

# 斜扩散过程的构造、性质及其应用

献给王梓坤教授 90 华诞

王永进<sup>1\*</sup>, 徐光利<sup>2</sup>, 宋世禹<sup>3</sup>

1. 南开大学数学科学学院, 天津 300071;  
2. 对外经济贸易大学统计学院, 北京 100029;  
3. 天津大学数学学院, 天津 300350  
E-mail: yjwang@nankai.edu.cn, xuguangli@uibe.edu.cn, songshiyunk@aliyun.com

收稿日期: 2018-03-14; 接受日期: 2018-05-02; 网络出版日期: 2019-02-22; \* 通信作者  
国家自然科学基金(批准号: 11631004 和 71532001)资助项目

**摘要** 斜扩散过程是一类特殊的扩散过程, 它所满足的随机微分方程中含有局部时项. 由于这类过程具有特殊的路径性质, 使得它在物理和生物等领域有着广泛的应用. 本文先从斜 Brown 运动出发, 概括总结了斜 Brown 运动的两种构造方式、离散逼近形式和联合概率分布. 在斜 Brown 运动的基础上, 本文给出斜 Ornstein-Uhlenbeck (OU) 过程和斜分支过程的定义, 并展示了它们的诸如转移密度、首达时分布等概率性质. 最后介绍了斜扩散过程的一些应用.

**关键词** 斜 Brown 运动 斜 OU 过程 斜分支过程 期权定价

**MSC (2010) 主题分类** 60J55, 60J60

## 1 引言

自从 Itô 和 McKean<sup>[1]</sup>于 1965 年提出斜 Brown 运动的概念以来, 斜扩散过程就引起了学者们的广泛关注. 目前已经有不少研究斜扩散过程理论性质的文献. 其中, 1978 年, Walsh<sup>[2]</sup>利用尺度函数与速度函数从扩散过程的角度构造了斜 Brown 运动; 1981 年, Harrison 和 Shepp<sup>[3]</sup>建立了斜 Brown 运动与带有局部时项的随机微分方程之间的联系, 这个结果方便了人们从随机微分方程的角度来研究斜 Brown 运动. 1984 年, Le Gall<sup>[4]</sup>研究了一般的带有局部时项的随机偏微分方程的解的相关结果; 2007 年, Lejay<sup>[5]</sup>给出了斜 Brown 运动的相关构造. 此外, Bass 和 Chen<sup>[6]</sup>放松了文献 [4] 中对扩散项系数的限制, 得到了更广泛的解的存在唯一性结论, 并给出了比较原理.

在斜过程的理论研究中, Appuhamillage 和 Sheldon<sup>[7]</sup>利用游程理论计算出斜 Brown 运动的首中时; Abundo<sup>[8]</sup>用数值的方法近似得到了斜过程末离时的分布特征. 此外, 斜过程的理论研究还包括文献 [9–15]. 斜扩散过程不仅有很好的理论结果, 而且还有很强的应用背景. 例如, 它可以用来描述物理

英文引用格式: Wang Y J, Xu G L, Song S Y. The analysis and property of two classes of skew Markov processes (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 535–552, doi: 10.1360/N012018-00057

实验中物质在不均匀介质下的扩散运输, 如文献 [16–18]. 另外, 它在天体物理学、生态学和地球物理学都有重要的应用. 关于这方面的介绍, 读者可参见文献 [19–22] 等.

本文主要对斜扩散过程的以下三个方面的研究进行总结:

- (i) 斜 Brown 运动的构造、逼近及相关的概率分布;
- (ii) 斜 OU 过程和斜分支过程的基本概率性质, 如转移密度的显式表达等;
- (iii) 斜过程在金融衍生品定价中的应用.

## 2 斜 Brown 运动

斜 Brown 运动是最简单、也是相关结果最丰富的斜扩散过程. 本节主要给出斜 Brown 运动的两种构造方式及相关性质. 下面对其分别进行介绍.

### 2.1 斜 Brown 运动的构造

斜 Brown 运动的构造有两种方法, 第一种是由 Itô 和 McKean<sup>[1]</sup> 基于游程理论给出的; 第二种是 Walsh<sup>[2]</sup> 利用尺度和速度函数构造的.

#### 2.1.1 Itô 和 McKean 的构造—基于游程理论

假设  $\{W_t, t \geq 0\}$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上的标准 Brown 运动,  $J_1, J_2, \dots$  表示反射过程  $\{|W_t|, t \geq 0\}$  的游程区间. 对任意的  $\alpha \in (0, 1)$ , 设  $\{A_m^{(\alpha)}\}_{m=1}^{\infty}$  是一列取值为  $\pm 1$  的独立同分布的 Bernoulli 随机变量, 满足  $\mathbb{P}(A_m^{(\alpha)} = 1) = \alpha$ . Itô 和 McKean 定义

$$X_t^{(\alpha)} = \sum_{m=1}^{\infty} 1_{J_m}(t) A_m^{(\alpha)} |W_t| \quad (2.1)$$

为从 0 点开始的  $\alpha$ - 斜 Brown 运动  $\{X_t^{(\alpha)}, t \geq 0\}$  (其中  $1_S$  表示集合  $S$  的示性函数), 并指出它是扩散过程, 其尺度函数  $S(x)$  和速度测度  $m(dx)$  分别为

$$S(dx) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{\alpha}x, & x \geq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$m(dx) = \begin{cases} 2(1-\alpha)dx, & x \leq 0, \\ 2\alpha dx, & x \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

由定义 (2.1) 知,  $\alpha$ - 斜 Brown 运动碰到 0 点时, 会以  $\alpha$  的概率向上反射, 以  $1 - \alpha$  的概率向下反射.

#### 2.1.2 Walsh 的构造—利用尺度和速度函数

本节构造斜 Brown 运动使其尺度函数  $S(x)$  和速度测度  $m(dx)$  如 (2.2) 和 (2.3) 所示.

定义

$$M_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma(W_s)} dW_s,$$

$$\sigma(y) = \frac{1}{\alpha}1_{\{y \geq 0\}} + \frac{1}{1-\alpha}1_{\{y < 0\}}.$$

对任意的  $0 \leq t < \infty$ , 定义停时  $T(t) = \inf\{s \geq 0, \langle M \rangle_s > t\}$ , 则下面的随机微分方程:

$$Y_t = y + \int_0^t \sigma(Y_s) dW_s$$

的一个强解是  $Y_t = y + W_{T(t)}$ .

设  $r(x)$  为  $S(x)$  的反函数:

$$r(x) = \begin{cases} (1-\alpha)x, & x < 0, \\ \alpha x, & x \geq 0. \end{cases}$$

令  $X_t^{(\alpha)} = r(Y_t)$ , 则  $S(x)$  是  $X_t^{(\alpha)}$  的尺度函数, 且它的速度测度为  $m(dx)$ , 因此,  $X_t^{(\alpha)}$  为斜 Brown 运动. 进一步地, 由对称 Itô-Tanaka 公式可知,

$$r(Y_t) = r(y) + W_s + \frac{2\alpha - 1}{2} L_t^Y(0),$$

其中  $L_t^Y(0)$  为过程  $Y_t$  在 0 点的对称局部时. 同时, 我们有

$$\begin{aligned} |X_t^{(\alpha)}| &= \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^{(\alpha)}) dX_s^{(\alpha)} + L_t^{X^{(\alpha)}}(0) \\ &= \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^{(\alpha)}) dW_s + L_t^{X^{(\alpha)}}(0), \\ |r(Y_t)| &= \int_0^t \operatorname{sgn}(Y_s) r'(Y_s) dY_s + \frac{1}{2} L_t^Y(0) \\ &= \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^{(\alpha)}) dW_s + \frac{1}{2} L_t^Y(0), \end{aligned}$$

其中

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

所以,

$$L_t^{X^{(\alpha)}}(0) = \frac{1}{2} L_t^Y(0),$$

进而  $X_t^{(\alpha)}$  满足的随机微分方程为

$$dX_t^{(\alpha)} = dW_s + (2\alpha - 1) dL_t^{X^{(\alpha)}}(0).$$

## 2.2 用随机游走离散逼近斜 Brown 运动

下面以斜 Brown 运动为例, 给出其由随机游走离散逼近的相关结果 (参见文献 [3]).

令  $S_0 = 0$ , 且  $\{S_0, S_1, \dots\}$  为取值为整数的 Markov 链, 其转移概率为

$$\mathbb{P}\{S_{k+1} = S_k + 1 \mid S_0, \dots, S_k\} = \begin{cases} 1 - \alpha, & \text{若 } S_k = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{其他,} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\mathbb{P}\{S_{k+1} = S_k - 1 \mid S_0, \dots, S_k\} = \begin{cases} \alpha, & \text{若 } S_k = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{其他,} \end{cases} \quad (2.5)$$

则对任意的  $t$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $n^{-1/2}S_{[nt]}$  弱收敛到  $\alpha$ - 斜 Brown 运动.

**注 1** 在证明  $n^{-1/2}S_{[nt]}$  的收敛性时, 注意到

$$\mathbb{P}(S_k = m) = \begin{cases} \alpha P(|S_k| = m), & \text{若 } m > 0, \\ (1 - \alpha)P(|S_k| = |m|), & \text{若 } m < 0, \end{cases}$$

那么可以得到

$$\mathbb{E}\{\exp(i\rho n^{-1/2}S_{[nt]})\} = \alpha\psi_n(\rho) + (1 - \alpha)\psi_n(-\rho), \quad (2.6)$$

其中

$$\psi_n(\rho) = \mathbb{E}\{\exp(i\rho n^{-1/2}|S_{[nt]}|)\}. \quad (2.7)$$

同时, 根据 Walsh<sup>[2]</sup> 的结论, 可以计算出

$$\mathbb{E}\{\exp(i\rho X_t^{(\alpha)})\} = \alpha\psi(\rho) + (1 - \alpha)\psi(-\rho), \quad (2.8)$$

其中

$$\psi(\rho) = \mathbb{E}\{\exp(i\rho |X_t^{(\alpha)}|)\}. \quad (2.9)$$

利用随机游走理论, 立即可以得到  $n^{-1/2}|S_{[nt]}|$  弱收敛到  $|X_t^{(\alpha)}|$ , 从而, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\psi_n(\rho) \rightarrow \psi(\rho)$ . 因此,  $n^{-1/2}S_{[nt]}$  依分布收敛到  $X_t^{(\alpha)}$ , 进一步可推出  $X_t^{(\alpha)}$  是  $n^{-1/2}S_{[nt]}$  的弱收敛极限.

### 2.3 关于斜 Brown 运动的联合概率分布

记

$$\Gamma_t^{(\alpha)} = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^{(\alpha)} \geq 0\}} ds$$

为  $[0, t]$  时间段内  $X_t^{(\alpha)}$  大于或等于 0 的总时间 (占位时). 以下定理给出了斜 Brown 运动  $X_t^{(\alpha)}$ 、其对称局部时  $L_t^{X^{(\alpha)}}(0)$  和占位时  $\Gamma_t^{(\alpha)}$  三者的联合概率分布, 参见文献 [16].

**定理 1** 定义两个函数

$$h(t, x) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad \phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad (2.10)$$

其中  $t > 0$  并且  $x \in \mathbb{R}$ , 则

(1) 当  $y \geq 0, l > 0, 0 < \tau < t$  时,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_x(W_t^{(\alpha)} \in dy, L_t^{W^{(\alpha)}}(0) \in dl, \Gamma_t^{(\alpha)} \in d\tau) \\ &= \begin{cases} 2\alpha h(t - \tau; (1 - \alpha)l)h(\tau; \alpha l + y + x)dydld\tau, & x \geq 0, \\ 2\alpha h(t - \tau; (1 - \alpha)l - x)h(\tau; \alpha l + y)dydld\tau, & x \leq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 当  $y \leq 0, l > 0, 0 < \tau < t$  时,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_x(W_t^{(\alpha)} \in dy, L_t^{W^{(\alpha)}}(0) \in dl, \Gamma_t^{(\alpha)} \in d\tau) \\ &= \begin{cases} 2(1-\alpha)h(t-\tau; (1-\alpha)l-y)h(\tau; \alpha l+x)dydld\tau, & x \geq 0, \\ 2(1-\alpha)h(t-\tau; (1-\alpha)l-y-x)h(\tau; \alpha l)dydld\tau, & x \leq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

(3) 当  $x \geq 0, y > 0$  时,

$$\mathbb{P}_x(W_t^{(\alpha)} \in dy, L_t^{W^{(\alpha)}}(0) = 0, \Gamma_t^{(\alpha)} = t) = \phi(t, y-x) - \phi(t, y+x);$$

(4) 当  $x \leq 0, y < 0$  时,

$$\mathbb{P}_x(W_t^{(\alpha)} \in dy, L_t^{W^{(\alpha)}}(0) = 0, \Gamma_t^{(\alpha)} = 0) = \phi(t, y-x) - \phi(t, y+x).$$

### 3 斜 OU 过程

OU 过程是一类重要而且最常用的 Markov 过程. 它常被用来模拟金融市场的利率动态 (即 Vasicek 模型). 更重要的是, (i) OU 过程具有均值回复性; (ii) OU 过程是一个 Gauss 过程, 它的转移密度和首达时分布都有清晰的解析表达式; (iii) OU 过程的参数可以比较容易地从市场数据中校准出来. 因此, 我们把 OU 过程进一步推广到含有斜点的情形, 并给出斜 OU 过程的定义及一些基本概率性质.

**定义 1** 称  $X_t^{(1)}$  为斜 OU 过程, 若它满足如下的随机微分方程:

$$dX_t^{(1)} = (\mu - aX_t^{(1)})dt + \sigma dW_t + \beta dL_t^{X^{(1)}}(0), \quad |\beta| \leq 1, \quad a > 0, \quad \sigma > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

其中  $W_t$  是关于概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上过滤  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  的标准 Brown 运动,  $L_t^{X^{(1)}}(0)$  是  $X_t^{(1)}$  在 0 点的对称局部时.

令  $p = (1+\beta)/2$ . 图 1 给出了三种不同  $p$  值下的斜 OU 过程的路径轨道图. 事实上, 当过程碰到 0 时, 会以  $p$  的概率向上反射, 以  $1-p$  的概率向下反射.

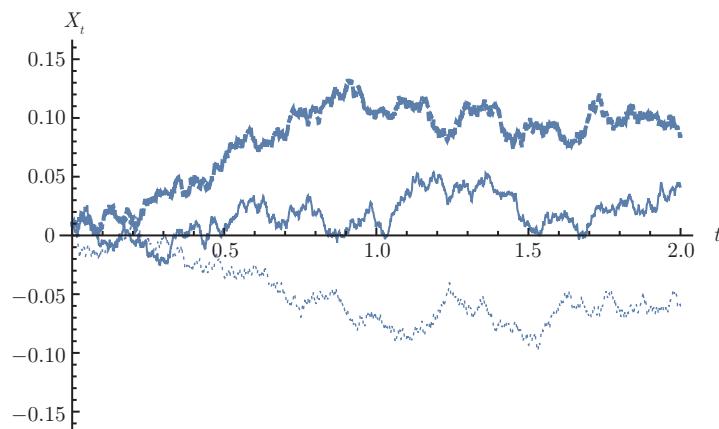


图 1 斜 OU 过程在三种不同  $p$  值下可能的轨道. 相同的参数设置是  $\mu = 0.005$ ,  $a = 0.2$ ,  $\sigma = 0.057$  和  $x_0 = 0.01$ . 从细到粗的三条路径分别表示  $p$  取值 0.2、0.5 和 0.8

### 3.1 转移密度及首达时分布的闭解形式

方程 (3.1) 的解的存在唯一性的证明可以在文献 [13] 中找到. 这里主要给出斜 OU 过程的一些性质. 在此之前, 先给出如下函数定义:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \begin{cases} \frac{1+\beta}{2}, & x < 0, \\ \frac{1-\beta}{2}, & x \geq 0, \end{cases} \\ G_1(x) &= \begin{cases} \frac{(1+\beta)x}{2}, & x < 0, \\ \frac{(1-\beta)x}{2}, & x \geq 0, \end{cases} \\ \varsigma_1(x) &= \begin{cases} \exp\left[\frac{(2ax-(1+\beta)\mu)^2}{a\sigma^2(1+\beta)^2}\right], & x < 0, \\ \exp\left[\frac{(2ax-(1-\beta)\mu)^2}{a\sigma^2(1-\beta)^2}\right], & x \geq 0, \end{cases} \\ m_1(x) &= \begin{cases} \frac{8}{\varsigma_1(x)\sigma^2(1+\beta)^2}, & x < 0, \\ \frac{8}{\varsigma_1(x)\sigma^2(1-\beta)^2}, & x \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

其中  $\varsigma_1(x)$  和  $m_1(x)$  分别为  $X_t^{(1)}$  的速度密度和尺度密度. 另有如下符号定义:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1+\beta}{2a}\mu, \quad \theta_2 = \frac{1-\beta}{2a}\mu, \quad \sigma_1 = \frac{1+\beta}{2}\sigma, \quad \sigma_2 = \frac{1-\beta}{2}\sigma, \\ z_1 &= \frac{\sqrt{2a}}{\sigma_1}(x - \theta_1), \quad z_2 = \frac{\sqrt{2a}}{\sigma_2}(x - \theta_2), \\ \alpha_1 &= -\frac{\sqrt{2a}}{\sigma_1}\theta_1, \quad \alpha_2 = -\frac{\sqrt{2a}}{\sigma_2}\theta_2, \quad v = \frac{\lambda}{a}, \quad \varrho = -\frac{\mu^2}{a\sigma^2}. \end{aligned}$$

下面给出斜 OU 过程的转移密度.

**命题 1** 斜 OU 过程从  $x_0$  出发经时间  $t$  到达  $x$  的转移密度  $p_1(t; x_0, x)$  为

$$p_1(t; x_0, x) = g_1(x)m_1(G_1(x)) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(G_1(x_0))\varphi_n(G_1(x)),$$

其中当  $n \uparrow \infty$  时, 特征值  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$  是如下 Wronskian 方程的根:

$$\omega(\lambda) = e^\varrho 2^{1-v} v \sqrt{a} \left[ \frac{H_v(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}) H_{v-1}(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}})}{\sigma_2} + \frac{H_{v-1}(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}) H_v(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}})}{\sigma_1} \right],$$

特征函数  $\varphi_n(x)$  满足

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\eta(0, \lambda_n)}{\omega'(\lambda_n)\xi(0, \lambda_n)}} \xi(x, \lambda_n), & x < 0, \\ \text{sign}(\xi(0, \lambda_n)\eta(0, \lambda_n)) \sqrt{\frac{\xi(0, \lambda_n)}{\omega'(\lambda_n)\eta(0, \lambda_n)}} \eta(x, \lambda_n), & x \geq 0, \end{cases}$$

其中  $\xi(x, \lambda) = e^{z_1^2/4} D_v(-z_1)$ ,  $\eta(x, \lambda) = e^{z_2^2/4} D_v(z_2)$ ,  $\text{sign}(x)$  是符号函数, 其定义为

$$\text{sign}(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \leq 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

$D_v(z)$  和  $H_v(z)$  分别是抛物柱面函数和 Hermite 函数 (参见文献 [23]).

**证明** 我们主要是利用扩散过程的谱展开理论, 详细证明参见文献 [13].  $\square$

下面考虑斜 OU 过程的首达时问题. 假设  $X_t^{(1)}$  满足方程 (3.1), 由对称 Itô-Tanaka 公式可知, 过程  $Y_t^{(1)} = G_1(X_t^{(1)})$  满足

$$dY_t^{(1)} = \begin{cases} a(\theta_1 - Y_t^{(1)})dt + \sigma_1 dW_t, & Y_t^{(1)} < 0, \\ a(\theta_2 - Y_t^{(1)})dt + \sigma_2 dW_t, & Y_t^{(1)} \geq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

定义

$$\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(1)} = \inf \{t \geq 0; X_t^{(1)} = x\} \quad (x_0 \leq x)$$

为斜 OU 过程  $X_t^{(1)}$  从状态  $x_0$  出发向上首达  $x$  的时刻,

$$\hat{T}_{y_0 \uparrow y}^{(1)} = \inf \{t \geq 0; Y_t^{(1)} = y\} \quad (y_0 \leq y)$$

为过程  $Y_t^{(1)}$  从状态  $y_0$  出发向上首达  $y$  的时刻, 利用  $X_t^{(1)}$  与  $Y_t^{(1)}$  的一一对应关系, 有

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(1)} \leq t) = \mathbb{P}(\hat{T}_{G_1(x_0) \uparrow G_1(x)}^{(1)} \leq t).$$

为了方便书写, 令

$$y_1^0 = G_1(x_0), \quad y_1 = G_1(x), \quad \beta_1 = \frac{\sqrt{2a}}{\sigma_1}(y_1 - \theta_1), \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{2a}}{\sigma_2}(y_1 - \theta_2).$$

**定理 2** (向上首达) **情形 1**  $y_1 > 0$ . 斜 OU 过程  $X_t^{(1)}$  从  $x_0$  出发向上首达  $x$  时刻的分布  $\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(1)} \leq t)$  的级数展开如下:

$$\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(1)} \leq t) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,x} e^{-\lambda_{n,x} t} \varphi_{n,x}(y_1^0),$$

其中当  $n \uparrow \infty$  时, 特征值  $0 \leq \lambda_{1,x} < \lambda_{2,x} < \dots < \lambda_{n,x} \rightarrow \infty$  是下面 Wronskian 方程的根:

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = \exp \left( \varrho + \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_2^2}{4} \right) 2^{-\frac{v}{2}-2} & \left[ \frac{\sqrt{2}\sigma_2}{\sigma_1} v D_{v-1}(-\alpha_1) (E_v^{(1)}(\beta_2) E_v^{(0)}(\alpha_2) \right. \\ & - E_v^{(0)}(\beta_2) E_v^{(1)}(\alpha_2)) - D_v(-\alpha_1) (v E_v^{(1)}(\beta_2) E_{v-1}^{(1)}(\alpha_2) \right. \\ & \left. \left. + 2 E_v^{(0)}(\beta_2) E_{v-1}^{(0)}(\alpha_2)) \right], \end{aligned}$$

特征函数  $\varphi_{n,x}(x)$  为

$$\varphi_{n,x}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\eta(0, \lambda_{n,x})}{\omega'(\lambda_{n,x}) \xi(0, \lambda_{n,x})}} \xi(x, \lambda_{n,x}), & x < 0, \\ \text{sign}(\xi(0, \lambda_{n,x}) \eta(0, \lambda_{n,x})) \sqrt{\frac{\xi(0, \lambda_{n,x})}{\omega'(\lambda_{n,x}) \eta(0, \lambda_{n,x})}} \eta(x, \lambda_{n,x}), & 0 \leq x < y_1, \end{cases}$$

其中

$$\xi(x, \lambda) = e^{\frac{z_1^2}{4}} D_v(-z_1), \quad \eta(x, \lambda) = 2^{-\frac{v}{2}-2} e^{\frac{z_2^2-\beta_2^2}{4}} \frac{\sigma_2}{\sqrt{a}} (E_v^{(1)}(\beta_2) E_v^{(0)}(z_2) - E_v^{(0)}(\beta_2) E_v^{(1)}(z_2)),$$

且系数  $c_{n,x} = -\frac{\varphi'_{n,x}(y_1)}{\lambda_{n,x}\varsigma_1(y_1)}$ ,  $D_v(z)$ 、 $E_v^{(0)}(z)$  和  $E_v^{(1)}(z)$  都是抛物柱面函数 (参见文献 [23]).

**情形 2**  $y_1 \leq 0$ . 斜 OU 过程  $X_t^{(1)}$  从  $x_0$  出发向上首达  $x$  时刻的分布  $\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(1)} \leq t)$  的级数展开与情形 1 相同, 不同的只是 Wronskian 方程变为

$$\omega(\lambda) = -\frac{e^{\frac{\beta_1^2}{4}} D_v(-\beta_1)}{\varsigma_1(y_1)}.$$

**证明** 证明中综合运用了谱展开方法和特殊函数的性质, 详细证明参见文献 [13].  $\square$

向下首达时情形与向上情形类似, 我们把它总结为如下推论.

**推论 1 (向下首达)** **情形 1**  $y_1 \leq 0$ . 斜 OU 过程  $X_t^{(1)}$  从  $x_0$  出发向下首达  $x$  时刻的分布  $\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \downarrow x}^{(1)} \leq t)$  的级数展开如下:

$$\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \downarrow x}^{(1)} \leq t) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,x} e^{-\lambda_{n,x} t} \varphi_{n,x}(y_1^0),$$

其中当  $n \uparrow \infty$  时, 特征值  $0 \leq \lambda_{1,x} < \lambda_{2,x} < \dots < \lambda_{n,x} \rightarrow \infty$  是下面 Wronskian 方程的根:

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = & e^{\rho + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_1^2)/4} 2^{-v/2-2} \left[ \frac{\sqrt{2}\sigma_1}{\sigma_2} v D_{v-1}(\alpha_2) (E_v^{(0)}(\beta_1) E_v^{(1)}(\alpha_1) \right. \\ & - E_v^{(1)}(\beta_1) E_v^{(0)}(\alpha_1)) - D_v(\alpha_2) (v E_v^{(1)}(\beta_1) E_{v-1}^{(1)}(\alpha_1) \\ & \left. + 2 E_v^{(0)}(\beta_1) E_{v-1}^{(0)}(\alpha_1)) \right], \end{aligned}$$

特征函数  $\varphi_{n,x}(x)$  满足

$$\varphi_{n,x}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\eta(0, \lambda_{n,x})}{\omega'(\lambda_{n,x})\xi(0, \lambda_{n,x})}} \xi(x, \lambda_{n,x}), & y_1 < x < 0, \\ \text{sign}(\xi(0, \lambda_{n,x})\eta(0, \lambda_{n,x})) \sqrt{\frac{\xi(0, \lambda_{n,x})}{\omega'(\lambda_{n,x})\eta(0, \lambda_{n,x})}} \eta(x, \lambda_{n,x}), & x \geq 0, \end{cases}$$

其中

$$\xi(x, \lambda) = 2^{-\frac{v}{2}-2} \frac{\sigma_1}{\sqrt{a}} e^{\frac{z_1^2-\beta_1^2}{4}} (E_v^{(0)}(\beta_1) E_v^{(1)}(z_1) - E_v^{(1)}(\beta_1) E_v^{(0)}(z_1)), \quad \eta(x, \lambda) = e^{\frac{z_2^2}{4}} D_v(z_2),$$

且系数  $c_{n,x} = \frac{\varphi'_{n,x}(y_1)}{\lambda_{n,x}\varsigma_1(y_1)}$ .

**情形 2**  $y_1 \geq 0$ . 斜 OU 过程  $X_t^{(1)}$  从  $x_0$  出发向下首达  $x$  时刻的分布  $\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \downarrow x}^{(1)} \leq t)$  的级数展开与情形 1 相同, 只是 Wronskian 方程变为

$$\omega(\lambda) = -\frac{e^{\frac{\beta_2^2}{4}} D_v(\beta_2)}{\varsigma_1(y_1)}.$$

**证明** 详细证明参见文献 [13].  $\square$

### 3.2 首达时的 Laplace 变换

**命题 2** 首达时  $\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(1)}$  和  $\mathcal{T}_{x_0 \downarrow x}^{(1)}$  的 Laplace 变换为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x_0}(e^{-\vartheta \mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(1)}}) &= \frac{I_\vartheta(y_1^0)}{I_\vartheta(y_1)}, \\ \mathbb{E}_{x_0}(e^{-\vartheta \mathcal{T}_{x_0 \downarrow x}^{(1)}}) &= \frac{D_\vartheta(y_1^0)}{D_\vartheta(y_1)}, \end{aligned}$$

其中递增函数  $I_\vartheta(x)$  满足

$$I_\vartheta(x) = \begin{cases} H_{-\chi}\left(-\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right), & x \leq 0, \\ c_1 H_{-\chi}\left(-\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right) + c_2 H_{-\chi}\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right), & x > 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

递减函数  $D_\vartheta(x)$  满足

$$D_\vartheta(x) = \begin{cases} c_3 H_{-\chi}\left(-\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right) + c_4 H_{-\chi}\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right), & y \leq 0, \\ H_{-\chi}\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right), & y > 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

其中  $\chi = \vartheta/a$ , 系数  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 满足

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\sigma_1 H_{-\chi}\left(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) + \sigma_2 H_{-\chi}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right)}{\sigma_1 H_{-\chi}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(-\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) + \sigma_1 H_{-\chi}\left(-\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right)}, \\ c_2 &= \frac{\sigma_1 H_{-\chi}\left(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(-\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) - \sigma_2 H_{-\chi}\left(-\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right)}{\sigma_1 H_{-\chi}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(-\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) + \sigma_1 H_{-\chi}\left(-\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right)}, \\ c_3 &= \frac{\sigma_2 H_{-\chi}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) - \sigma_1 H_{-\chi}\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right)}{\sigma_2 H_{-\chi}\left(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) + \sigma_2 H_{-\chi}\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right)}, \\ c_4 &= \frac{\sigma_2 H_{-\chi}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) + \sigma_1 H_{-\chi}\left(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right)}{\sigma_2 H_{-\chi}\left(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) + \sigma_2 H_{-\chi}\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right) H_{-\chi-1}\left(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\right)}. \end{aligned}$$

**证明** 详细证明参见文献 [13]. □

### 3.3 占位时

令  $c, b_1, b_2, d \in \mathbb{R}$  且  $c < b_1 < b_2 < d$ , 本节研究斜 OU 过程在出  $[c, d]$  之前在  $[b_1, b_2]$  的占位时. 在给出相关结论之前, 先引进一些定义和记号.

对  $\nu > 0$ , 定义

$$C(\nu, x, y) = H_{-\nu-1}(-x)H_{-\nu}(y) + H_{-\nu-1}(x)H_{-\nu}(-y),$$

$$S(\nu, x, y) = H_{-\nu}(-x)H_{-\nu}(y) - H_{-\nu}(x)H_{-\nu}(-y),$$

$$\text{Erfi}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{v^2} dv,$$

$$\psi_0^+(G_1(c), G_1(b_1)) = \frac{\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{\frac{(ab_1-\mu)^2}{a\sigma^2}}}{\frac{\sigma(1+\beta)}{4} [\text{Erfi}(-\frac{\mu}{\sqrt{a\sigma}}) - \text{Erfi}(\frac{ac-\mu}{\sqrt{a\sigma}})] + \frac{\sigma(1-\beta)}{4} [\text{Erfi}(\frac{ab_1-\mu}{\sqrt{a\sigma}}) - \text{Erfi}(-\frac{\mu}{\sqrt{a\sigma}})]},$$

$$\psi_0^-(G_1(b_2), G_1(d)) = \frac{\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{\frac{(ab_1-\mu)^2}{a\sigma^2}}}{\frac{\sigma(1-\beta)}{4} [\operatorname{Erfi}(\frac{ad-\mu}{\sqrt{a}\sigma}) - \operatorname{Erfi}(\frac{ab_2-\mu}{\sqrt{a}\sigma})]},$$

则过程从  $b_1$  出发, 出  $[c, d]$  之前在  $[b_1, b_2]$  的占位时的 Laplace 变换为

$$\begin{aligned} E_{b_1} e^{-\lambda I^X(b_1, b_2, c, d)} &= \{\delta_2 C(\kappa, \hat{b}, \hat{a}) \psi_0^+(G_1(c), G_1(b_1)) - S(\kappa, \hat{a}, \hat{b}) \psi_0^-(G_1(c), G_1(b_1)) \psi_0^-(G_1(b_2), G_1(d)) \\ &\quad + \delta_2 C(\kappa, \hat{a}, \hat{a}) \psi_0^-(G_1(b_2), G_1(d))\} / \{-\delta_2^2 S(\kappa + 1, \hat{a}, \hat{b}) \\ &\quad + \delta_2 C(\kappa, \hat{a}, \hat{b}) \psi_0^-(G_1(b_2), G_1(d)) + \delta_2 C(\kappa, \hat{b}, \hat{a}) \psi_0^+(G_1(c), G_1(b_1)) \\ &\quad - S(\kappa, \hat{a}, \hat{b}) \psi_0^+(G_1(c), G_1(b_1)) \psi_0^-(G_1(b_2), G_1(d))\}, \end{aligned}$$

其中  $\delta_2 = 2\kappa \frac{a}{\sigma_2}$  且  $\hat{x} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sigma_2} (\frac{1-\beta}{2}x - \theta_2)$ .

**注 2** 具体证明参见文献 [24].

## 4 斜 CIR 过程

分支过程, 是一种特殊的随机过程, 它是一组粒子的分裂或灭亡过程的数学模型. 在概率模型中也被称为 Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 过程. CIR 过程在金融中常被用来描述利率的动态 (参见文献 [25]), 其具有均值回复和正值等特性. 本节主要研究斜 CIR 过程, 更多关于分支过程与 CIR 过程的信息, 参见文献 [26]. 与对斜 OU 过程的讨论类似, 我们直接给出斜 CIR 过程的定义及其转移密度和首达时分布, 最后得到它的平稳性质.

**定义 2** 称  $X_t^{(2)}$  是斜 CIR 过程, 若它满足如下的随机微分方程:

$$dX_t^{(2)} = \tilde{\mu}(\tilde{a} - X_t^{(2)})dt + \tilde{\sigma} \sqrt{X_t^{(2)}} dW_t + \tilde{\beta} dL_t^{X^{(2)}}(b), \quad |\tilde{\beta}| \leq 1, \quad b > 0, \quad (4.1)$$

其中  $\tilde{a} > 0$  是均值水平,  $\tilde{\mu} > 0$  是回复率,  $\tilde{\sigma} > 0$  是波动率参数,  $W_t$  是标准 Brown 运动,  $L_t^{X^{(2)}}(b)$  是  $X_t^{(2)}$  在  $b$  点的对称局部时.

**注 3** 斜 CIR 过程的弱解的存在唯一性证明已在文献 [27, 28] 中给出.

令  $p = (1 + \tilde{\beta})/2$ . 图 2 给出了三种不同  $p$  值下的斜 CIR 过程的路径轨道图. 事实上, 当过程碰到  $b$  时, 会以  $p$  的概率向上反射, 以  $1 - p$  的概率向下反射.

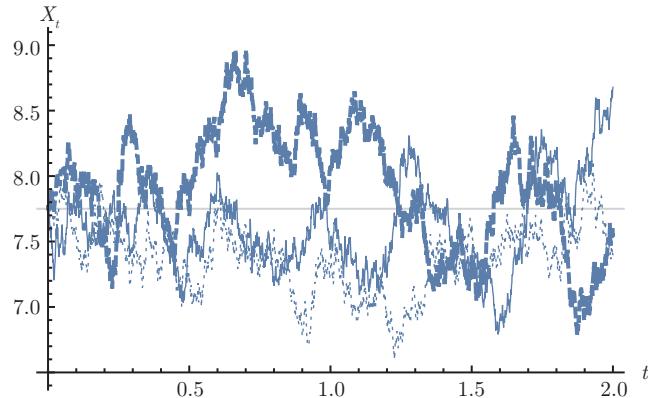


图 2 斜 CIR 过程在三种不同  $p$  值下可能的轨道. 相同的参数设置是  $\theta = 7.8$ ,  $k = 6.21$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $a = 7.75$  和  $x_0 = 7.752$ . 从细到粗的三条路径分别表示  $p$  取值 0.2, 0.5 和 0.8

#### 4.1 转移密度及首达时分布的闭解形式

定义如下符号：

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{2\tilde{\mu}\tilde{a}}{\tilde{\sigma}^2}, \\ \tilde{\theta}_1 &= \frac{(1-\tilde{\beta})\tilde{a}}{2} + \frac{(1+\tilde{\beta})b}{2}, \quad \tilde{\sigma}_1 = \sigma\sqrt{\frac{1-\tilde{\beta}}{2}}, \quad \tilde{l}_1 = \frac{(1+\tilde{\beta})b}{2}, \\ \tilde{\theta}_2 &= \frac{(1+\tilde{\beta})\tilde{a}}{2} + \frac{(1-\tilde{\beta})b}{2}, \quad \tilde{\sigma}_2 = \sigma\sqrt{\frac{1+\tilde{\beta}}{2}}, \quad \tilde{l}_2 = \frac{(1-\tilde{\beta})b}{2}.\end{aligned}$$

此外，定义如下函数：

$$\begin{aligned}g_2(x) &= \begin{cases} \frac{1+\tilde{\beta}}{2}, & 0 < x < b, \\ \frac{1-\tilde{\beta}}{2}, & x \geq b, \end{cases} \\ G_2(x) &= \begin{cases} \frac{1+\tilde{\beta}}{2}(x-b) + b, & 0 < x < b, \\ \frac{1-\tilde{\beta}}{2}(x-b) + b, & x \geq b, \end{cases} \\ \varsigma_2(x) &= \begin{cases} (x-\tilde{l}_2)^{-\pi} e^{\frac{2\tilde{\mu}(x-\tilde{l}_2)}{\tilde{\sigma}_2^2}}, & \tilde{l}_2 < x < b, \\ (b-\tilde{l}_2)^{-\pi} e^{\frac{2\tilde{\mu}(x-b)}{\tilde{\sigma}_1^2} + \frac{2\tilde{\mu}(b-\tilde{l}_2)}{\tilde{\sigma}_2^2}} \left(\frac{x-\tilde{l}_1}{b-\tilde{l}_1}\right)^{-\pi}, & x \geq b, \end{cases} \\ m_2(x) &= \begin{cases} \frac{2}{\varsigma_2(x)\tilde{\sigma}_2^2(x-\tilde{l}_2)}, & \tilde{l}_2 < x < b, \\ \frac{2}{\varsigma_2(x)\tilde{\sigma}_1^2(x-\tilde{l}_1)}, & x \geq b. \end{cases}\end{aligned}$$

令  $T_x = \inf\{t \geq 0; X_t = x\}$  表示过程  $X_t$  的首达时，令  $\mathcal{T}_y = \inf\{t \geq 0; G_2(X_t) = y\}$  表示过程  $G_2(X_t)$  的首达时，令  $S_2(x) = \int^x \varsigma_2(y) dy$ ，那么可以得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_a(T_{a+\epsilon} < T_{a-\epsilon}) &= \mathbb{P}_{G_2(a)}(\mathcal{T}_{G_2(a+\epsilon)} < \mathcal{T}_{G_2(a-\epsilon)}) \\ &= \frac{S_2(G_2(a)) - S_2(G_2(a-\epsilon))}{S_2(G_2(a+\epsilon)) - S_2(G_2(a-\epsilon))} \rightarrow p, \quad \text{当 } \epsilon \rightarrow 0.\end{aligned}$$

上述式子解释了当斜 CIR 过程  $X_t$  触碰到  $a$  点时，它会以  $p$  的概率向上运动和以  $1-p$  的概率向下运动。

下面给出斜 CIR 的转移密度。

**命题 3** 斜 CIR 过程从  $x_0$  出发经时间  $t$  到达  $x$  的转移密度  $p_2(t; x_0, x)$  满足

$$p_2(t; x_0, x) = g_2(x)m_2(G_2(x)) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(G_2(x_0)) \varphi_n(G_2(x)),$$

其中当  $n \uparrow \infty$  时，特征值  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$  是下面 Wronskian 方程的根：

$$\omega(\lambda) = -\frac{1}{\varsigma_2(b)} \left[ \frac{2\tilde{\mu}\alpha}{\tilde{\sigma}_1^2} F(\alpha, \pi, \Lambda_2) U(\alpha+1, \pi+1, \Lambda_1) + \frac{2\tilde{\mu}\alpha}{\tilde{\sigma}_2^2 \pi} U(\alpha, \pi, \Lambda_1) F(\alpha+1, \pi+1, \Lambda_2) \right],$$

特征函数满足

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\psi(b, \lambda_n)}{\omega'(\lambda_n)\phi(b, \lambda_n)}}\phi(x, \lambda_n), & \tilde{l}_2 < x < b, \\ \text{sign}(\phi(b, \lambda_n)\psi(b, \lambda_n))\sqrt{\frac{\phi(b, \lambda_n)}{\omega'(\lambda_n)\psi(b, \lambda_n)}}\psi(x, \lambda_n), & x \geq b, \end{cases}$$

其中

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\tilde{\mu}}, \quad \Lambda_1 = \frac{2\tilde{\mu}(b - \tilde{l}_1)}{\tilde{\sigma}_1^2}, \quad \Lambda_2 = \frac{2\tilde{\mu}(b - \tilde{l}_2)}{\tilde{\sigma}_2^2}.$$

若定义

$$\tilde{z}_1 = \frac{2\tilde{\mu}(x - \tilde{l}_1)}{\tilde{\sigma}_1^2}, \quad \tilde{z}_2 = \frac{2\tilde{\mu}(x - \tilde{l}_2)}{\tilde{\sigma}_2^2},$$

则有  $\psi(x, \lambda) = U(\alpha, \pi, \tilde{z}_1)$ ,  $\phi(x, \lambda) = F(\alpha, \pi, \tilde{z}_2)$ , 其中  $U(\alpha, \pi, z)$  和  $F(\alpha, \pi, z)$  分别是 Tricomi 函数和 Kummer 函数, 参见文献 [23].

**证明** 详细证明参见文献 [29]. □

下面考虑斜 CIR 过程的首达时问题. 假设  $X_t^{(2)}$  满足方程 (4.1), 由对称 Itô-Tanaka 公式可知, 过程  $Y_t^{(2)} = G_2(X_t^{(2)})$  满足

$$dY_t^{(2)} = \begin{cases} \tilde{\mu}(\tilde{\theta}_2 - Y_t^{(2)})dt + \tilde{\sigma}_2\sqrt{Y_t^{(2)} - \tilde{l}_2}dW_t, & \tilde{l}_2 < Y_t^{(2)} < b, \\ \tilde{\mu}(\tilde{\theta}_1 - Y_t^{(2)})dt + \tilde{\sigma}_1\sqrt{Y_t^{(2)} - \tilde{l}_1}dW_t, & Y_t^{(2)} \geq b. \end{cases} \quad (4.2)$$

类似于斜 OU 的情形, 定义斜 CIR 过程的首达时  $\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(2)} = \inf\{t \geq 0; X_t^{(2)} = x\}$  ( $x_0 \leq x$ ) 和  $\hat{T}_{y_0 \uparrow y}^{(2)} = \inf\{t \geq 0; Y_t^{(2)} = y\}$  ( $y_0 \leq y$ ). 利用  $X_t^{(2)}$  与  $Y_t^{(2)}$  的一一对应关系, 有

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(2)} \leq t) = \mathbb{P}(\hat{T}_{G_2(x_0) \uparrow G_2(x)}^{(2)} \leq t).$$

同样, 为了方便书写, 定义

$$y_2^0 = G_2(x_0), \quad y_2 = G_2(x), \quad \nu_1 = \frac{2\tilde{\mu}(y_2 - \tilde{l}_1)}{\tilde{\sigma}_1^2}, \quad \nu_2 = \frac{2\tilde{\mu}(y_2 - \tilde{l}_2)}{\tilde{\sigma}_2^2}.$$

**定理 3** (向上首达) **情形 1**  $y_2 > b$ . 斜 CIR 过程  $X_t^{(2)}$  从  $x_0$  出发向上首达  $x$  时刻的分布  $\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(2)} \leq t)$  的级数展开如下:

$$\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(2)} \leq t) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,x} e^{-\lambda_{n,x} t} \varphi_{n,x}(y_2^0),$$

其中当  $n \uparrow \infty$  时, 特征值  $0 \leq \lambda_{1,x} < \lambda_{2,x} < \dots < \lambda_{n,x} \rightarrow \infty$  是下面 Wronskian 方程的简单零根:

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = & -\frac{1}{\varsigma_2(b)\Gamma_1} \left\{ F(\alpha, \pi, \Lambda_2)[F(\alpha+1, \pi+1, \Lambda_1)U(\alpha, \pi, \nu_1) + \pi F(\alpha, \pi, \nu_1)U(\alpha+1, \pi+1, \Lambda_1)] \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{\sigma}_1^2}{\tilde{\sigma}_2^2} F(\alpha+1, \pi+1, \Lambda_2)[F(\alpha, \pi, \nu_1)U(\alpha, \pi, \Lambda_1) - F(\alpha, \pi, \Lambda_1)U(\alpha, \pi, \nu_1)] \right\}, \end{aligned}$$

其中  $\Gamma_1 = F(\alpha + 1, \pi + 1, \nu_1)U(\alpha, \pi, \nu_1) + \beta F(\alpha, \pi, \nu_1)U(\alpha + 1, \pi + 1, \nu_1)$ , 且系数  $c_{n,x}$  满足

$$c_{n,x} = -\frac{\varphi'_{n,x}(y_2)}{\lambda_{n,x}\varsigma_2(y_2)}, \quad \varphi'_{n,x}(y_2) = \frac{d\varphi_{n,x}(x)}{dx} \Big|_{x \uparrow y_2}.$$

定义  $\phi(x, \lambda) = F(\alpha, \pi, \tilde{z}_2)$ ,  $\psi(x, \lambda) = \frac{\tilde{\sigma}_1^2}{2\bar{\mu}\alpha}\frac{\pi}{\Gamma_1}[F(\alpha, \pi, \nu_1)U(\alpha, \pi, \tilde{z}_1) - F(\alpha, \pi, \tilde{z}_2)U(\alpha, \pi, \nu_1)]$ , 则特征函数  $\varphi_{n,x}(x)$  满足

$$\varphi_{n,x}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\psi(b, \lambda_{n,x})}{\omega'(\lambda_{n,x})\phi(b, \lambda_{n,x})}}\phi(x, \lambda_{n,x}), & \tilde{l}_2 < y < b, \\ \text{sign}(\psi(b, \lambda_{n,x})\phi(b, \lambda_{n,x}))\sqrt{\frac{\phi(b, \lambda_{n,x})}{\omega'(\lambda_{n,x})\psi(b, \lambda_{n,x})}}\psi(x, \lambda_{n,x}), & b \leq x \leq y_2. \end{cases}$$

**情形 2**  $y_2 \leq b$ . 斜 CIR 过程  $X_t^{(2)}$  从  $x_0$  出发向上首达  $x$  时刻的分布  $\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(2)} \leq t)$  的级数展开与情形 1 相同, 只是 Wronskian 方程变为如下形式:

$$\omega(\lambda) = -\frac{F(\alpha, \pi, \nu_2)}{(y_2 - \tilde{l}_2)^{-\pi} e^{\nu_2}}.$$

**证明** 详细证明参见文献 [29]. □

向下首达时情形与向上首达情形类似, 我们把它总结为如下推论.

**推论 2 (向下首达)** **情形 1**  $y_2 \leq b$ . 斜 CIR 过程  $X_t^{(2)}$  从  $x_0$  出发向下首达  $x$  时刻的分布  $\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \downarrow x}^{(2)} \leq t)$  的级数展开如下:

$$\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \downarrow x}^{(2)} \leq t) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,x} e^{-\lambda_{n,x} t} \varphi_{n,x}(y_2^0),$$

其中当  $n \uparrow \infty$  时, 特征值  $0 \leq \lambda_{1,x} < \lambda_{2,x} < \dots < \lambda_{n,x} \rightarrow \infty$  是下面 Wronskian 方程的简单零根:

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = & -\frac{1}{\varsigma_2(b)\Gamma_2} \left\{ \pi \frac{\tilde{\sigma}_2^2}{\tilde{\sigma}_1^2} U(\alpha + 1, \pi + 1, \Lambda_1) [F(\alpha, \pi, \Lambda_2)U(\alpha, \pi, \nu_2) - F(\alpha, \pi, \nu_2)U(\alpha, \pi, \Lambda_2)] \right. \\ & \left. + U(\alpha, \pi, \Lambda_1) [F(\alpha + 1, \pi + 1, \Lambda_2)U(\alpha, \pi, \nu_2) + \pi F(\alpha, \pi, \nu_2)U(\alpha + 1, \pi + 1, \Lambda_2)] \right\}, \end{aligned}$$

其中  $\Gamma_2 = F(\alpha + 1, \pi + 1, \nu_2)U(\alpha, \pi, \nu_2) + \pi F(\alpha, \pi, \nu_2)U(\alpha + 1, \pi + 1, \nu_2)$ , 且系数系数  $c_{n,x}$  满足

$$c_{n,x} = \frac{\varphi'_{n,x}(y_2)}{\lambda_{n,x}\varsigma_2(y_2)}, \quad \varphi'_{n,x}(y_2) = \frac{d\varphi_{n,x}(x)}{dx} \Big|_{x \downarrow y_2},$$

定义  $\phi(x, \lambda) = \frac{\tilde{\sigma}_2^2}{2\bar{\mu}\alpha}\frac{\pi}{\Gamma_2}[F(\alpha, \pi, \tilde{z}_2)U(\alpha, \pi, \nu_2) - F(\alpha, \pi, \nu_2)U(\alpha, \pi, \tilde{z}_2)]$ ,  $\psi(x, \lambda) = U(\alpha, \pi, \tilde{z}_1)$ , 则特征函数  $\varphi_{n,x}(x)$  满足

$$\varphi_{n,x}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\psi(b, \lambda_{n,x})}{\omega'(\lambda_{n,x})\phi(b, \lambda_{n,x})}}\phi(x, \lambda_{n,x}), & y_2 \leq x < b, \\ \text{sign}(\psi(b, \lambda_{n,x})\phi(b, \lambda_{n,x}))\sqrt{\frac{\phi(b, \lambda_{n,x})}{\omega'(\lambda_{n,x})\psi(b, \lambda_{n,x})}}\psi(x, \lambda_{n,x}), & b \leq x < \infty. \end{cases}$$

**情形 2**  $y_2 \geq b$ . 斜 CIR 过程  $X_t^{(2)}$  从  $x_0$  出发向下首达  $x$  时刻的分布  $\mathbb{P}_{x_0}(\mathcal{T}_{x_0 \downarrow x}^{(2)} \leq t)$  的级数展开与情形 1 相同, 只是 Wronskian 方程变为如下形式:

$$\omega(\lambda) = -\frac{U(\alpha, \pi, \nu_1)}{(b - \tilde{l}_2)^{-\pi} e^{\Lambda_2} (\frac{y_2 - \tilde{l}_1}{b - \tilde{l}_1})^{-\pi} e^{\nu_1}}.$$

证明 详细证明参见文献 [29].  $\square$

## 4.2 Laplace 变换

**命题 4** 首达时  $\mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(2)}$  和  $\mathcal{T}_{x_0 \downarrow x}^{(2)}$  的 Laplace 变换为

$$\mathbb{E}_{x_0}(e^{-\vartheta \mathcal{T}_{x_0 \uparrow x}^{(2)}}) = \frac{\tilde{I}_\vartheta(y_2^0)}{\tilde{I}_\vartheta(y_2)}, \quad \mathbb{E}_{x_0}(e^{-\vartheta \mathcal{T}_{x_0 \downarrow x}^{(2)}}) = \frac{\tilde{D}_\vartheta(y_2^0)}{\tilde{D}_\vartheta(y_2)},$$

其中递增函数  $\tilde{I}_\vartheta(x)$  满足

$$\tilde{I}_\vartheta(x) = \begin{cases} F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \tilde{z}_2\right), & x \leq b, \\ \tilde{c}_1 F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \tilde{z}_1\right) + \tilde{c}_2 U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \tilde{z}_1\right), & x > b, \end{cases} \quad (4.3)$$

递减函数  $\tilde{D}_\vartheta(x)$  满足

$$\tilde{D}_\vartheta(x) = \begin{cases} \tilde{c}_3 F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \tilde{z}_2\right) + \tilde{c}_4 U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \tilde{z}_2\right), & x < b, \\ U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \tilde{z}_1\right), & x \geq b. \end{cases}$$

定义

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \tilde{\sigma}_2^2 F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_1\right) U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \Lambda_1\right) + \tilde{\sigma}_2^2 \pi F\left(\frac{\vartheta}{k}, \pi, \Lambda_1\right) U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_1\right), \\ \Xi_2 &= \tilde{\sigma}_1^2 F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_2\right) U\left(\frac{\vartheta}{k}, \pi, \Lambda_2\right) + \tilde{\sigma}_1^2 \pi F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \Lambda_2\right) U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_2\right), \end{aligned}$$

则系数  $\tilde{c}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 满足

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \frac{1}{\Xi_1} \left[ \tilde{\sigma}_1^2 F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_2\right) U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \Lambda_1\right) + \tilde{\sigma}_2^2 \pi F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \Lambda_2\right) U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_1\right) \right], \\ \tilde{c}_2 &= \frac{1}{\Xi_1} \left[ \tilde{\sigma}_2^2 F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_1\right) F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \Lambda_2\right) - \tilde{\sigma}_1^2 F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \Lambda_1\right) F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_2\right) \right], \\ \tilde{c}_3 &= \frac{1}{\Xi_2} \left[ \tilde{\sigma}_1^2 \pi U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \Lambda_1\right) U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_2\right) - \tilde{\sigma}_2^2 \pi U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_1\right) U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \Lambda_2\right) \right], \\ \tilde{c}_4 &= \frac{1}{\Xi_2} \left[ \tilde{\sigma}_1^2 F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_2\right) U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \Lambda_1\right) + \tilde{\sigma}_2^2 \pi F\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}}, \pi, \Lambda_2\right) U\left(\frac{\vartheta}{\tilde{\mu}} + 1, \pi + 1, \Lambda_1\right) \right]. \end{aligned}$$

证明 详细证明参见文献 [12].  $\square$

### 4.3 平稳密度

本小节给出斜 CIR 过程的平稳密度.

**定理 4** 斜 CIR 过程  $X_t^{(2)}$  的平稳密度  $p(x)$  为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1-\tilde{\beta}}{2\Lambda} x^{\pi-1} e^{-\frac{2\tilde{\mu}x}{\tilde{\sigma}^2}}, & 0 < x < b, \\ \frac{1+\tilde{\beta}}{2\Lambda} x^{\pi-1} e^{-\frac{2\tilde{\mu}x}{\tilde{\sigma}^2}}, & x \geq b, \end{cases} \quad (4.4)$$

其中

$$\Lambda = \frac{1-\tilde{\beta}}{2} \int_0^b x^{\pi-1} e^{-\frac{2\tilde{\mu}x}{\tilde{\sigma}^2}} dx + \frac{1+\tilde{\beta}}{2} \int_b^\infty x^{\pi-1} e^{-\frac{2\tilde{\mu}x}{\tilde{\sigma}^2}} dx.$$

**证明** 假设  $f \in C(I)$ ,  $f', f'' \in C(I) \setminus \{b\}$  且  $f'$  在  $b$  点满足

$$\frac{1+\tilde{\beta}}{2} f'(b+) = \frac{1-\tilde{\beta}}{2} f'(b-).$$

对这样的  $f$  利用广义的 Itô 公式, 有

$$\begin{aligned} f(X_t^{(2)}) &= f(X_0^{(2)}) + \int_0^t f'(X_s^{(2)}) dX_s^{(2)} + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s^{(2)}) d\langle X^{(2)} \rangle_s + \frac{1}{2} [f'(b+) - f'(b-)] L_t^{X^{(2)}}(b) \\ &= f(X_0^{(2)}) + \int_0^t \left[ \tilde{\mu}(\tilde{a} - X_s^{(2)}) f'(X_s^{(2)}) + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 X_s^{(2)} f''(X_s^{(2)}) \right] ds + \int_0^t \tilde{\sigma} \sqrt{X_s^{(2)}} f'(X_s^{(2)}) dW_s. \end{aligned}$$

由于  $X_t^{(2)}$  是 Markov 过程, 且其无穷小生成元为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x f(X_t^{(2)}) - \mathbb{E}_x f(X_0^{(2)})}{t} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 x f''(x) + \tilde{\mu}(\tilde{a} - x) f'(x). \end{aligned}$$

从文献 [30, 第 394 页], 我们能够推出  $X_t^{(2)}$  的平稳密度  $p(x)$  应该满足

$$\int \mathcal{A}f(x)p(x)dx = 0, \quad \text{对所有的 } f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (4.5)$$

注意到

$$\int_0^\infty \mathcal{A}f(x)p(x)dx = \int_0^b \mathcal{A}f(x)p(x)dx + \int_b^\infty \mathcal{A}f(x)p(x)dx.$$

利用两次分部积分法, 上面的方程化为

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty f(x) \left[ \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 x p''(x) + \tilde{\sigma}^2 p'(x) + \tilde{\mu}(x - \tilde{a}) p'(x) + \tilde{\mu} p(x) \right] dx + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 b [p(b-) f'(b-) - p(b+) f'(b+)] \\ &+ f(b) \left[ \left( \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\mu}(b - \tilde{a}) \right) (p(b+) - p(b-)) + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 b (p'(b+) - p'(b-)) \right] + f(0) \left( \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 - \tilde{\mu} \tilde{a} \right) p(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

从上式, 我们有以下方程:

$$\begin{cases} p(b-)f'(b-) = p(b+)f'(b+), \\ p(0) = 0, \\ \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2xp''(x) + \tilde{\sigma}^2p'(x) + \tilde{\mu}(x - \tilde{a})p'(x) + \tilde{\mu}p(x) = 0. \end{cases}$$

结合条件  $\int_0^\infty p(x)dx = 1$ , 就能得到平稳密度 (4.4) 中的  $p(x)$ .  $\square$

## 5 斜过程在金融衍生品定价中的应用

由于斜过程特殊的轨道性质, 使得它们在衍生品定价中有着广泛的应用. 本节以斜 CIR 过程为例, 给出了标的资产服从该过程时两种典型期权的价值.

### 5.1 基于斜 CIR 过程的障碍期权定价

本小节将讨论标的是汇率目标区  $\{X_t, t \geq 0\}$  的 (敲入) 障碍期权的定价问题. 敲入障碍期权表示当标的资产价格达到一个特定障碍水平时, 期权自动生效. 它包含向下敲入和向上敲入, 表示标的必须至少有一次跌到了障碍水平之下或必须至少有一次涨到了障碍水平之上, 该期权才会有收入. 这里考虑向下敲入障碍期权. 定义  $\tau = \inf\{t \geq 0; X_t \leq C\}$ , 其中  $X_t$  表示汇率. 那么到期日是  $T$ , 执行价格是  $K$  的向下敲入障碍期权的收益是  $1_{\{\tau < T\}}m(X_T - K)_+$ , 这里  $m$  代表着货币的数量 (例如, 若  $X_t$  表示美元/港币汇率, 则  $m$  表示港币的数量). 下面来计算期权的价格  $C_T = E[1_{\{\tau < T\}}m(X_T - K)_+]$ .  $C_T$  的 Laplace 变换是

$$\begin{aligned} \vartheta \int_0^\infty e^{-\vartheta t} E[1_{\{\tau < t\}}m(X_t - K)_+] dt &= mE \left[ e^{-\vartheta \tau} \vartheta \int_0^\infty e^{-\vartheta u} (X_{\tau+u} - K)_+ du \right] \\ &= mE \left[ e^{-\vartheta \tau} E \left[ \vartheta \int_0^\infty e^{-\vartheta u} (X_u - K)_+ \circ \Theta_\tau du \mid \mathcal{F}_\tau \right] \right] \\ &= mE \left[ e^{-\vartheta \tau} E_C \left[ \vartheta \int_0^\infty e^{-\vartheta u} (X_u - K)_+ du \right] \right] \\ &= mE[e^{-\vartheta \tau}] \vartheta \int_K^\infty (u - K) \int_0^\infty e^{-\vartheta t} p(t; x, u) dt du, \end{aligned}$$

其中  $\Theta_\tau$  是转移算子, 且第三个等式利用了强 Markov 性.  $E[e^{-\vartheta \tau}]$  的 Laplace 变换详见命题 4, 转移密度  $p(t; x, u)$  的详细计算见命题 3.

### 5.2 基于斜 CIR 过程的一触即付期权定价

本小节将讨论一触即付期权. 一触即付期权是当资产价格上涨并触碰到目标价格, 投资者就能获得所有的回报, 反之, 投资者一无所获. 一触即付期权是奇异期权的一种, 资产多为指数或外汇. 假设  $x_0$  是初始值,  $k$  是提前设置好的目标价格. 为了简单起见, 假设投资者投资的总资产是 1. 如下定义触碰的时间  $\tau$ :

$$\tau = \inf\{t \geq 0; X_t \geq k\}.$$

从金融的观点出发, 我们对  $E[e^{-rT}C_T]$  特别感兴趣, 其中  $T$  是到期日,  $C_T$  是目标价格  $k$  的一触即付期权在  $T$  的收益:

$$C_T = \begin{cases} 1, & \text{若 } \tau < T, \\ 0, & \text{若 } \tau \geq T, \end{cases}$$

那么一触即付期权的价格就是  $V_0 = E[e^{-rT}C_T] = e^{-rT}\mathbb{P}\{\tau < T\}$ , 其中  $\mathbb{P}\{\tau < T\}$  是斜 CIR 过程的首达时分布, 详细计算见第 4.1 小节.

## 6 总结

目前我们的工作主要集中在斜 OU 和斜 CIR 过程解的存在唯一性讨论, 及计算其相关的性质上. 进一步地, 一方面, 我们要考虑多个斜点的解的存在唯一性的讨论和相关性质的计算; 另一方面, 我们可以利用斜过程来描述许多金融当中的特殊现象, 诸如现行的零利率动态、汇率目标区制度下的汇率动态等. 关于斜过程的参数估计也非常值得深入研究. 这些都是今后研究的方向.

**致谢** 本文中相关结果曾在国内外学术会议报告交流, 得到了学术同行的诸多评论和建议, 作者深表感谢. 本文第一位作者王永进特别感谢老师王梓坤先生几十年来的指导、支持和鼓励. 借以此文贺先生 90 华诞.

## 参考文献

- 1 Itô K, McKean H P Jr. Diffusion Processes and Their Sample Paths. New York: Springer-Verlag, 1965
- 2 Walsh J B. A diffusion with discontinuous local time. Astérisque, 1978, 52: 37–45
- 3 Harrison J M, Shepp L A. On skew Brownian motion. Ann Probab, 1981, 9: 309–313
- 4 Le Gall J F. One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process. In: Stochastic Analysis and Applications. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1095. New York: Springer-Verlag, 1984, 51–82
- 5 Lejay A. On the construction of the skew Brownian motion. Probab Surv, 2007, 3: 413–466
- 6 Bass R F, Chen Z Q. One-dimensional stochastic differential equations with singular and degenerate coefficients. Sankhyā, 2005, 67: 19–45
- 7 Appuhamillage T, Sheldon D. First passage time of skew Brownian motion. J Appl Probab, 2012, 49: 685–696
- 8 Abundo M. First-passage problems for asymmetric diffusions and skew-diffusion processes. Open Syst Inf Dyn, 2009, 16: 325–350
- 9 Bo L, Wang Y, Yang X. First passage times of (reflected) Ornstein-Uhlenbeck processes over random jump boundaries. J Appl Probab, 2011, 48: 723–732
- 10 Song S, Wang S, Wang Y. First hitting times for doubly skewed Ornstein-Uhlenbeck processes. Statist Probab Lett, 2015, 96: 212–222
- 11 Song S, Wang S, Wang Y. On some properties of reflected skew Brownian motions and applications to dispersion in heterogeneous media. Phys A, 2016, 456: 90–105
- 12 Song S, Xu G, Wang Y. On first hitting times for skew CIR processes. Methodol Comput Appl Probab, 2016, 18: 169–180
- 13 Wang S, Song S, Wang Y. Skew Ornstein-Uhlenbeck processes and their financial applications. J Comput Appl Math, 2015, 273: 363–382
- 14 Xu G, Song S, Wang Y. Some properties of doubly skewed CIR processes. J Math Anal Appl, 2016, 434: 1194–1210
- 15 Xu G, Wang Y. On stability of the Markov-modulated skew CIR process. Statist Probab Lett, 2016, 109: 139–144
- 16 Appuhamillage T, Bokil V, Thomann E, et al. Occupation and local times for skew Brownian motion with applications to dispersion across an interface. Ann Appl Probab, 2011, 21: 183–214
- 17 Freidlin M I, Wentzell A D. Diffusion processes on graphs and the averaging principle. Ann Probab, 1993, 21: 2215–2245
- 18 Ramirez J M. Multi-skewed Brownian motion and diffusion in layered media. Proc Amer Math Soc, 2011, 139: 3739–3752

- 19 Cantrell R, Cosner C. Diffusion models for population dynamics incorporating individual behavior at boundaries: Applications to refuge design. *Theor Popul Biol*, 1999, 55: 189–207
- 20 Lejay A. Simulating a diffusion on a graph. Application to reservoir engineering. *Monte Carlo Methods Appl*, 2003, 9: 241–256
- 21 Decamps M, de Schepper A, Goovaerts M. Applications of  $\delta$ -function perturbation to the pricing of derivative securities. *Phys A*, 2004, 342: 677–692
- 22 Zhang M. Calculation of diffusive shock acceleration of charged particles by skew Brownian motion. *Astrophys J*, 2000, 541: 428–435
- 23 Nikiforov A F, Uvarov V B. Special Functions of Mathematical Physics: A Unified Introduction with Applications. New York: Springer, 1988
- 24 Li Y, Wang S, Zhou X, et al. Diffusion occupation time before exiting. *Front Math China*, 2014, 9: 843–861
- 25 Cox J C, Ingersoll J E Jr, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 1999, 53: 385–408
- 26 Durrett R. Stochastic Calculus: A Practical Introduction. Boca Raton: CRC Press, 1996
- 27 Trutnau G. Weak existence of the squared Bessel and CIR processes with skew reflection on a deterministic time-dependent curve. *Stochastic Process Appl*, 2010, 120: 381–402
- 28 Trutnau G. Pathwise uniqueness of the squared Bessel and CIR processes with skew reflection on a deterministic time dependent curve. *Stochastic Process Appl*, 2011, 121: 1845–1863
- 29 Xu G, Song S, Wang Y. The valuation of options on foreign exchange rate in a target zone. *Int J Theor Appl Finance*, 2016, 19: 1–19
- 30 Karlin S, Taylor H M. A Second Course in Stochastic Processes. New York: Academic Press, 1981

## The analysis and property of two classes of skew Markov processes

Yongjin Wang, Guangli Xu & Shiyu Song

**Abstract** The skew diffusion process is a special diffusion process. The stochastic differential equation expression of such a special process contains the symmetric local time. Due to its special property, this model is widely used in physics and biology. Starting from skew Brownian motion, this work summarizes its two constructions: discrete approximation and jointly probability distribution. Based on the skew Brownian motion, we provide the definitions for the skew Ornstein-Uhlenbeck (OU) process and skew branching process, and derive their properties: transition density, first hitting time, etc. We also introduce some applications under the skew diffusion processes.

**Keywords** skew Brownian motion, skew OU process, skew branching process, option pricing

**MSC(2010)** 60J55, 60J60

**doi:** 10.1360/N012018-00057