



Stokes-Darcy 方程有限元方法保多项式梯度重构

崔明¹, 王亚楠¹, 张百驹², 张智民^{3*}

1. 北京工业大学理学部, 北京 100124;

2. 云南大学数学与统计学院, 昆明 650500;

3. Department of Mathematics, Wayne State University, Detroit, MI 48202, USA

E-mail: mingcui@bjut.edu.cn, yananwang@emails.bjut.edu.cn, 20220151@ynu.edu.cn, zhimin.zhang@wayne.edu

收稿日期: 2021-11-03; 接受日期: 2023-09-28; 网络出版日期: 2024-02-07; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12131005) 和北京市自然科学基金 (批准号: 1192003) 资助项目

摘要 近年来, 对于 Stokes-Darcy 方程的研究受到越来越多的关注. 一方面是因为它在水文学、环境科学和石油工程等诸多领域有着广泛的应用; 另一方面, 该方程在数学理论和数值分析方面也十分具有挑战性. 保多项式重构 (polynomial-preserving recovery, PPR) 方法是一种后处理方法, 将其用于有限元的后处理, 可以获得连续更优的梯度逼近结果. 本文对 Stokes-Darcy 方程的有限元方法给出基于 PPR 的超收敛分析和后验误差估计. 利用有限元数值结果和 PPR 方法, 本文重构网格节点处的梯度近似值, 证明重构后的梯度超收敛于精确梯度, 并证明后验误差估计在渐近意义上是精确的. 数值实验验证了本文的理论分析结果.

关键词 Stokes-Darcy 方程 保多项式重构 后验误差估计 超收敛

MSC (2020) 主题分类 65M60, 65N30

1 引言

在数值计算中, 经常要给出偏微分方程数值解误差的定量估计, 后验误差估计是在精确解未知的情形下, 用一个可计算量来估计误差, 这个量称为后验误差估计子. 在一些情形下, 可能更加关注解的梯度, 而 Lagrange 有限元所得到的有限元解的梯度在单元边界处间断, 因此保多项式重构 (polynomial-preserving recovery, PPR) 方法被提出以获得一个连续的更优的梯度逼近结果.

梯度重构方法是在一个单元片 (由围绕公共节点的所有单元组成) 上选取样本点, 利用样本点数据作最小二乘拟合, 从而得到重构点的梯度值. 目前比较成熟的梯度重构方法有 ZZ (Zienkiewicz-Zhu) 方法^[1] 和 PPR 方法^[26, 40, 42]. PPR 方法继承了 ZZ 方法的优势, 重构过程直接利用网格节点信息, 且不受 ZZ 方法有限元网格划分方式的限制, 因而受到工程界的广泛关注, 已被国际上广为流行的大型商业软件 COMSOL Multiphysics 采用, 并使用至今. 利用 PPR 方法进行误差估计是一种重构型后验

英文引用格式: Cui M, Wang Y N, Zhang B J, et al. Polynomial-preserving recovery finite element method for the Stokes-Darcy system (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1105–1122, doi: 10.1360/SSM-2021-0209

误差估计, 它与方程及其有限元形式无关. 重构算子具有超收敛性, 其计算过程简单, 快速高效且易于实现. 文献 [34] 给出了椭圆方程基于弱 Galerkin 有限元的 PPR 型后验误差估计, 文献 [18] 研究了高频波方程有限元方法的保 PPR 型后验误差估计, 文献 [14] 研究了高波数 Helmholtz 方程线性有限元的 PPR 的超收敛分析, 文献 [21, 30, 35, 36, 38, 39, 41] 研究了基于复杂网格上有限元的保多项式重构方法. 上述文献主要研究的是非耦合问题的 PPR 方法. 然而, 关于耦合问题的 PPR 方法的研究还比较少. 这促使本文研究 PPR 方法在 Stokes-Darcy 耦合问题上的应用, 并进一步探索 PPR 方法的优势和作用.

本文研究 Stokes-Darcy 方程基于 PPR 的后验误差估计及其相应的自适应有限元算法. Stokes-Darcy 方程在油藏开采、地下水污染的修复等方面有着广泛的应用, 具有十分重要的实际意义. 关于 Stokes-Darcy 耦合问题的数值求解方法已有很多研究. 例如, 文献 [3, 7, 23] 研究了交界面, 文献 [5] 研究了 Stokes-Darcy 方程的 CR (Crouzeix-Raviart) 元有限元逼近, 文献 [28, 31] 研究了 Stokes-Darcy 耦合方程的稳定化混合元方法. 文献 [4] 在 Stokes-Darcy 方程的求解中引入了新的变量旋度, 提出了新的变分形式. 文献 [27] 在 Stokes-Darcy 方程中加入了扰动参数, 并给出了新的非协调有限元空间. 文献 [29] 采用二重网格法对 Stokes-Darcy 方程进行求解. 文献 [37] 将 Stokes 方程和 Darcy 方程写成统一的 Brinkman 方程的形式, 并在此基础上构造了一致稳定的有限元逼近. 文献 [25] 通过在 Stokes-Darcy 方程的交界面上引入 Lagrange 乘子进行区域分解求解. 文献 [11] 研究了 Stokes-Darcy 方程基于有限体积法的求解过程, 基于间断有限元方法的分析研究可参见文献 [17]. 文献 [9] 分别在流体域采用 Taylor-Hood 元、在多孔介质域采用分片二次元对 Stokes-Darcy 方程进行求解, 文献 [10] 基于此有限元空间给出了 Stokes-Darcy 方程的残量型后验误差估计. 有关 Stokes-Darcy 方程的更多研究可参见文献 [2, 12, 13, 16, 19, 24, 32, 33].

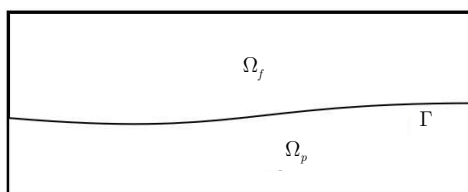
PPR 方法是一种有限元后处理技术, 它可以用来改进有限元解的数值逼近精度, 也能够为自适应程序提供有效可靠的后验误差估计子. 本文采用有限元方法求解 Stokes-Darcy 方程, 并给出 Stokes-Darcy 方程有限元方法的梯度重构型后验误差估计. 对比文献 [6, 10] 介绍的残量型后验误差估计子, 本文所提出的后验误差估计子具有形式简单、计算方便等优势. 理论分析和数值实验表明重构梯度的精度优于有限元近似梯度所提供的近似, 即重构梯度是超收敛的. 同时基于 PPR 方法构造的后验误差估计子是渐近准确的, 可以指导网格的自适应加密, 得到数值解的最优逼近.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节给出 Stokes-Darcy 方程的有限元离散格式. 第 3 节基于 Stokes-Darcy 方程的有限元方法, 给出梯度重构型后验误差估计子并分析 PPR 算子的超收敛性质. 第 4 节给出 Stokes-Darcy 方程的自适应算法, 并通过数值算例来验证所得理论的正确性.

2 Stokes-Darcy 方程的混合有限元方法

Stokes-Darcy 方程由 Stokes 方程和 Darcy 方程通过界面条件耦合而成, 在两区域内方程的解具有不同的正则性, 而且交界面上流体的切向速度不连续. 文献 [20] 提出了求解流体力学中 Stokes 问题的三角元, 即对速度变量采用二次分片多项式逼近, 对压力变量采用连续线性分片多项式逼近, 简称 P_2 - P_1 连续压力元. 文献 [9] 在流体域采用 P_2 - P_1 元, 在多孔介质域采用 P_2 元, 本文基于上述有限元空间研究 Stokes-Darcy 方程的 PPR 及其自适应有限元方法.

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个连通的有光滑边界的凸多边形区域, 此多边形区域为 $\Omega = \Omega_p \cup \Omega_f$, 其中, Ω_p 为多孔介质域, Ω_f 为流体区域 (如图 1 所示).

图 1 求解区域 Ω

在 Ω_p 中, 流体速度 $\mathbf{u}_p$ 和水势 ϕ_p 满足 Darcy 方程

$$\mathbf{u}_p = -\mathbb{K}\nabla\phi_p \quad \text{和} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_p = 0. \quad (2.1)$$

在 Ω_f 中, 流体速度 $\mathbf{u}_f$ 满足 Stokes 方程

$$-\nabla \cdot \mathbb{T}(\mathbf{u}_f, p_f) = \mathbf{f}_f \quad \text{和} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0, \quad (2.2)$$

其中, $\mathbb{T}(\mathbf{u}_f, p_f) = 2\nu\mathbb{D}(\mathbf{u}_f) - p_f\mathbb{I}$ 为应力张量, ν 为流体的黏性系数, $\mathbb{D}(\mathbf{u}_f) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}_f + \nabla^T\mathbf{u}_f)$ 为形变张量.

在界面 $\Gamma = \overline{\Omega_p} \cap \overline{\Omega_f}$ 上,

$$\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f = -\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n}_p, \quad (2.3)$$

$$-\mathbf{n}_f \cdot (\mathbb{T}(\mathbf{u}_f, p_f) \cdot \mathbf{n}_f) = g\phi_p, \quad (2.4)$$

$$-\boldsymbol{\tau}_f \cdot (\mathbb{T}(\mathbf{u}_f, p_f) \cdot \mathbf{n}_f) = \alpha\boldsymbol{\tau}_f \cdot \mathbf{u}_f, \quad (2.5)$$

其中, $\boldsymbol{\tau}_f$ 为 Γ 的正切方向, g 、 α 和 ν 为正的常数.

在外部边界上,

$$\mathbf{u}_f = 0, \quad x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_f, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n}_p = 0, \quad x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_p. \quad (2.7)$$

定义空间

$$\mathbf{X}_f = \{\mathbf{v}_f \in (H^1(\Omega_f))^2 \mid \mathbf{v}_f = 0 \text{ 在 } \partial\Omega_f \setminus \Gamma \text{ 上}\}, \quad Q_f = L^2(\Omega_f),$$

$$X_p = \{\psi_p \in H^1(\Omega_p) \mid \psi_p = 0 \text{ 在 } \partial\Omega_p \setminus \Gamma \text{ 上}\}.$$

定义如下双线性形式:

$$a_p(\phi_p, \psi_p) = (\mathbb{K}\nabla\phi_p, \nabla\psi_p)_{\Omega_p}, \quad \forall \phi_p, \psi_p \in X_p,$$

$$a_f(\mathbf{u}_f, \mathbf{v}_f) = 2\nu(\mathbb{D}(\mathbf{u}_f), \mathbb{D}(\mathbf{v}_f))_{\Omega_f}, \quad \forall \mathbf{u}_f, \mathbf{v}_f \in \mathbf{X}_f,$$

$$b_f(\mathbf{v}_f, q_f) = -(\nabla \cdot \mathbf{v}_f, q_f)_{\Omega_f}, \quad \forall \mathbf{v}_f \in \mathbf{X}_f, \quad q_f \in Q_f.$$

Stokes-Darcy 方程的变分形式为: 求 $(\mathbf{u}_f, p_f, \phi_p) \in \mathbf{X}_f \times Q_f \times X_p$, 使得

$$\begin{aligned} & a_f(\mathbf{u}_f, \mathbf{v}_f) + b_f(\mathbf{v}_f, p_f) + ga_p(\phi_p, \psi_p) + \langle g\phi_p, \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}_f \rangle \\ & - \langle g\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f, \psi_p \rangle + \alpha \langle P_\tau \mathbf{u}_f, P_\tau \mathbf{v}_f \rangle = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_f)_{\Omega_f}, \quad \forall \mathbf{v}_f \in \mathbf{X}_f, \quad \psi_p \in X_p, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$b_f(\mathbf{u}_f, q_f) = 0, \quad \forall q_f \in Q_f, \quad (2.9)$$

其中, $(\cdot, \cdot)_{\Omega_f}$ 和 $(\cdot, \cdot)_{\Omega_p}$ 分别表示区域 Ω_f 和 Ω_p 上的 L^2 内积, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示界面边界 Γ 上的 L^2 内积, P_τ 表示 Γ 切线方向上的投影, 即 $P_\tau \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_f) \boldsymbol{\tau}_f$. 令

$$\begin{aligned} A((\mathbf{u}, p, \phi); (\mathbf{v}, q, \psi)) &= a_f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_f(\mathbf{v}, p) + g_{ap}(\phi, \psi) + \langle g\phi, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_f \rangle - \langle g\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f, \psi \rangle \\ &\quad + \alpha \langle P_\tau \mathbf{u}, P_\tau \mathbf{v} \rangle - b_f(\mathbf{u}, q), \quad \forall (\mathbf{u}, p, \phi), (\mathbf{v}, q, \psi) \in \mathbf{X}_f \times Q_f \times X_p. \end{aligned} \quad (2.10)$$

则方程 (2.1) 和 (2.2) 的变分形式可以表示为: 求 $(\mathbf{u}, p, \phi) \in \mathbf{X}_f \times Q_f \times X_p$, 使得

$$A((\mathbf{u}, p, \phi); (\mathbf{v}, q, \psi)) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega_f}, \quad \forall (\mathbf{v}, q, \psi) \in \mathbf{X}_f \times Q_f \times X_p. \quad (2.11)$$

本文在流体区域中分别对速度和压力采用 Taylor-Hood 元、在多孔介质区域中对水势采用分片二次元进行离散. 定义有限元空间^[9]:

$$\begin{aligned} V_f^h &= \{v \in C(\Omega_f) : v|_\tau \in \mathcal{P}_2(\tau), v = 0 \text{ 在 } \partial\Omega_f \setminus \Gamma \text{ 上}, \forall \tau \in \mathcal{T}_f^h\}, \\ \mathbf{X}_f^h &= (V_f^h)^2, \\ Q_f^h &= \{q \in C(\Omega_f) : q|_\tau \in \mathcal{P}_1(\tau), \forall \tau \in \mathcal{T}_f^h\}, \\ X_p^h &= \{v \in C(\Omega_p) : v|_\tau \in \mathcal{P}_2(\tau), \forall \tau \in \mathcal{T}_p^h\}, \end{aligned}$$

其中, $\mathcal{T}_f^h$ 和 $\mathcal{T}_p^h$ 分别是 Ω_f 和 Ω_p 上的三角形剖分, $\mathcal{P}_i$ 表示次数为 i 的多项式空间.

对 Stokes-Darcy 方程的有限元离散为: 求 $(\mathbf{u}^h, p^h, \phi^h) \in \mathbf{X}_f^h \times Q_f^h \times X_p^h$, 使得

$$A((\mathbf{u}^h, p^h, \phi^h); (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h)) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h), \quad \forall (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h) \in \mathbf{X}_f^h \times Q_f^h \times X_p^h. \quad (2.12)$$

3 Stokes-Darcy 方程的 PPR 方法

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是边界为 $\partial\Omega$ 的多边形区域. 设 $\mathcal{M}_h$ 是 Ω 的正则三角形剖分, $\mathcal{E}_h$ 为所有内边的集合, $\mathcal{N}_h$ 为所有节点集合. 令 $V_h^k = \{v_h : v_h \in H^1(\Omega), v_h|_\tau \in \mathcal{P}_k(\tau), \forall \tau \in \mathcal{M}_h\}$, 其中, $\mathcal{P}_k(\tau)$ 为单元 τ 上的完全 k 次多项式空间, u_h 为有限元解.

PPR 方法的关键是用最小二乘方法拟合节点处的函数值, 即对于任意节点 $z_j \in \mathcal{N}_h$, 寻找多项式 $p_{k+1} \in \mathcal{P}_{k+1}(\tilde{K})$, 使得

$$\sum_{j=1}^n (p_{k+1} - u_h)^2(z_j) = \min_{q \in \mathcal{P}_{k+1}} \sum_{j=1}^n (q - u_h)^2(z_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

其中, $\tilde{K}$ 表示节点 z_j 的单元片, 节点 z_j 处的重构梯度定义为 $G_h u_h(z_j) = (\nabla p_{k+1})(z_j)$.

下面简要介绍用有限元数值解来构造梯度重构算子的过程. 对于任意 $z_j \in \mathcal{N}_h$, 假设 (ξ, η) 是节点 z_j 的局部坐标, 所求拟合多项式为

$$p_{k+1}(x, y; z_j) = \mathbf{P}^T \mathbf{a} = \hat{\mathbf{P}}^T \hat{\mathbf{a}}, \quad (3.1)$$

其中,

$$\mathbf{P}^T = (1, x, y, \dots, x^{k+1}, x^k y, \dots, y^{k+1}), \quad \hat{\mathbf{P}}^T = (1, \xi, \eta, \dots, \xi^{k+1}, \xi^k \eta, \dots, \eta^{k+1}), \quad \mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_m).$$

系数向量 $\hat{\mathbf{a}}$ 由以下线性方程组确定:

$$A^T A \hat{\mathbf{a}} = A^T \mathbf{b}_n, \quad (3.2)$$

其中 $\mathbf{b}_n = (u_h(z_{j1}), u_h(z_{j2}), \dots, u_h(z_{jn}))^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \cdots & \eta_1^{k+1} \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \cdots & \eta_2^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi_n & \eta_n & \cdots & \eta_n^{k+1} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

线性方程组 (3.2) 有唯一解的充要条件是

$$\text{rank}(A) = m. \quad (3.4)$$

定义节点 z_j 的重构梯度为

$$G_h u_h(z_j) = \nabla p_{k+1}(\xi = 0, \eta = 0; z_j). \quad (3.5)$$

对于任意 $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in V_h^k \times V_h^k$, 定义 z_j 的重构梯度为

$$G_h \mathbf{u} := (G_h u_1(z_j), G_h u_2(z_j))^T. \quad (3.6)$$

当节点 z_j 不是顶点且位于过顶点 z_{j1} 和 z_{j2} 的边的内部时,

$$G_h u_h(z_j) = \alpha \nabla p_{k+1}(\xi_1, \eta_1; z_{j1}) + (1 - \alpha) \nabla p_{k+1}(\xi_2, \eta_2; z_{j2}). \quad (3.7)$$

若 z_j 是三角单元内部节点, 它位于以 z_{j1} 、 z_{j2} 和 z_{j3} 为顶点的三角形的内部, 则

$$G_h u_h(z_j) = \sum_{i=1}^3 \alpha \nabla p_{k+1}(\xi_i, \eta_i; z_{ji}). \quad (3.8)$$

本文采用二次元 PPR ($k = 2$). 记重构节点 z_j 是三角形单元的顶点, h_j 为与 z_j 邻接的单元边中最长边的长度. 为确定节点 z_j 处的重构梯度值, 选取重构节点 z_j 附近的单元片. 首先选取所有在 $B_{h_j}(z_j) = \{z \in \Omega : |z - z_j| < h_j\}$ 内的节点, 如果节点数目 n 少于拟合所需的最小数目 $m = (k+2)(k+3)/2$, 则进而在 B_{2h_j} 中选择节点, 迭代此过程直到样本点数目 $n \geq m$. 本文选取的样本点都是三角形单元点, 逼近效果更好. 由已知样本点数据 (有限元数值解), 求一个三次拟合多项式

$$p_3(\xi, \eta) = (1, \xi, \eta, \dots, \xi\eta^2, \eta^3)(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{10}). \quad (3.9)$$

通过求解利用最小二乘拟合方法得到的线性方程组, 可以获得单元顶点上的重构梯度. 对于区域边界上的节点, 需要通过扩大单元片来进行重构.

3.1 有限元解与二次插值之间的误差超收敛

在实际数值计算中, 利用自适应有限元方法生成的网格尽管不是强正则的, 但是网格中大部分的相邻单元仍然组成一个近似平行四边形. 在这种轻度结构化网格上, 仍然可得到超收敛结果.

首先, 给出一些必要记号. 对于任意三角单元 $K \in \mathcal{M}_h$, 设其顶点 $z_k = (x_k, y_k)$ ($1 \leq k \leq 3$) 按逆时针方向排列. 记 $\{\mathbf{t}_k\}_{k=1}^3$ 为单元 K 的单位切向向量, θ 为单元边 e 在单元 K 中的对角, $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^3$ 为单元 K 各边的单位外法向量, $\{h_k\}_{k=1}^3$ 表示单元 K 的各边的长度. 单元边 e 被两个邻接的单元 K 和 K' 所共有, 将单元 K' 中对应的几何量通过加上标 ' 进行区别. 记 $\mathbf{t}_e$ 为单元边 e 的单位切向向量, $\mathbf{n}_e$ 为单元边 e 的单位外法向量, $\mathbf{t}_e = -\mathbf{t}'_e$ 以及 $\mathbf{n}_e = -\mathbf{n}'_e$. 此外, 记 $|K|$ 为单元 K 的面积.

定义 3.1 对于三角剖分 $\mathcal{M}_h$ 的内部边 e , 当 $|h_{e+1} - h'_{e+1}| \leq \varepsilon$ 和 $|h_{e-1} - h'_{e-1}| \leq \varepsilon$ 时, 称 Ω_e 为一个 ε 近似平行四边形.

定义 3.2 如果存在常数 $\rho > 0$, $0 \leq \sigma < 1$, 满足以下条件:

- (1) 对于内部边 $e \in \mathcal{E}_{1,h}$, Ω_e 形成一个 $O(h^{1+\rho})$ 近似平行四边形;
 - (2) 对于内部边 $e \in \mathcal{E}_{2,h}$, $|\Omega_{2,h}| = O(h^\sigma)$, $|\bar{\Omega}_{i,h}| \equiv \bigcup_{K \in \mathcal{M}_{i,h}} \bar{K}$, $i = 1, 2$,
- 则称三角剖分 $\mathcal{M}_h = \mathcal{M}_{1,h} \cup \mathcal{M}_{2,h}$ 满足 Condition(ρ, σ).

本文研究的三角剖分 $\mathcal{M}_h$ 是拟正则的, 即存在常数 $\delta > 0$, 使得

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \delta, \quad \forall K \in \mathcal{M}_h,$$

其中, h_K 为三角单元 K 的外接圆直径, ρ_K 为三角单元 K 的内接圆直径.

此外, 本文使用记号 $A \lesssim B$ 来表示不等式 $A \leq cB$, 其中 c 为常数, 且常数 c 只与三角剖分 $\mathcal{M}_h$ 的参数 δ 、三角形单元的最小内角和有界多边形区域 Ω 有关.

记 u 为给定区域 Ω 上的光滑函数, 定义 u 在三角剖分 $\mathcal{M}_h$ 上的分片二次插值为 $\Pi_Q u$, 分片三次插值为 $\Pi_C u$.

对于任意单元 K , 二次插值 $\Pi_Q u$ 满足如下条件:

$$\begin{aligned} (\Pi_Q u)(z) &= u(z), \quad \forall z \in \mathcal{N}_h, \\ \int_e \Pi_Q u &= \int_e u, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h. \end{aligned}$$

此外, 三次插值 $\Pi_C u$ 在单元 K 的每条边 e_i 上满足

$$\int_{e_i} (u - \Pi_C u) p_1 = 0, \quad \forall p_1 \in \mathcal{P}_1, \quad i = 1, 2, 3,$$

并且在单元 K 上满足 $\int_K (u - \Pi_C u) = 0$. 基于插值的定义, 对于 $\varphi \in H^4(K)$, 存在下列局部误差展开式 (具体证明可参见文献 [22]):

$$\begin{aligned} \int_K \nabla(\varphi - \Pi_Q \varphi) \cdot \nabla v_h &= \sum_{e \subset \partial K} \sum_{s=0}^3 \left(a_e^s(K) \frac{|K|}{h_e} + b_e^s(K) \right) \int_e \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \mathbf{n}_e^s \partial \mathbf{t}_e^{3-s}} \frac{\partial^2 v_h}{\partial \mathbf{t}_e^2} \\ &\quad + O(h_K^3) |\varphi|_{4,K} \|v_h\|_{1,K}, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_2(K), \end{aligned}$$

其中 $a_e^s(K)$ 和 $b_e^s(K)$ 为常数, 与单元 K 的几何形状有关.

引理 3.1 令 $(\mathbf{u}, p, \phi)$ 是 Stokes-Darcy 方程的解析解. $\Pi_Q \mathbf{u}$ 和 $\Pi_Q \phi$ 分别为 $\mathbf{u}$ 和 ϕ 在有限元空间上的整体二次有限元插值. 设 $\mathbf{u} \in (H^4(\Omega_f) \cap W^{3,\infty}(\Omega_f))^2$, $\phi \in H^4(\Omega_p) \cap W^{3,\infty}(\Omega_p)$, 有界多边形区域 Ω 上的三角剖分 $\mathcal{M}_h$ 满足 Condition(ρ, σ), 其中 $\rho > 0$, $0 \leq \sigma < 1$. 令 $\beta = \min(\rho, 1/2, \sigma/2)$, 对于任意 $\mathbf{v}^h \in \mathbf{X}_f^h$, $\psi^h \in X_p^h$, 成立如下误差估计:

$$\int_{\Omega_f} |\nabla(\mathbf{u} - \Pi_Q \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v}^h| \lesssim h^{2+\beta} (|\mathbf{u}|_{4,\Omega_f} + |\mathbf{u}|_{3,\infty,\Omega_f}) |\mathbf{v}^h|_{1,\Omega_f}, \quad (3.10)$$

$$\int_{\Omega_p} |\nabla(\phi - \Pi_Q \phi) \cdot \nabla \psi^h| \lesssim h^{2+\beta}(|\phi|_{4,\Omega_f} + |\phi|_{3,\infty,\Omega_f})|\psi^h|_{1,\Omega_p}. \quad (3.11)$$

引理 3.1 的证明参见文献 [22].

引理 3.2 ^[15] 令 $\hat{K}$ 是有限元的参考单元, 其 3 个顶点坐标分别为 $(0,0)$ 、 $(1,0)$ 和 $(0,1)$. $\hat{I}$ 是 $\hat{K}$ 上对应的线性有限元插值. 存在常数 C , 使得对于任意 $\hat{\varphi} \in H^3(\hat{K})$, 都有

$$\int_{\hat{K}} (\hat{\varphi} - \hat{I}\hat{\varphi})\hat{v}d\hat{x} = -\frac{1}{12} \int_{\hat{K}} (\varphi_{\hat{x}_1\hat{x}_1} - \varphi_{\hat{x}_1\hat{x}_2} + \varphi_{\hat{x}_2\hat{x}_2})\hat{v}d\hat{x} + O(h^3)\|\hat{\varphi}\|_{3,\Omega}\|\hat{v}\|_{1,\Omega}. \quad (3.12)$$

定理 3.1 设 $P_h: L^2(\Omega_f) \rightarrow Q_f^h$ 是 L^2 投影算子. Q_f^h 为分片连续线性有限元空间, 有界多边形区域 Ω 上的三角剖分 $\mathcal{M}_h$ 满足 Condition(ρ, σ), 其中 $\rho > 0$, $0 \leq \sigma < 1$. 令 $\rho = \min(\rho, 1/2, \sigma/2)$, 对于任意 $p \in H^3(\Omega_f) \cap W^{2,\infty}(\Omega_f)$, 成立如下误差估计:

$$b_f(\mathbf{v}^h, P_h p - p) \leq Ch^{2+\beta}(\|p\|_{3,\Omega_f} + \|p\|_{2,\infty,\Omega_f})\|\mathbf{v}^h\|_{1,\Omega_f}. \quad (3.13)$$

证明 由引理 3.2 得

$$\begin{aligned} b_f(\mathbf{v}^h, I_h p - p) &= -(I_h p - p, \operatorname{div} \mathbf{v}^h) \\ &= -\frac{1}{12} \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \int_K \operatorname{div} \mathbf{v}^h (h_1^2 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1}^2 p + h_1 h_3 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3}^2 p + h_3^2 \partial_{\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3}^2 p) dx + R, \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{X}_f^h. \end{aligned} \quad (3.14)$$

显然 $\operatorname{div} \mathbf{X}_f^h \subset Q_f^h$, 则有

$$(p - I_h p, w^h) = \frac{1}{12} \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \int_K (h_1^2 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1}^2 p + h_1 h_3 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3}^2 p + h_3^2 \partial_{\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3}^2 p) w^h dx + R, \quad \forall w^h \in Q_f^h. \quad (3.15)$$

利用投影的性质, 可得

$$(p - P_h p, w^h) = 0, \quad \forall w^h \in Q_f^h. \quad (3.16)$$

于是,

$$\begin{aligned} (I_h p - P_h p, w^h) &= (I_h p - p, w^h) \\ &= -\frac{1}{12} \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \int_K (h_1^2 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1}^2 p + h_1 h_3 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3}^2 p + h_3^2 \partial_{\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3}^2 p) w^h dx + R, \quad \forall w^h \in Q_f^h. \end{aligned} \quad (3.17)$$

利用分部积分, 可得

$$\begin{aligned} b_f(\mathbf{v}^h, P_h p - p) &= -(P_h p - p, \operatorname{div} \mathbf{v}^h) \\ &= (p - I_h p, \operatorname{div} \mathbf{v}^h) + (I_h p - P_h p, \operatorname{div} \mathbf{v}^h) \\ &= -\frac{1}{12} \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \int_K \operatorname{div} \mathbf{v}^h (h_1^2 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1}^2 p + h_1 h_3 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3}^2 p + h_3^2 \partial_{\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3}^2 p) dx + R \\ &= \frac{1}{12} \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \int_K \mathbf{v}^h \operatorname{div} (h_1^2 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1}^2 p + h_1 h_3 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3}^2 p + h_3^2 \partial_{\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3}^2 p) dx \\ &\quad - \frac{1}{12} \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \int_{\partial K} \mathbf{v}^h (h_1^2 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1}^2 p + h_1 h_3 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3}^2 p + h_3^2 \partial_{\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds + R. \end{aligned} \quad (3.18)$$

针对 (3.18) 最后一个等式的第一项, 由 Cauchy 不等式可得

$$\left| \frac{1}{12} \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \int_K \mathbf{v}^h \operatorname{div}(h_1^2 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1}^2 p + h_1 h_3 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3}^2 p + h_3^2 \partial_{\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3}^2 p) dx \right| \leq Ch_K^2 \|q\|_{3,K} \|\mathbf{v}^h\|_{0,K}. \quad (3.19)$$

针对 (3.18) 最后一个等式的第二项, 分别用切向向量 $\mathbf{t}_2$ 和法向向量 $\mathbf{n}_2$ 来替换切向向量 $\mathbf{t}_1$ 和 $\mathbf{t}_3$. θ_i ($i = 1, 2, 3$) 是单元边 e_i 的对角. 由三角形的性质以及文献 [15] 中的等式, 有

$$h_1^2 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1}^2 p + h_1 h_3 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3}^2 p + h_3^2 \partial_{\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3}^2 p = F \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2}^2 p + G \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{n}_2}^2 p + H \partial_{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2}^2 p,$$

其中,

$$\begin{aligned} F &= h_1^2 \cos^2 \theta_3 + h_1 h_3 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_3 + h_3^2 \cos^2 \theta_1, \\ G &= h_1 \sin^2 \theta_3 (h_3 \cos \theta_1 - h_1 \cos \theta_3), \\ H &= h_1^2 \sin^2 \theta_3. \end{aligned}$$

(3.18) 最后一个等式的第二项估计可转化为估计下式:

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \int_{\partial K} \mathbf{v}^h (h_1^2 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1}^2 p + h_1 h_3 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3}^2 p + h_3^2 \partial_{\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \sum_{e \subset \partial K} \int_e \mathbf{v}^h (h_1^2 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1}^2 p + h_1 h_3 \partial_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3}^2 p + h_3^2 \partial_{\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds \\ &=: I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中, I_1 为对应于内部边 $e \in \mathcal{E}_{1,h}$ 的和, 共享内部边 e 的两个三角单元 K 和 K' 对应的边界 ∂K 和 $\partial K'$ 在单元边 e 上满足 $\mathbf{t}_e = -\mathbf{t}'_e$ 和 $\mathbf{n}_e = -\mathbf{n}'_e$, 其中, $\mathbf{t}_e$ 为单元边 e 的单位切向向量, $\mathbf{n}_e$ 为单元边 e 的单位外法向量.

首先估计 I_1 , 对于 $e = \partial K \cap \partial K' \in \mathcal{E}_{1,h}$, $K \cup K'$ 形成一个 $O(h^{1+\rho})$ 近似平行四边形. 于是有

$$|h_1 - h'_1| \leq Ch_2^{1+\rho}, \quad h_e = h_2 = h'_2, \quad |h_3 - h'_3| \leq Ch_2^{1+\rho}.$$

从而有

$$|F - F'| \leq Ch_2^{2+\rho}, \quad |G - G'| \leq Ch_2^{2+\rho}, \quad |H - H'| \leq Ch_2^{2+\rho}.$$

于是,

$$|I_1| = \sum_{e \in \mathcal{E}_{1,h}} \left| \int_e \mathbf{v}^h ((F - F') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2}^2 p + (G - G') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{n}_2}^2 p + (H - H') \partial_{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds \right|, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_e \mathbf{v}^h ((F - F') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2}^2 p + (G - G') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{n}_2}^2 p + (H - H') \partial_{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds \right| \\ & \leq Ch_e^{2+\rho} \|\mathbf{v}^h\|_{0,e} \|p\|_{3,K \cup K'}, \quad \forall e \in \mathcal{E}_{1,h}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

接下来估计 I_2 . I_2 为对应于内部边 $e \in \mathcal{E}_{2,h}$ 的和, 满足

$$|F - F'| \leq Ch_2^2, \quad |G - G'| \leq Ch_2^2, \quad |H - H'| \leq Ch_2^2.$$

于是有

$$|I_2| = \sum_{e \in \mathcal{E}_{2,h}} \left| \int_e \mathbf{v}^h ((F - F') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2}^2 p + (G - G') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{n}_2}^2 p + (H - H') \partial_{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds \right|, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_e \mathbf{v}^h ((F - F') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2}^2 p + (G - G') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{n}_2}^2 p + (H - H') \partial_{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds \right| \\ & \leq Ch_e^2 \|\mathbf{v}^h\|_{0,e} \|p\|_{3,K \cup K'}, \quad \forall e \in \mathcal{E}_{2,h}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

最后估计 I_3 . I_3 对应所有边界边 $e \in \mathcal{E}_{3,h}$ 的和,

$$|I_3| = \sum_{e \in \mathcal{E}_{3,h}} \left| \int_e \mathbf{v}^h (F \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2}^2 p + G \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{n}_2}^2 p + H \partial_{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds \right|, \quad (3.25)$$

$$\left| \int_e \mathbf{v}^h (F \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2}^2 p + G \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{n}_2}^2 p + H \partial_{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds \right| \leq Ch_e^2 \|\mathbf{v}^h\|_{0,e} \|p\|_{3,K}. \quad (3.26)$$

由局部迹不等式, 可得

$$h_e \|\mathbf{v}^h\|_{0,e} \leq C |K|^{1/2} \|\mathbf{v}^h\|_{0,K}, \quad \forall e \subset \partial K, \quad K \in \mathcal{M}_h. \quad (3.27)$$

从而有

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_{i,h}} h_e \|\mathbf{v}^h\|_{0,e} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{M}_h} |K| \right)^{1/2} \|\mathbf{v}^h\|_0, \quad \forall e \subset \partial K, \quad K \in \mathcal{M}_h. \quad (3.28)$$

最后, 将 (3.28) 代入 (3.21)–(3.26), 可得

$$\begin{aligned} |I_1| &= \sum_{e \in \mathcal{E}_{1,h}} \left| \int_e \mathbf{v}^h ((F - F') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2}^2 p + (G - G') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{n}_2}^2 p + (H - H') \partial_{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds \right| \\ &\leq Ch^{1+\rho} \left(\sum_{K \in \mathcal{M}_{1,h}} |K| \right)^{1/2} \|p\|_{2,\infty,\Omega_f} \|\mathbf{v}^h\|_{0,\Omega_f} \\ &\leq Ch^{1+\rho} \|p\|_{2,\infty,\Omega_f} \|\mathbf{v}^h\|_{0,\Omega_f}, \\ |I_2| &= \sum_{e \in \mathcal{E}_{2,h}} \left| \int_e \mathbf{v}^h ((F - F') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2}^2 p + (G - G') \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{n}_2}^2 p + (H - H') \partial_{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds \right| \\ &\leq Ch \left(\sum_{K \in \mathcal{M}_{2,h}} |K| \right)^{1/2} \|p\|_{2,\infty,\Omega_f} \|\mathbf{v}^h\|_{0,\Omega_f} \\ &\leq Ch^{1+\sigma/2} \|p\|_{2,\infty,\Omega_f} \|\mathbf{v}^h\|_{0,\Omega_f}, \\ |I_3| &= \sum_{e \in \mathcal{E}_{3,h}} \left| \int_e \mathbf{v}^h (F \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2}^2 p + G \partial_{\mathbf{t}_2 \mathbf{n}_2}^2 p + H \partial_{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2}^2 p) \cdot \mathbf{n}_K ds \right| \\ &\leq Ch \left(\sum_{\overline{K} \cap \partial \Omega \neq \emptyset} |K| \right)^{1/2} \|p\|_{2,\infty,\Omega_f} \|\mathbf{v}^h\|_{0,\Omega_f} \\ &\leq Ch^{3/2} \|p\|_{2,\infty,\Omega_f} \|\mathbf{v}^h\|_{0,\Omega_f}. \end{aligned}$$

最后由范数的等价性, 可得

$$b_f(\mathbf{v}^h, P_h p - p) \leq Ch^{2+\beta} (\|p\|_{3,\Omega_f} + \|p\|_{2,\infty,\Omega_f}) \|\mathbf{v}^h\|_{1,\Omega_f}. \quad (3.29)$$

证毕. $\square$

定理 3.2 设 $(\mathbf{u}, p, \phi)$ 和 $(\mathbf{u}^h, p^h, \phi^h)$ 分别为 Stokes-Darcy 方程的变分问题和有限元逼近问题的解. 插值算子 Π_h 的定义如上 Π_Q 所述. 假设 $\mathbf{u} \in (H^4(\Omega_f) \cap W^{3,\infty}(\Omega_f))^2$, $p \in H^3(\Omega_f) \cap W^{2,\infty}(\Omega_f)$, $\phi \in H^4(\Omega_p) \cap W^{3,\infty}(\Omega_p)$, 有界多边形区域 Ω 上的三角剖分 $\mathcal{M}_h$ 满足 Condition (ρ, σ) , 其中 $\rho > 0$, $0 \leq \sigma < 1$. 令 $\beta = \min(\rho, 1/2, \sigma/2)$, 则成立如下误差估计:

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\|_{L^2(\Omega_f)} + \|\nabla(\Pi_h \phi - \phi^h)\|_{L^2(\Omega_p)} \\ & \leq Ch^{2+\beta}(|\mathbf{u}|_{4,\Omega_f} + |\mathbf{u}|_{3,\infty,\Omega_f} + \|p\|_{3,\Omega_f} + \|p\|_{2,\infty,\Omega_f} + |\phi|_{4,\Omega_p} + |\phi|_{3,\infty,\Omega_p}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

证明 类似于文献 [9] 的证明思路, 并注意到存在常数 $c > 0$, 使得

$$A((\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h); (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h)) \geq c(\|\mathbf{v}^h\|_{1,\Omega_f}^2 + \|\psi^h\|_{1,\Omega_p}^2). \quad (3.31)$$

由 $(\mathbf{u}, p, \phi)$ 和 $(\mathbf{u}^h, p^h, \phi^h)$ 的定义可知

$$A((\mathbf{u}, p, \phi); (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h)) = (f, \mathbf{v}^h), \quad \forall (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h) \in \mathbf{X}_f^h \times Q_f^h \times X_p^h, \quad (3.32)$$

$$A((\mathbf{u}^h, p^h, \phi^h); (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h)) = (f, \mathbf{v}^h), \quad \forall (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h) \in \mathbf{X}_f^h \times Q_f^h \times X_p^h. \quad (3.33)$$

将 (3.32) 和 (3.33) 两式相减得

$$A((\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, p - p^h, \phi - \phi^h); (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h)) = 0, \quad \forall (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h) \in \mathbf{X}_f^h \times Q_f^h \times X_p^h. \quad (3.34)$$

令 $\mathbf{v}^h = \Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$, $q^h = P_h p - p^h$, $\psi^h = \Pi_h \phi - \phi^h$, 由 Galerkin 正交性, 有

$$\begin{aligned} & A((\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h); (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h)) \\ & = A((\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}^h, P_h p - p^h, \Pi_h \phi - \phi^h); (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h)) \\ & = A((\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}, P_h p - p, \Pi_h \phi - \phi); (\mathbf{v}^h, q^h, \psi^h)) \\ & = a_f(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) + b_f(\mathbf{v}^h, P_h p - p) + g a_p(\Pi_h \phi - \phi, \psi^h) + \langle g(\Pi_h \phi - \phi), \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{n}_f \rangle \\ & \quad - \langle g(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_f, \psi^h \rangle + \alpha \langle P_\tau(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}), P_\tau \mathbf{v}^h \rangle - b_f(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}, q^h). \end{aligned}$$

由引理 3.1 易得

$$|a_f(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v}^h)| \leq Ch^{2+\beta}(|\mathbf{u}|_{4,\Omega_f} + |\mathbf{u}|_{3,\infty,\Omega_f})|\mathbf{v}^h|_{1,\Omega_f}, \quad (3.35)$$

$$|g a_p(\Pi_h \phi - \phi, \psi^h)| \leq Ch^{2+\beta}(|\phi|_{4,\Omega_p} + |\phi|_{3,\infty,\Omega_p})|\psi^h|_{1,\Omega_p}, \quad (3.36)$$

$$|b_f(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}, q^h)| \leq Ch^{2+\beta}(\|\mathbf{u}\|_{4,\Omega_f} + \|\mathbf{u}\|_{3,\infty,\Omega_f})\|q^h\|_{0,\Omega_f}. \quad (3.37)$$

由定理 3.1 可知

$$|b_f(\mathbf{v}^h, P_h p - p)| \leq Ch^{2+\beta}(\|p\|_{3,\Omega_f} + \|p\|_{2,\infty,\Omega_f})\|\mathbf{v}^h\|_{1,\Omega_f}. \quad (3.38)$$

利用 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned} |\langle g(\Pi_h \phi - \phi), \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{n}_f \rangle| & = \left| \int_{\Gamma} g(\Pi_h \phi - \phi) \cdot \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{n}_f \right| \leq \int_{\Gamma} |g(\Pi_h \phi - \phi) \cdot \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{n}_f| \\ & \leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\Pi_h \phi - \phi\|_{L^2(\Gamma)} \|\mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

由局部有限元插值理论, 对于任意 $e \in \mathcal{E}_h$, 成立 $\|\Pi_h \phi - \phi\|_{0,e} \lesssim h_e^3 |\phi|_{3,e}$, 从而有

$$\|\Pi_h \phi - \phi\|_{L^2(\Gamma)} = \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \|\Pi_h \phi - \phi\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2} \lesssim \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^6 |\phi|_{H^2(e)}^2 \right)^{1/2} \lesssim h^3 |\phi|_{3,\Gamma}, \quad (3.40)$$

利用 (3.39) 和 (3.40), 由迹定理可得

$$|\langle g(\Pi_h \phi - \phi), \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{n}_f \rangle| \lesssim \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\Pi_h \phi - \phi\|_{0,\Gamma} \|\mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim h^3 \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} |\phi|_{3,\Gamma} \|\mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (3.41)$$

同理, 可得

$$|\langle g(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_f, \psi^h \rangle| \lesssim \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{0,\Gamma} \|\psi^h\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim h^3 \|g\|_{L^\infty(\Gamma)} |\mathbf{u}|_{3,\Gamma} \|\psi^h\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (3.42)$$

类似地, 有

$$|\alpha \langle P_\tau(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}), P_\tau \mathbf{v}^h \rangle| \lesssim \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{0,\Gamma} \|\mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim h^3 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} |\mathbf{u}|_{3,\Gamma} \|\mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (3.43)$$

结合 (3.32)–(3.43) 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^h\|_{1,\Omega_f}^2 + \|\psi^h\|_{1,\Omega_p}^2 &\leq Ch^{2+\beta} (\|\mathbf{u}\|_{4,\Omega_f} + |\mathbf{u}|_{4,\Omega_f} + |\mathbf{u}|_{3,\infty,\Omega_f} + \|p\|_{3,\Omega_f} + \|p\|_{2,\infty,\Omega_f} \\ &\quad + \|\phi\|_{4,\Omega_f} + |\phi|_{3,\infty,\Omega_f}) (\|\mathbf{v}^h\|_{1,\Omega_f} + \|q^h\|_{0,\Omega_f} + \|\psi^h\|_{1,\Omega_p}). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Taylor-Hood 元满足 inf-sup 条件, 即存在 $\mathbf{w}^h \in \mathbf{X}_f^h$, 使得

$$\|q^h\|_{0,\Omega_f} \leq C \frac{|b(\mathbf{w}^h, q^h)|}{\|\mathbf{w}^h\|_{1,\Omega_f}}. \quad (3.45)$$

选取 $\psi^h \in X_p^h$, 使得 $\|\varphi^h\|_{1,\Omega_p} \leq C \|\mathbf{w}^h\|_{1,\Omega_f}$, 从而有

$$\begin{aligned} b(\mathbf{w}^h, q^h) &= b(\mathbf{w}^h, P_h p - p^h) = b(\mathbf{w}^h, P_h p - p) + b(\mathbf{w}^h, p - p^h), \\ b(\mathbf{w}^h, p - p^h) &= a_f(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{w}^h) + ga_p(\phi - \phi^h, \varphi^h) + \langle g(\phi - \phi^h), \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{n}_f \rangle \\ &\quad - \langle g(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{n}_f, \varphi^h \rangle + \alpha \langle P_\tau(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h), P_\tau \mathbf{w}^h \rangle \\ &= a_f(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}, \mathbf{w}^h) + ga_p(\phi - \Pi_h \phi, \varphi^h) + \langle g(\phi - \Pi_h \phi), \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{n}_f \rangle \\ &\quad - \langle g(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_f, \varphi^h \rangle + \alpha \langle P_\tau(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}), P_\tau \mathbf{w}^h \rangle \\ &\quad + a_f(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{w}^h) + ga_p(\Pi_h \phi - \phi^h, \varphi^h) + \langle g(\Pi_h \phi - \phi^h), \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{n}_f \rangle \\ &\quad - \langle g(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{n}_f, \varphi^h \rangle + \alpha \langle P_\tau(\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}^h), P_\tau \mathbf{w}^h \rangle. \end{aligned} \quad (3.46)$$

由 (3.32)–(3.43) 的超收敛估计, 有

$$\begin{aligned} b(\mathbf{w}^h, q^h) &\leq Ch^{2+\beta} (\|\mathbf{u}\|_{4,\Omega_f} + |\mathbf{u}|_{3,\infty,\Omega_f} + \|p\|_{3,\Omega_f} + \|p\|_{2,\infty,\Omega_f} \\ &\quad + \|\phi\|_{4,\Omega_f} + |\phi|_{3,\infty,\Omega_f}) (\|\mathbf{w}^h\|_{1,\Omega_f} + \|\varphi^h\|_{1,\Omega_p}). \end{aligned} \quad (3.47)$$

从而有

$$\|q^h\|_{0,\Omega_f} \leq Ch^{2+\beta} (\|\mathbf{u}\|_{4,\Omega_f} + |\mathbf{u}|_{3,\infty,\Omega_f} + \|p\|_{3,\Omega_f} + \|p\|_{2,\infty,\Omega_f} + \|\phi\|_{4,\Omega_f} + |\phi|_{3,\infty,\Omega_f}). \quad (3.48)$$

结合 (3.44) 和 (3.48), 从而定理得证. $\square$

3.2 PPR 超收敛误差估计

本小节首先介绍梯度重构算子 G_h 的一些性质 (参见文献 [40]), 进一步给出 Stokes-Darcy 方程中 $\nabla \mathbf{u}$ 和 $G_h \mathbf{u}^h$ 以及 $\nabla \phi$ 和 $G_h \phi^h$ 的后验误差估计.

- (1) G_h 是线性有界的: $\|G_h v_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\nabla v_h\|_{L_2(\Omega)}, \forall v_h \in V_h^k$.
- (2) G_h 满足保多项式性质: $G_h(I_h p) = \nabla p, \forall p \in P_{k+1}(\Omega)$.
- (3) $|(G_h \varphi)(z)| \lesssim \frac{1}{h_K} \max_{z' \in \mathcal{N}_h \cap \omega_K} |\varphi(z')|, \forall K \in \mathcal{M}_h, z \in \mathcal{N}_h$, 其中, $\omega_K = \bigcup \{\omega_z : z \in \mathcal{N}_h \cap K\}$, ω_z 为以节点 z 为重构点的单元片.

(4) $G_h u_h$ 超收敛于 ∇u .

关于性质 (4), 存在如下分解:

$$\begin{aligned} \|G_h u_h - \nabla u\|_{L_2} &\leq \|G_h u_h - G_h I_h u\|_{L_2} + \|G_h I_h u - \nabla u\|_{L_2} \\ &\lesssim \|\nabla(u_h - I_h u)\|_{L_2} + \|G_h I_h u - \nabla u\|_{L_2}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

其中 $I_h u$ 为 u 在有限元空间上的插值. 在本文中, (3.49) 右端的第一项的估计可由定理 3.2 给出, 为了给出第二项的估计, 考虑如下引理.

引理 3.3 ^[35] 假设 $\mathcal{M}_h$ 是有界多边形区域 Ω 上的正则三角网格剖分. V_h^2 为三角剖分 $\mathcal{M}_h$ 上的 H^2 -协调二次有限元空间, $G_h : C(\Omega) \rightarrow V_h^2 \times V_h^2$ 为 Lagrange 二次元梯度重构算子. φ_I 是 φ 的线性插值. 对于任意三角单元 $K \in \mathcal{M}_h$ 及任意函数 $\phi \in H^3(\omega_K)$, 都有

$$\|G_h \varphi_I - \nabla \varphi\|_{L^2(K)} \lesssim C h_K^3 |\varphi|_{H^3(\omega_K)}. \quad (3.50)$$

证明 记 $(\nabla \varphi)_I$ 是 $\nabla \varphi$ 的线性插值, 于是有

$$\|G_h \varphi_I - \nabla \varphi\|_{L^2(K)} \leq \|G_h \varphi_I - (\nabla \varphi)_I\|_{L^2(K)} + \|(\nabla \varphi)_I - \nabla \varphi\|_{L^2(K)}. \quad (3.51)$$

由有限元插值定理, 可得

$$\|(\nabla \varphi)_I - \nabla \varphi\|_{L^2(K)} \lesssim h_K^2 |\varphi|_{H^3(K)} \lesssim h_K^3 |\varphi|_{W^{3,\infty}(\omega_K)}. \quad (3.52)$$

对于节点 $z \in K$, 令 $\varphi_2(x, y)$ 是 φ 在节点 z 处的二阶 Taylor 展开式, 于是有

$$|\varphi(x, y) - \varphi_2(x, y)| \lesssim h_K^3 |\varphi|_{W^{3,\infty}(\omega_K)}, \quad \forall (x, y) \in \omega_K. \quad (3.53)$$

由性质 (2) 和 (3), 可得

$$\begin{aligned} |(G_h \varphi_I - (\nabla \varphi)_I)(z)| &= |(G_h \varphi_I - \nabla \varphi)(z)| = |(G_h(\varphi_I - \varphi_2) - (\nabla \varphi - \nabla \varphi_2))(z)| \\ &= |(G_h(\varphi_I - \varphi_2))(z)| \lesssim \frac{1}{h_K} \max_{z' \in \mathcal{N}_h \cap \omega_K} |(\varphi - \varphi_2)(z')| \\ &\lesssim h_K^2 |\varphi|_{W^{3,\infty}(\omega_K)}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

于是有

$$\|G_h \varphi_I - (\nabla \varphi)_I\|_{L^2(K)} \lesssim h_K \max_{z \in \mathcal{N}_h \cap K} |(G_h \varphi_I - (\nabla \varphi)_I)(z)| \lesssim h_K^3 |\varphi|_{W^{3,\infty}(\omega_K)}. \quad (3.55)$$

从而引理得证. $\square$

定理 3.3 设 $(\mathbf{u}, p, \phi)$ 和 $(\mathbf{u}^h, p^h, \phi^h)$ 分别为 Stokes-Darcy 方程的变分问题和有限元逼近问题的解. 假设 $\mathbf{u} \in (H^4(\Omega_f) \cap W^{3,\infty}(\Omega_f))^2$, $p \in H^3(\Omega_f) \cap W^{2,\infty}(\Omega_f)$, $\phi \in H^4(\Omega_p) \cap W^{3,\infty}(\Omega_p)$, 有界多边形区域 Ω 上的三角剖分 $\mathcal{M}_h$ 满足 Condition (ρ, σ) , 其中 $\rho > 0$, $0 \leq \sigma < 1$. 令 $\beta = \min(\rho, 1/2, \sigma/2)$. 则成立如下误差估计:

$$\begin{aligned} & \|G_h \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_f)} + \|G_h \phi^h - \nabla \phi\|_{L^2(\Omega_p)} \\ & \lesssim Ch^{2+\beta}(|\mathbf{u}|_{4,\Omega_f} + |\mathbf{u}|_{3,\infty,\Omega_f} + \|p\|_{3,\Omega_f} + \|p\|_{2,\infty,\Omega_f} + |\phi|_{4,\Omega_p} + |\phi|_{3,\infty,\Omega_p}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

证明 由引理 3.3 可得

$$\begin{aligned} & \|G_h \Pi_h \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_f)} + \|G_h \Pi_h \phi - \nabla \phi\|_{L^2(\Omega_p)} \\ & = \left(\sum_{K \in \mathcal{M}_h} \|G_h \Pi_h \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{K \in \mathcal{M}_h} \|G_h \Pi_h \phi - \nabla \phi\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\ & \lesssim h^3 \left(\sum_{K \in \mathcal{M}_h} |\mathbf{u}|_{H^3(\omega_K)}^2 \right)^{1/2} + h^3 \left(\sum_{K \in \mathcal{M}_h} |\phi|_{H^3(\omega_K)}^2 \right)^{1/2} \\ & \lesssim h^3(|\mathbf{u}|_{H^3(\Omega_f)} + |\phi|_{H^3(\Omega_p)}). \end{aligned} \quad (3.57)$$

由 (3.57), 并结合定理 3.2, 从而定理得证. $\square$

4 Stokes-Darcy 方程的自适应有限元算法

自适应有限元是根据计算结果和已知量自动控制计算过程的方法, 通过逐步调整网格, 从而以尽量少的计算量达到所要求的精度, 提高计算效率. 其主要思想是, 通过后验误差估计子的指示, 利用有限元解及给定数据等可计算量在每个剖分单元上计算误差指示子来衡量逼近误差, 挑选误差指示子较大的单元进行标注加密, 形成新的网格, 最终将网格自由度分布在解具有奇性的区域, 在降低计算量的同时提高逼近精度, 从而达到最优计算复杂度.

自适应算法由以下几个循环组成:

求解 $\rightarrow$ 误差估计 $\rightarrow$ 标记 $\rightarrow$ 加密.

- (1) 求解: 给定初始网格, 计算当前网格上的有限元解;
- (2) 误差估计: 利用数值解和其他已知量计算出可靠有效的误差估计子;
- (3) 标记: 根据所计算的误差估计子确定合适的标记策略, 挑选需要加密的单元进行加密;
- (4) 加密: 利用某种加密方法对已经标记好的单元进行加密, 得到新的网格剖分.

接下来用一个数值算例来验证基于 PPR 算子 G_h 的误差估计子 η 的渐近精度. 数值实验基于 MATLAB 软件包 iFEM^[8] 实现.

考虑如下 L 型区域问题, 选取的求解区域为 $\Omega_f = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Omega_p = (-1, 1) \times (-1, 0)$, 精确解为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_f &= \text{curl}(3(x_1^2 + x_2^2)^{-4/3}(x_1(x_1 - 1))^2(x_2(x_2 - 1))^2), \\ p &= x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1), \\ \phi_p &= \frac{(x_1 - 1)^2(x_1 + 1)^2 x_2^2 (x_2 + 1)^2}{8r^{5/6}}, \end{aligned}$$

其中 $r = x_1^2 + x_2^2$, $\nu = 0.01$. 容易验证 $\mathbf{u}_f \in (H^{4/3}(\Omega_f))^2$, $\phi_p \in H^{4/3}(\Omega_p)$.

定义单元 K 上的后验误差估计子为

$$\eta_K = \|G_h \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}^h\|_{0,K} + \|G_h \phi^h - \nabla \phi^h\|_{0,K}, \quad (4.1)$$

全局误差估计子为

$$\eta = \left(\sum_{K \in \mathcal{M}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}. \quad (4.2)$$

同时记有效因子为

$$\epsilon = \frac{\eta}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega_f} + \|\phi - \phi^h\|_{1,\Omega_p}}. \quad (4.3)$$

基于 PPR 方法构造的重构型后验误差估计子, 设计 Stokes-Darcy 方程的自适应有限元求解算法如下:

- (1) 给定区域 Ω 的初始三角网格剖分 $\mathcal{M}_h^0$, 阈值 (误差容限) 为 Tol.
- (2) 在剖分 $\mathcal{M}_h^k$ 上求得数值解 $\mathbf{u}$ 和 ϕ , 依梯度重构型后验误差估计的定义计算 η_S 和 η_D . η_S 和 η_D 分别是 Stokes 域和 Darcy 域的全局后验误差估计量. 若 η_S 和 η_D 满足预先给定的 Tol, 则计算结束, 否则进行下一步计算.
- (3) 计算每个单元的误差值 $\eta_{K,S}$ 和 $\eta_{K,D}$, 如果 $\eta_{K,S} \geq \theta \eta_{\max}$ 或 $\eta_{K,D} \geq \theta \eta_{\max}$, 则将单元 K 进行标记, $\theta \in (0, 1)$ 为指定参数.
- (4) 采用二分法细化被标记的单元, 直到误差估计值 $\eta_{K,S}$ 和 $\eta_{K,D}$ 小于给定的误差容限 Tol, 停止细化, 产生新网格, 进入下一步, 否则, 返回 (2).
- (5) 在新的网格上更新方程的数值解.

本文采用 Dörfler 标记策略: 给定参数 θ_E ($0 < \theta_E < 1$), 构造 $\mathcal{M}_h$ 的最小子集 $\tilde{\mathcal{M}}_h$, 使得

$$\sum_{K \in \tilde{\mathcal{M}}_h} \eta_K^2 \geq \theta_E \eta^2, \quad (4.4)$$

取参数 $\theta_E = 0.15$.

算子 G_h 重构梯度在 Ω 上的 L^2 误差为

$$\begin{aligned} \|G_h \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}^h\|_{0,\Omega_f} &= \sqrt{\|G_h u_1^h - \nabla u_1^h\|_{0,\Omega_f}^2 + \|G_h u_2^h - \nabla u_2^h\|_{0,\Omega_f}^2}, \\ \|G_h \phi^h - \nabla \phi^h\|_{0,\Omega_p} &= \sqrt{\int_{\Omega_p} \left(G_h^x \phi^h - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(G_h^y \phi^h - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 dx dy}. \end{aligned}$$

选定的初始网格为 $\Omega_f : (4 \times 4) \times 2$ 和 $\Omega_p : (8 \times 4) \times 2$ 个等腰直角三角形组成的 L 型区域, 自适应算法共进行了 100 次迭代计算, 采用二分法对每次迭代后的网格进行加密调整.

图 2(a) 为第 40 次自适应计算时的网格, 图 2(b) 为第 100 次自适应计算时的网格. 从图 2 中可以发现, 在靠近原点的区域, 网格是密集的; 而在远离原点的区域, 网格是稀疏的. 从而由上面的观察可以得出, 该耦合问题的解在原点附近具有奇性. 显然, 该算法准确判断出了方程的解出现奇性的位置, 并在奇性区域添加节点, 对网格进行加密, 进而减小逼近解的误差.

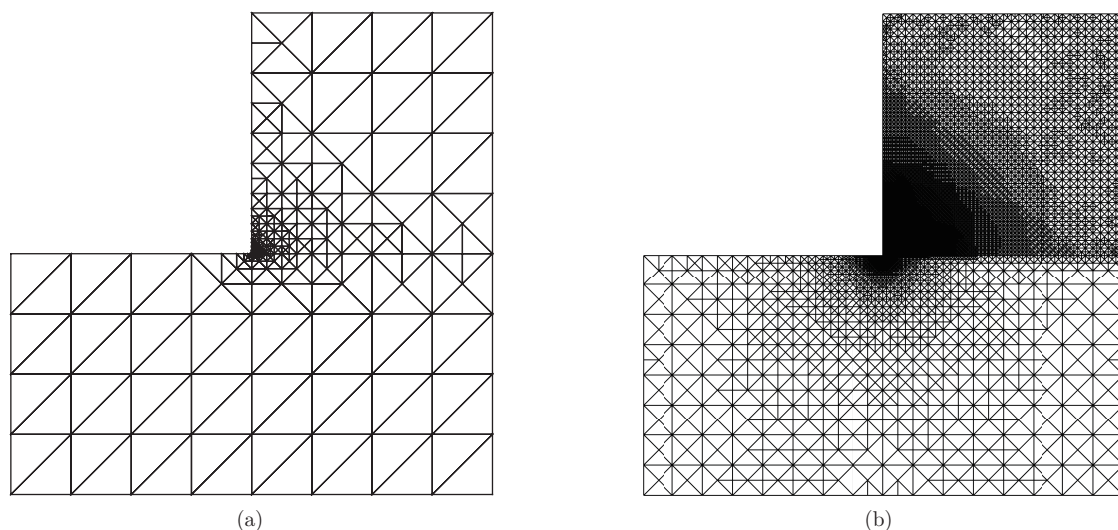


图 2 (a) 第 40 步自适应网格; (b) 第 100 步自适应网格

图 3 中各曲线分别表示误差的各种范数及后验误差估计子, 图 3(a) 中估计子 $\eta_S = \|G_h \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}^h\|_{0, \Omega_f}$, 图 3(b) 中估计子 $\eta_D = \|G_h \phi^h - \nabla \phi^h\|_{0, \Omega_p}$, 可以得出重构梯度与真实梯度的 L^2 范数意义下的后验误差 $\|G_h \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}\|$ 和 $\|G_h \phi^h - \nabla \phi\|$ 达到了超收敛.

为了更直观验证本文所构造的后验误差估计子的有效性, 图 4 给出了自适应计算过程中, 有效因子随自适应迭代变化的走势. 从图 4 可以看出, 有效因子

$$\epsilon = \frac{\eta}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1, \Omega_f} + \|\phi - \phi^h\|_{1, \Omega_p}} \rightarrow 1 \quad (h \rightarrow 0).$$

从而验证了后验误差估计子与真实误差等价, 可用于引导网格的自适应加密且是渐近准确的.

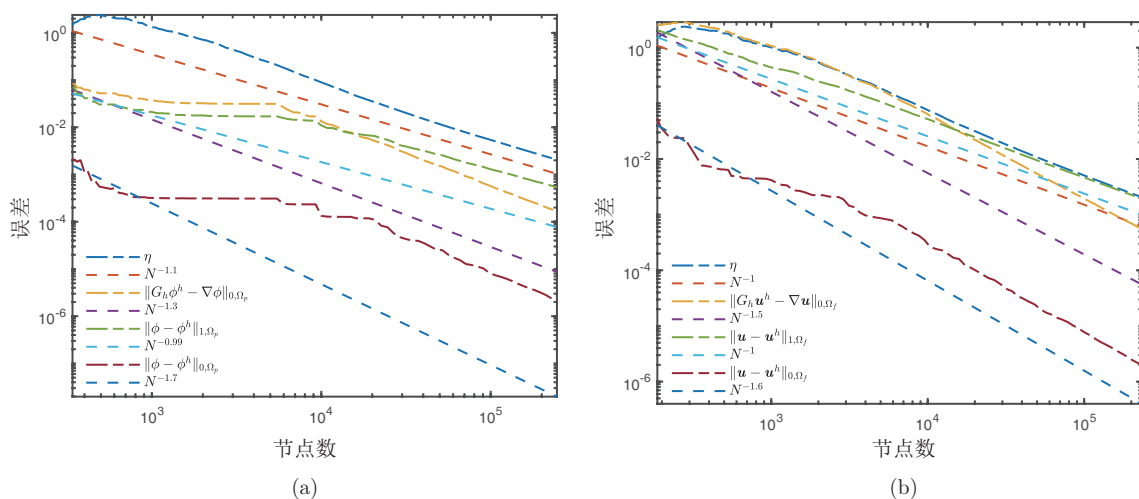


图 3 (网络版彩图) 误差对比图. (a) Darcy 区域; (b) Stokes 区域

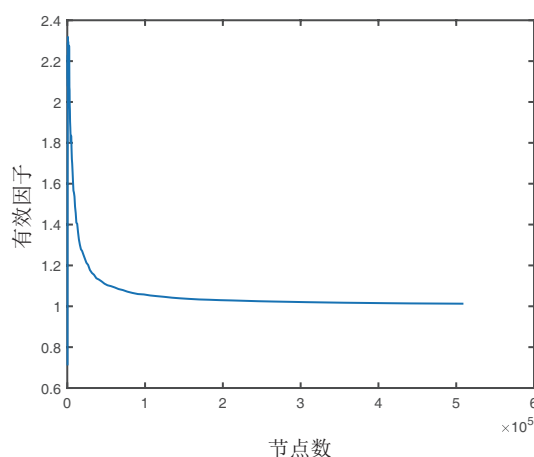


图 4 (网络版彩图) 有效因子趋势图

5 结论

PPR 方法由于其具有高精度、计算简单和易于实现等优点, 在工程界得到了广泛的应用. 本文将 PPR 方法运用到 Stokes-Darcy 耦合问题的后验误差估计及自适应有限元求解中, 证明了重构梯度是超收敛的, 以及基于 PPR 方法构造的后验误差估计子是渐近准确的, 从而拓展了 PPR 方法的已有工作.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Ainsworth M, Oden J T. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. Pure and Applied Mathematics. New York: Wiley-Interscience, 2000
- 2 Badea L, Discacciati M, Quarteroni A. Numerical analysis of the Navier-Stokes/Darcy coupling. Numer Math, 2010, 115: 195–227
- 3 Beavers G S, Joseph D D. Boundary conditions at a naturally permeable wall. J Fluid Mech, 1967, 30: 197–207
- 4 Bernardi C, Hecht F, Nouri F Z. A new finite-element discretization of the Stokes problem coupled with the Darcy equations. IMA J Numer Anal, 2010, 30: 61–93
- 5 Burman E, Hansbo P. Stabilized Crouzeix-Raviart element for the Darcy-Stokes problem. Numer Methods Partial Differential Equations, 2005, 21: 986–997
- 6 Camaño J, Gatica G N, Oyarzúa R, et al. New fully-mixed finite element methods for the Stokes-Darcy coupling. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2015, 295: 362–395
- 7 Cao Y Z, Gunzburger M, Hu X L, et al. Finite element approximations for Stokes-Darcy flow with Beavers-Joseph interface conditions. SIAM J Numer Anal, 2010, 47: 4239–4256
- 8 Chen L. iFEM: An innovative finite element methods package in MATLAB. Technical Report, University of California at Irvine, 2009
- 9 Chen W B, Chen P Y, Gunzburger M, et al. Superconvergence analysis of FEMs for the Stokes-Darcy system. Math Methods Appl Sci, 2010, 33: 1605–1617
- 10 Cui M, Yan N N. A posteriori error estimate for the Stokes-Darcy system. Math Methods Appl Sci, 2011, 34: 1050–1064
- 11 Das D B, Nassehi V, Wakeman R J. A finite volume model for the hydrodynamics of combined free and porous flow in sub-surface regions. Adv Environ Res, 2003, 7: 35–58
- 12 Discacciati M, Miglio E, Quarteroni A. Mathematical and numerical models for coupling surface and groundwater flows. Appl Numer Math, 2002, 43: 57–74
- 13 Discacciati M, Quarteroni A. Convergence analysis of a subdomain iterative method for the finite element approximation of the coupling of Stokes and Darcy equations. Comput Vis Sci, 2004, 6: 93–103

- 14 Du Y, Zhang Z M. Supercloseness of linear DG-FEM and its superconvergence based on the polynomial preserving recovery for Helmholtz equation. *J Sci Comput*, 2019, 79: 1713–1736
- 15 Eichel H, Tobiska L, Xie H H. Supercloseness and superconvergence of stabilized low-order finite element discretizations of the Stokes problem. *Math Comp*, 2011, 80: 697
- 16 Ervin V J, Jenkins E W, Sun S. Coupled generalized nonlinear Stokes flow with flow through a porous medium. *SIAM J Numer Anal*, 2009, 47: 929–952
- 17 Girault V, Rivière B. DG approximation of coupled Navier-Stokes and Darcy equations by Beaver-Joseph-Saffman interface condition. *SIAM J Numer Anal*, 2009, 47: 2052–2089
- 18 Guo H L, Yang X. Polynomial preserving recovery for high frequency wave propagation. *J Sci Comput*, 2017, 71: 594–614
- 19 Hanspal N S, Waghode A N, Nassehi V, et al. Numerical analysis of coupled Stokes/Darcy flows in industrial filtrations. *Transp Porous Media*, 2006, 64: 73–101
- 20 Hood P, Taylor C. Navier-Stokes equation using mixed interpolation. In: Oden J T, ed. *Finite Element Methods in Flow Problems*. Columbia: UAH Press, 1974, 121–132
- 21 Huang C, Zhang Z M. Polynomial preserving recovery for quadratic elements on anisotropic meshes. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2012, 28: 966–983
- 22 Huang Y Q, Xu J C. Superconvergence of quadratic finite elements on mildly structured grids. *Math Comp*, 2008, 77: 1253–1268
- 23 Jones I P. Low Reynolds number flow past a porous spherical shell. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1973, 73: 231–238
- 24 Karper T, Mardal K A, Winther R. Unified finite element discretizations of coupled Darcy-Stokes flow. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2009, 25: 311–326
- 25 Layton W J, Schieweck F, Yotov I. Coupling fluid flow with porous media flow. *SIAM J Numer Anal*, 2003, 40: 2195–2218
- 26 Li B, Zhang Z M. Analysis of a class of superconvergence patch recovery techniques for linear and bilinear finite elements. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 1999, 15: 151–167
- 27 Mardal K A, Tai X C, Winther R. A robust finite element method for Darcy-Stokes flow. *SIAM J Numer Anal*, 2003, 40: 1605–1631
- 28 Masud A. A stabilized mixed finite element method for Darcy-Stokes flow. *Int J Numer Methods*, 2010, 54: 665–681
- 29 Mu M, Xu J C. A two-grid method of a mixed Stokes-Darcy model for coupling fluid flow with porous media flow. *SIAM J Numer Anal*, 2007, 45: 1801–1813
- 30 Naga A, Zhang Z M. A posteriori error estimates based on the polynomial preserving recovery. *SIAM J Numer Anal*, 2004, 42: 1780–1800
- 31 Rui H X, Zhang R. A unified stabilized mixed finite element method for coupling Stokes and Darcy flows. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2009, 198: 2692–2699
- 32 Salinger A G, Aris R, Derby J J. Finite element formulations for large-scale, coupled flows in adjacent porous and open fluid domains. *Numer Methods Fluids*, 2010, 18: 1185–1209
- 33 Urquiza J M, N'Dri D, Garon A, et al. Coupling Stokes and Darcy equations. *Appl Numer Math*, 2008, 58: 525–538
- 34 Wang R S, Zhang R, Zhang X, et al. Supercloseness analysis and polynomial preserving recovery for a class of weak Galerkin finite element methods. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2017, 34: 317–335
- 35 Wu H J, Zhang Z M. Can we have superconvergent gradient recovery under adaptive meshes? *SIAM J Numer Anal*, 2007, 45: 1701–1722
- 36 Wu H J, Zhang Z M. Enhancing eigenvalue approximation by gradient recovery on adaptive meshes. *IMA J Numer Anal*, 2018, 29: 1008–1022
- 37 Xie X P, Xu J C, Xue G R. Uniformly stable finite element methods for Darcy-Stokes-Brinkman models. *J Comput Math*, 2008, 26: 437–455
- 38 Xu J C, Zhang Z M. Analysis of recovery type a posteriori error estimators for mildly structured grids. *Math Comp*, 2003, 73: 1139–1153
- 39 Zhang Z M. Polynomial preserving recovery for anisotropic and irregular grids. *J Comput Math*, 2004, 22: 331–340
- 40 Zhang Z M. Recovery techniques in finite element methods. In: *Adaptive Computations: Theory and Algorithms*. Beijing: Science Press, 2007, 297–365
- 41 Zhang Z M. Polynomial preserving recovery for meshes from Delaunay triangulation or with high aspect ratio. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2010, 24: 960–971
- 42 Zhang Z M, Naga A. A new finite element gradient recovery method: Superconvergence property. *SIAM J Sci Comput*, 2005, 26: 1192–1213

Polynomial-preserving recovery finite element method for the Stokes-Darcy system

Ming Cui, Yanan Wang, Baiju Zhang & Zhimin Zhang

Abstract In recent years, the Stokes-Darcy system has attracted much attention due to its wide applications in hydrology, environmental science, petroleum engineering, and many other fields. In this paper, we study finite element methods for the Stokes-Darcy system, especially the superconvergence property and the *a posteriori* error estimation based on the polynomial-preserving recovery (PPR). PPR is a post-processing technique that reconstructs numerical gradients with higher accuracy. We prove that the gradient reconstructed by PPR is superconvergent, and the *a posteriori* error estimator based on PPR is asymptotically exact. Numerical experiments are presented to validate our theoretical analysis.

Keywords Stokes-Darcy system, polynomial-preserving recovery, *a posteriori* error estimator, superconvergence

MSC(2020) 65M60, 65N30

doi: 10.1360/SSM-2021-0209