
数值仿真	$x^{(0)}$	$x^{(0)} + x^{(1)}$				数值仿真	$x^{(0)}$	$x^{(0)} + x^{(1)}$	数值仿真	$x^{(0)}$	$x^{(0)} + x^{(1)}$
24.507 8	24.995 0	24.819 7	1.988 0	1.272 8	37.833 5	39.671 7	37.869 5	4.858 6	0.819 4	1.563 4×10 ⁻⁵	3.472 0×10 ⁻⁵

注: 相对误差1是 $x^{(0)}$ 相对数值仿真的误差; 相对误差2是 $x^{(0)}+x^{(1)}$ 相对数值仿真的误差。

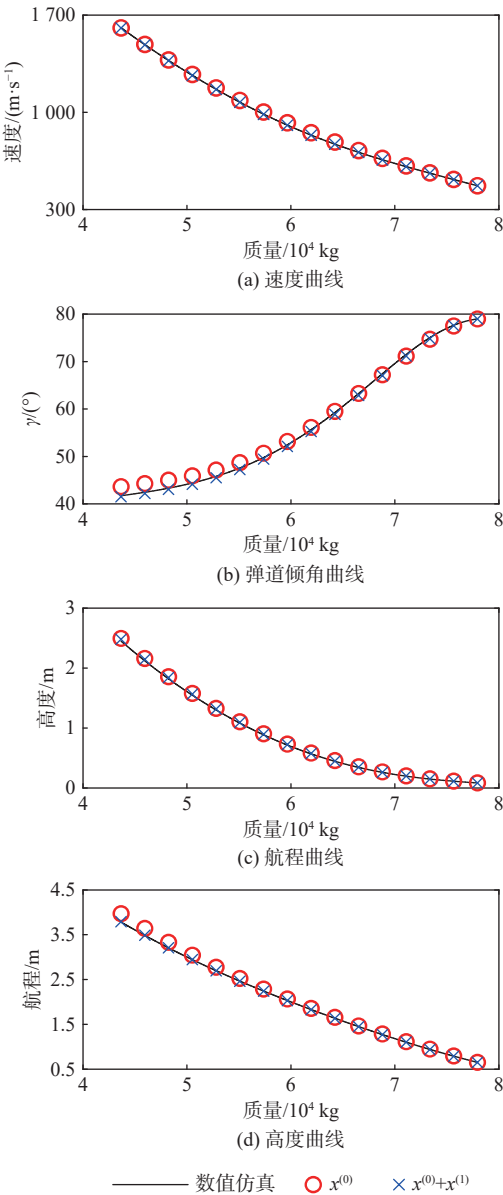


图3 算例一解析解精度对比

Fig. 3 Analytical solution results and trajectory simulation for case 1

文献 [13] 中的解析解是基于零攻角假设推导的, 因此在弹道倾角和高度上均有最大误差。在大攻角场景中, 文献 [13] 中解析解的弹道倾角误差达到 40° , 高度误差达到 54 km 。这对于助推段弹道预

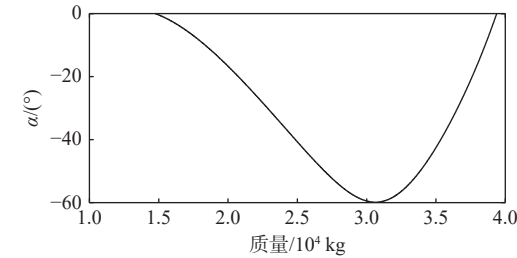
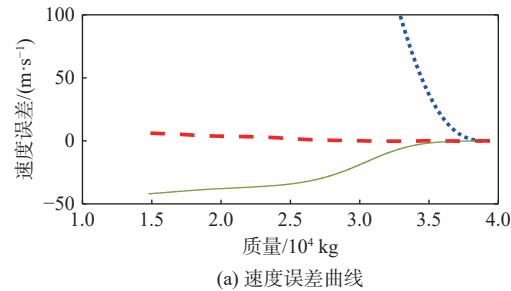
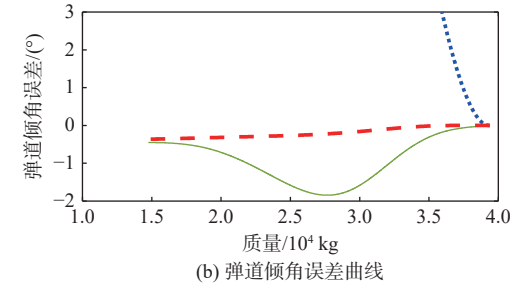


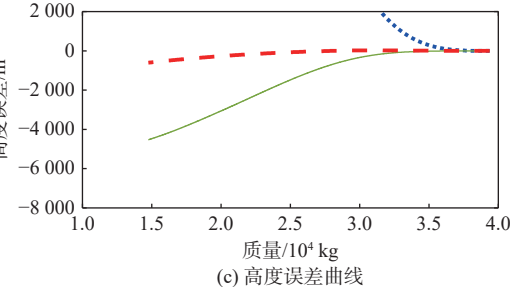
图4 算例二攻角剖面
Fig. 4 AOA profile for case 2



(a) 速度误差曲线



(b) 弹道倾角误差曲线



(c) 高度误差曲线

..... 现有解析解^[13] ——— 现有解析解^[14] - - - 本文解析解

图5 算例二不同解析解误差对比

Fig. 5 Errors in different analytical solutions for case 2

测问题而言,是不可接受的结果。针对速度而言,文献 [13] 中解析解的速度误差也会超过 400 m/s。因此,针对助推段弹道预测的问题,文献 [13] 中的解析解并不适合绝大多数场景。

虽然文献 [14] 中解析解弹道倾角的终端误差与本文解析解基本一致,但中间时刻的误差会显著大于本文解析解。本文解析解在速度和高度上的误差远小于文献 [14] 中的解析解,终端精度至少可以提升 85%。

为了进一步验证本文提出的解析解对不同初始条件和不同量级攻角剖面的适应性,采用新的算

例对本文解析解、文献 [13] 和文献 [14] 的解析解进行对比分析。仿真对象为米诺陶 IV 运载火箭的第三级,初始条件为:初始航程 $x_0 = 12\,000\text{ m}$; 初始高度 $H_0 = 34\,000\text{ m}$; 初始速度 $v_0 = 1\,826\text{ m/s}$; 初始弹道倾角 $\gamma_0 = 60^\circ$ 。图 6 展示了攻角剖面,由图可知,此算例中运载火箭以小攻角飞行。仿真结果曲线见图 7,即使在小攻角情况下,本文解析解的预测精度也明显高于现有的两种解析解,终端精度至少可以提升 89%。

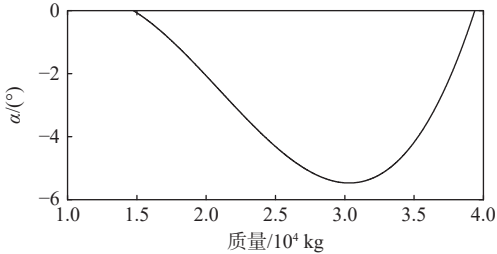
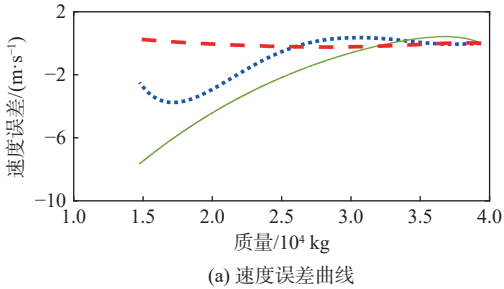
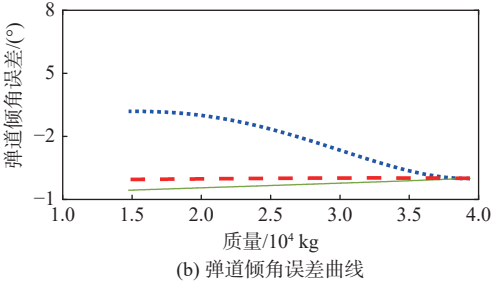


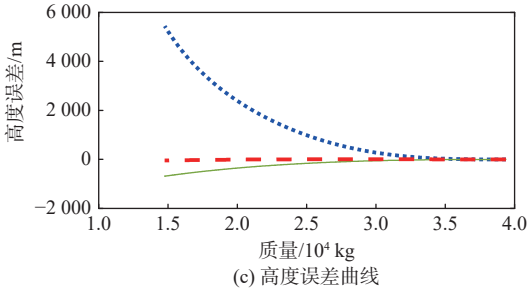
图6 算例三攻角剖面
Fig. 6 AOA profile of case 3



(a) 速度误差曲线



(b) 弹道倾角误差曲线



(c) 高度误差曲线

..... 现有解析解^[13] ——— 现有解析解^[14] - - - 本文解析解

图7 算例三不同解析解误差对比

Fig. 7 Errors in different analytical solutions for case 3

7 结 论

本文针对大攻角下运载火箭助推段在线快速

预测困难的问题, 基于摄动法近似求解大攻角剖面下高度非线性的助推段动力学模型, 得到了高精度的弹道解析解, 仿真结果表明:

1) 一阶解析解的最大相对误差不超过 1.28%, 计算时间与数值仿真相比降低了 4 个数量级, 大幅提升了运载火箭助推段弹道预测的速度和精度。

2) 在大攻角机动飞行的条件下, 所提出的解析解在速度、高度和弹道倾角上的精度与现有解析解相比至少提升了 85%。

在今后的研究中, 可以基于该高精度弹道解析解设计能够在线应用的运载火箭助推段制导方法, 当存在状态偏差时能在保证终端约束的前提下满足多种复杂约束条件。

参考文献 (References)

[1] 马树微, 李静琳, 陈曦, 等. 多级固体运载火箭分级多学科设计优化[J]. 北京航空航天大学学报, 2016, 42(3): 542-550.
MA S W, LI J L, CHEN X, et al. Stage-wise multidisciplinary design optimization for multi-stage solid launch vehicle[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2016, 42(3): 542-550 (in Chinese).

[2] 程晓明, 尚腾, 徐帆, 等. 基于序列凸规划的运载火箭轨迹在线规划方法[J]. 宇航学报, 2021, 42(2): 202-210.
HENG X M, SHANG T, XU F, et al. Online trajectory planning for launch vehicles with successive convex programming[J]. Journal of Astronautics, 2021, 42(2): 202-210 (in Chinese).

[3] CHENG X M, LI H F, ZHANG R. Efficient ascent trajectory optimization using convex models based on the Newton-Kantorovich/pseudospectral approach[J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 66: 140-151.

[4] SUN Z X, CHAO T, WANG S Y, et al. Convex method for ascent trajectory optimization using iterative narrowing trust region[C]// Proceedings of the 2018 IEEE CSAA Guidance, Navigation and Control Conference. Piscataway: IEEE Press, 2018: 1-6.

[5] PRABHAKAR N, KUMAR I, TATA SK, et al. A predictive explicit guidance scheme for ballistic missiles[J]. Defence Science Journal, 2013, 63(5): 456-461.

[6] CAO R, LIU Y B, LU Y P. Robust multiple model predictive control for ascent trajectory tracking of aerospace vehicles[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2022, 58(2): 1333-1351.

[7] 李惠峰, 谢陵. 基于预测校正方法的 RLV 再入制导律设计[J]. 北京航空航天大学学报, 2009, 35(11): 1344-1348.
LI H F, XIE L. Reentry guidance law design for RLV based on predictor-corrector method[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2009, 35(11): 1344-1348 (in Chinese).

[8] YU W B, CHEN W C, JIANG Z G, et al. Omnidirectional autonomous entry guidance based on 3-D analytical glide formulas[J]. ISA Transactions, 2016, 65: 487-503.

[9] YU W B, CHEN W C, JIANG Z G, et al. Analytical entry guidance for no-fly-zone avoidance[J]. Aerospace Science and Technology, 2018, 72: 426-442.

[10] SPRENGER A R, JAHANSHAH S, IVLEV A V, et al. Time-dependent inertia of self-propelled particles: the Langevin rocket[J]. Physical Review E, 2021, 103(4): 042601.

[11] 胡锦涛. 高超声速飞行器平稳滑翔弹道特性及全程弹道规划与制导方法研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2015.
HU J C. Research on steady-glide trajectory characteristics and algorithm design of trajectory planning and explicit guidance for hypersonic vehicle[D]. Beijing: Beihang University, 2015(in Chinese).

[12] ZHAO S L, CHEN W C, YANG L. Endoatmospheric ascent optimal guidance with analytical nonlinear trajectory prediction[J]. International Journal of Aerospace Engineering, 2022, 2022(1): 5729335.

[13] ZHANG Q, XU Z. Autonomous ascent guidance with multiple terminal constraints for all-solid launch vehicles[J]. Aerospace Science and Technology, 2020, 97: 105633.

[14] YU Q, CHEN W C, YU W B. Approximate analytical solutions for launch-vehicle ascent trajectory[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2023, 59(4): 4033-4048.

[15] VEPA R. Flight dynamics, simulation, and control: for rigid and flexible aircraft[M]. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2023.

[16] YU W B, CHEN W C, JIANG Z G, et al. Analytical entry guidance based on pseudo-aerodynamic profiles[J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 66: 315-331.

[17] 孙勇强, 佟明羲, 王鹏飞, 等. 国外固体运载火箭主动力系统发展研究[J]. 宇航总体技术, 2022, 6(4): 56-64.
SUN Y Q, TONG M X, WANG P F, et al. Research on the development of the main propulsion system of foreign solid launch vehicles[J]. Astronautical Systems Engineering Technology, 2022, 6(4): 56-64(in Chinese).

[18] 陈克俊, 刘鲁华, 孟云鹤. 远程火箭飞行动力学与制导[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014.
CHEN K J, LIU L H, MENG Y H. Launch vehicle flight dynamics and guidance[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2014(in Chinese).

[19] NORTHROP GRUMMAN INNOVATION SYSTEMS. Minotaur IV•V•VI User's Guide[EB/OL]. (2023-07-30)[2013-06-09]. <https://www.manualsdir.com/manuals/569830/orbital-minotaur-ri-mibotaur-v-minotaur-iv.html>.

[20] 陈赞. 运载火箭助推段轨迹优化与制导方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2019.
CHEN B. Research on trajectory optimization and guidance method for the booster of launching vehicle[D]. Wuhan: HuaZhong University of Science and Technology, 2019(in Chinese).

Analytical solutions for ascent trajectory under high angle-of-attack conditions

ZHANG Keyang¹, WANG Peng², YU Qi¹, YU Wenbin^{1,*}, CHEN Wanchun¹

(1. School of Astronautics, Beihang University, Beijing 102206, China;
2. Beijing Institute of Aerospace Systems Engineering, Beijing 100076, China)

Abstract: To rapidly predict the ascent trajectory of launch vehicles, high-accuracy analytical solutions for ascent trajectory were proposed under high angle-of-attack (AOA) conditions. First, a simplified longitudinal-plane dynamics model with mass as the independent variable was developed. The sine of AOA was innovatively expressed as a polynomial of mass. Due to the high AOA, the simplified dynamics model remains highly nonlinear, which prevents it from being analytically solved directly. Approximate polynomials are introduced to replace the strongly nonlinear but relatively small terms in the original equations through force analysis. Furthermore, the difference between the true values and the approximations was treated as a minor perturbation. The dynamics model was divided into analytically solvable subsystems according to the perturbation theory. Analytical solutions for velocity, flight-path angle, downrange, and altitude were derived by solving the subsystems. Simulation results confirm that the proposed solutions are at least 85% more accurate than existing solutions under high AOA conditions.

Keywords: analytical solution; ascent trajectory; high angle of attack; launch vehicle; perturbation method