

基于恒星优化选取的星敏感器在轨标定方法

赵心语, 侯博文, 孙博文, 周萱影, 王炯琦

(国防科技大学 理学院, 长沙 410073)

摘 要: 针对航天器在轨运行中, 其光学参数受到太空复杂环境的影响会产生一定的偏移, 若不及时矫正光学参数会严重影响航天器姿态估计的精度问题, 传统的在轨标定方法一般基于星内角距不变原理, 但其计算复杂度高, 在计算和存储资源严重受限的深空探测器难以实现。引入基于奇异值分解不变原理的标定方法, 通过奇异值大小去量化并标定系统的可观测性, 在此基础上基于可观测性优化选取恒星的分布与组合, 并结合扩展卡尔曼滤波 (Extended Kalman Filter, EKF) 对星敏感器光学参数进行标定。仿真结果表明, 与传统的恒星优选方法相比, 提出的方法可较好地抑制恒星观测误差。

关键词: 星敏感器; 在轨标定; 奇异值分解不变性; 恒星分布; 优化组合

中图分类号: V44

文献标识码: A

文章编号: 2096-9287(2025)02-0133-11

DOI: 10.15982/j.issn.2096-9287.2025.20240046

引用格式: 赵心语, 侯博文, 孙博文, 等. 基于恒星优化选取的星敏感器在轨标定方法[J]. 深空探测学报 (中英文), 2025, 12 (2): 133-143.

Reference format: ZHAO X Y, HOU B W, SUN B W, et al. On-orbit calibration method for star sensor based on optimal star selection[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2025, 12 (2): 133-143.

引 言

航天器姿态估计是航天器控制的基础, 星敏感器为其姿态估计提供了关键信息源。目前使用星敏感器进行姿态测量的精度可达到 $1''$, 星敏感器已成为航天器必备的星载测量设备之一^[1-4]。

星敏感器在安装之前需先进行地面标定, 目前已有很多成熟的地面标定方法^[5-7]。但星敏感器在轨运行过程中其内部光学参数会受到航天器振动和太空高温高压环境的影响而产生一定的偏移, 若不及时矫正会严重影响航天器姿态估计的精度^[8-10]。因此, 需实时在轨标定星敏感器的光学参数, 实现高精度的姿态估计^[11-14]。

目前星敏感器在轨标定的主流方法是基于星内角距不变的原理。Junkins等^[15]基于星内角距不变的原理, 构建了余弦观测方程并结合最小二乘法标定星敏感器内部的光学参数。Chen等^[16]通过改良最小二乘法, 解耦了星敏感器内部畸变和外部偏差。赫志达^[17]分析了星敏感器误差源的相互耦合关系, 提出了改进余弦两步法用于星敏感器内部参数的标定。李响等^[18]结合星内角距不变原理和扩展卡尔曼滤波实现了内部光学参数的实时标定。上述研究基于星内角距不变原理提出了一系列的标定方法, 但基于星内角距不变原

理的核心步骤是最小二乘法, 涉及高维矩阵的求逆运算, 计算效率低, 求解时间长, 对星上计算和存储资源严重受限的深空探测器来说难以实现。针对此问题Wu等^[19]提出基于奇异值分解不变原理的在轨标定方法。许倩^[20]考虑了温度急剧变化下, 星敏感器在轨标定结合扩展的卡尔曼滤波, 将恒星坐标矢量的奇异值作为测量信息, 实现了高性能在轨标定。由于深空探测器的计算和存储资源严重受限, 无法解算和存储大量恒星, 需优化选取恒星。针对此问题, 冯文灏^[21]用恒星影像的中心透视成像原理进行标定, 提出在标定过程中, 选取恒星分布越均匀, 标定效果越好。在此基础上谢俊峰等^[22]量化了恒星的均匀分布, 采用凸包选取分布较为均匀的图像用于标定, 通过凸包面积占图像面积的百分比实现恒星选取。许倩^[20]基于奇异值分解不变性, 从恒星之间不同的组合出发, 选取了几种常见的恒星组合方式对比其标定效果。上述方法针对恒星优选做了初步研究, 但对最优恒星组合的研究局限于定性分析, 理论意义不强, 难以实现高精度的在轨标定。

针对上述问题, 本文引入基于奇异值分解不变性的在轨标定准则, 结合扩展卡尔曼滤波实现高精度在

收稿日期: 2024-07-08 修回日期: 2024-09-26

基金项目: 国家自然科学基金 (62203458); 科工局稳定支持项目 (HTKJ2023KL502012); 国防科技大学青年自主创新科学基金 (ZK23-01)

轨标定。基于可观测性理论分析在轨标定系统的可观测性,通过奇异值来量化可观测性,从而实现最优恒星的选取,仿真结果表明本文提出的方法在计算复杂度和标定精度方面与传统方法相比有一定的优越性。

1 星敏感器成像模型与误差分析

1.1 成像模型

星敏感器成像模型的参考坐标系包括3个:星敏感器坐标系、物理图像坐标系和像素坐标系,如图1所示。 $o_c - x_c y_c z_c$ 为星敏感器坐标系,星敏感器坐标系的原点 o_c 为光心, z_c 轴为光轴, $x_c y_c$ 围成的平面与CCD感光面平行。 $o' - xy$ 为物理图像坐标系,物理图像坐标系平行于星敏感器坐标系的 xoy 平面,该平面与光轴的交点即为主点 o' 。 $o - uv$ 为像素坐标系,原点为图像平面左上角的顶点, u 轴和 v 轴分别与物理图像坐标系的 x 轴和 y 轴平行。图1(a)描述了星敏感器坐标系与物理图像坐标系之间的关系,图1(b)描述了物理图像坐标系与像素坐标系之间的关系,其中: $\mathbf{w} = [x_c, y_c, z_c]^T$ 为星敏感器坐标系的任意恒星矢量, $\mathbf{p} = [x, y]^T$ 为 $\mathbf{w}$ 在物理图像坐标系的投影, $\mathbf{p}' = [u, v]^T$ 为 $\mathbf{w}$ 在像素坐标系的投影,其相互转换关系为

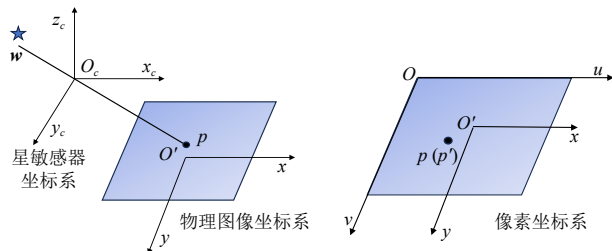
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{f_D}{z_c} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z} \begin{bmatrix} f_D & 0 & u_0 \\ 0 & f_D & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中: $[u, v, 1]^T$ 为 $\mathbf{p}'$ 的齐次坐标。

$$f_D = \frac{f}{D} \quad (3)$$

其中: f 为焦距; D 为水平和垂直像素尺寸,假设水平和垂直方向的像素尺寸一致。



(a) 物理图像坐标系与星敏感器坐标系 (b) 像素坐标系

图1 相机模型的3个参考坐标系

Fig. 1 Three reference coordinate systems of camera model

由于星敏感器镜头制造工艺不完备,存在畸变,镜头畸变可表示为

$$\begin{cases} u_d = u + \delta_u(u, v) \\ v_d = v + \delta_v(u, v) \end{cases} \quad (4)$$

其中: u 和 v 为像素坐标系的无畸变坐标; $\delta_u(u, v)$ 和 $\delta_v(u, v)$ 分别为 u 和 v 方向的畸变,本文考虑一阶和二阶径向畸变

$$\begin{cases} \delta_u(u, v) = u(k_1 r^2 + k_2 r^4) \\ \delta_v(u, v) = v(k_1 r^2 + k_2 r^4) \end{cases} \quad (5)$$

其中: k_1 和 k_2 为径向畸变系数。

$$r^2 = \frac{(u - u_0)^2}{f_D^2} + \frac{(v - v_0)^2}{f_D^2} \quad (6)$$

综上所述,恒星在星敏感器坐标系的坐标可通过恒星在像素坐标系的坐标计算获得,其关系可表示为

$$\mathbf{w} = [x_c, y_c, z_c]^T = F(f, u_0, v_0, k_1, k_2, \mathbf{P}_s) \quad (7)$$

其中: u_0 、 v_0 为主点坐标; f 为焦距; k_1 、 k_2 为畸变系数,均为待标定参数; $\mathbf{P}_s$ 为像素坐标系中恒星的坐标。

1.2 星敏感器误差分析

传统的星敏感器待标定光学参数包括5个部分^[23]:主点 u_0 、 v_0 ,焦距 f ,畸变系数 k_1 、 k_2 ,星敏感器姿态的旋转矩阵 $\mathbf{R}_w$ 和平移向量 $\mathbf{t}$ 。

主点误差、焦距误差、畸变系数是星敏感器由于制造工艺所产生的误差,在轨运行过程中极易发生偏移,对星敏感器的成像结果影响极大,是星敏感器在轨标定的关键环节。旋转或者平移恒星矢量不会显著改变恒星组成矩阵的奇异值,基于奇异值分解的标定方法并不能有效标定姿态的旋转矩阵和平移向量。焦距和主点的偏移对奇异值的影响更大,其误差更容易分离。故在本文中星敏感器的误差仅由主点误差、焦距误差、畸变系数组成。

1) 主点误差与焦距误差

主点误差是光轴与CCD感光面的交点与感光面坐标原点的位移,焦距误差是实际焦距与星敏感器理论焦距之间的偏差,如图2所示。 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ 为理想点坐标,当存在焦距误差时,恒星将投影到坐标 $P_k(x_k, y_k, z_k)$,在星敏感器坐标系下,二者的坐标转换关系为

$$\begin{cases} x_i = x_k f / (f + \Delta f) \\ y_i = y_k f / (f + \Delta f) \\ z_i = z_k + \Delta f \end{cases} \quad (8)$$

不妨设标定后的主点为 $(0, 0)$,实际主点为 (x_0, y_0) ,考虑主点误差时,恒星坐标 (x_r, y_r) 可表示为

$$\begin{cases} x_r = x_i - x_0 \\ y_r = y_i - y_0 \end{cases} \quad (9)$$

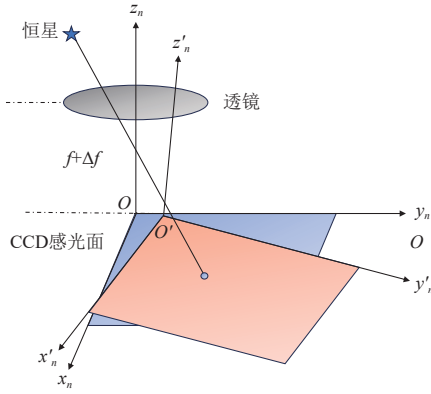


图2 星敏传感器成像模型
Fig. 2 Star tracker imaging model

2) 光学系统畸变

光学系统畸变是影响星敏传感器性能的关键因素, 由于光学镜头生产的工艺问题, 镜头的实际成像与理论成像总是存在一定的非线性畸变, 导致实际成像点偏离理想成像点, 如图3所示。光学畸变图像沿光轴对称, 距离CCD感光面坐标原点的距离越远, 受畸变的影响越大。

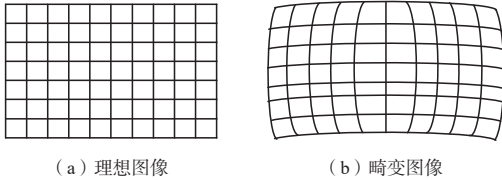


图3 畸变效果
Fig. 3 Comparison of distortion effects

2 基于奇异值分解的在轨标定方法

2.1 奇异值分解不变性

基于奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD) 不变性的在轨标定方法, 两个坐标系可通过姿态阵相互转换实现, C 为星敏传感器坐标系的任意恒星矢量, V 为天球惯性坐标系与之对应的恒星矢量。

$$W = CV \quad (10)$$

其中: W 和 V 为恒星矢量 w_i 和 v_i 叠加起来的矩阵。

$$\begin{cases} W = [w_1, w_2, \dots, w_N] \\ V = [v_1, v_2, \dots, v_N] \end{cases} \quad (11)$$

通过奇异值分解, 矩阵 W 和 V 可分解为

$$\begin{cases} W = P_w \Sigma_w Q_w^T = \sum_{i=1}^3 p_{wi} \sigma_{wi} q_{wi}^T \\ V = P_v \Sigma_v Q_v^T = \sum_{i=1}^3 p_{vi} \sigma_{vi} q_{vi}^T \end{cases} \quad (12)$$

若视场内恒星数量不少于3个, 则存在3个奇异值。

将式 (10) 两边右乘 W^T 可得

$$WW^T = CVV^T C^T \quad (13)$$

代入式 (12) 可得

$$\begin{cases} WW^T = P_w \Sigma_w Q_w^T Q_w \Sigma_w^T P_w^T = P_w S_w P_w^T = CVV^T C^T = \\ CP_v \Sigma_v Q_v^T Q_v \Sigma_v^T P_v^T C^T = CP_v S_v P_v^T C^T \\ P_w S_w P_w^T = CP_v S_v P_v^T C^T \end{cases} \quad (14)$$

其中: S_w 和 S_v 分别为 WW^T 和 VV^T 的奇异值 σ_{wi}^2 和 σ_{vi}^2 ($i = 1, 2, 3$) 组成的对角矩阵。

因 C 为正交矩阵, 故式 (13) 是一个相似变换, 则 WW^T 和 VV^T 的奇异值相等, 即

$$\sigma_{wi}^2 = \sigma_{vi}^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

由奇异值的非负性可知, W 和 V 的奇异值相等, 即

$$\sigma_{wi} = \sigma_{vi}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

综上可知由恒星矢量组成的矩阵在坐标变换下的奇异值相等。

2.2 基于扩展卡尔曼滤波的在轨标定

由恒星矢量组成矩阵的奇异值可通过星敏传感器自身获取的测量数据计算得出, 奇异值分解不变性为在轨标定提供了一种新的参考。假设 $SV(\cdot)$ 表示奇异值求解算子, 则式 (16) 可表示为

$$\sigma_{wi} = SV(W) = \sigma_{vi} = SV(V), \quad i = 1, 2, 3 \quad (17)$$

代入式 (7) 可得

$$\sigma_{wi} = \sigma_{vi} = SV(V) = SV(F(x_0, y_0, f, k_1, k_2, P_d)), \quad i = 1, 2, 3 \quad (18)$$

其中: $P_d = [P_1, P_2, \dots, P_N]$ 为像素坐标系观测到的恒星坐标集合, 星图识别后将观测到的恒星坐标 P_d 与星表中对应的恒星矢量 V 进行匹配。星表的精度较高, 通过 V 计算的奇异值具有很高的精度。可将式 (18) 作为测量方程。

由于测量方程是非线性的, 测量方程可被扩展卡尔曼滤波 (Extended Kalman Filter, EKF) 线性化来估计星敏传感器的光学参数。状态方程和测量方程分别为

$$\begin{cases} x_k = I_{6 \times 6} \cdot x_{k-1} \\ z_k = h(x_k) + \eta_c \end{cases} \quad (19)$$

其中: $x_k = [x_{k0}, y_{k0}, f, k_{k1}, k_{k2}]^T$ 为待估参数, x_k 和 x_{k-1} 分别为图像编号为 k 和 $k-1$ 对应的状态参数。假设星敏感

器的光学参数为常值, 则状态转移矩阵应为6阶单位矩阵 $I_{6 \times 6}$, $\mathbf{z}_k = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T$ 可通过匹配星表的恒星矢量 $\mathbf{V}$ 来计算; $h(\mathbf{x}_k)$ 为奇异值求解算子 $SV(F(x_0, y_0, f, k_1, k_2, \mathbf{P}_d))$ 的简化表示; η_c 为由噪声引起的测量误差, 通过地面标定可得到的噪声协方差矩阵 $\mathbf{P}_0$ 和参数 $\mathbf{x}_0$ 的值, 通过滤波实现对星敏感器光学参数的实时更新。对于第 k 幅星图, EKF 预测方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k^- = \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_{k-1} + \mathbf{Q} \end{cases} \quad (20)$$

其中: $\mathbf{Q}$ 为先验估计误差的协方差矩阵。

EKF 的更新方程为

$$\begin{cases} \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R})^{-1} \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^-)) \\ \mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \end{cases} \quad (21)$$

其中: $\mathbf{R}$ 为测量噪声的协方差矩阵; $\mathbf{H}_k$ 为 $SV(\cdot)$ 线性化后的测量矩阵。

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\delta h}{\delta \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_k^-} \quad (22)$$

由于 $\mathbf{H}_k$ 的计算较为复杂, 很难找到其解析解, 可通过数值微分来计算测量矩阵 $\mathbf{H}_k$ 。

3 基于可观测性的恒星选择

3.1 在轨标定系统的可观测性分析

可观测性是衡量系统状态能否作为过去时刻测量值唯一确定的标准。本文设计的在轨标定系统测量方程为非线性方程, 将测量方程简化为线性方程, 用可观测性矩阵分析系统的可观测性。

对于标定系统式 (19), 将其线性化后的可观测性矩阵定义为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{F}_k \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{k+n-1}, \mathbf{F}_{k+n-2}, \cdots, \mathbf{F}_k \end{bmatrix} \quad (23)$$

状态转移矩阵 $\mathbf{F}_k = \mathbf{I}, k = 1, 2, \dots$, 则式 (23) 可简化为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{k+n-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

定理 1. 当选取恒星数量小于或等于3时, 系统不可观。

证明: 当选取恒星数量小于3时, 此时不存在3个奇异值, $\text{rank}(\mathbf{H}_k) \neq 5$, 可观测矩阵不满秩, 系统不可观; 当选取恒星数量等于3时, $\mathbf{H}_k$ 的阶数为3, 显然有 $\text{rank}(\mathbf{H}_k) \leq 3 \neq 5$, 可观测矩阵不满秩, 系统不可观。

定理 2. 当选取恒星数量大于3时, 且存在不全为0的奇异值向量时, 系统可观。

证明: 当恒星选取个数大于3时, 3个恒星为一组, 相互组合, 此时 $\mathbf{H}_k$ 的阶数大于5, $\mathbf{H}_k$ 为测量方程线性化之后的测量矩阵, 定义为

$$\begin{cases} \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k \\ \mathbf{H}_k = \left. \frac{\delta h(\mathbf{x})}{\delta \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_k^-} \end{cases} \quad (25)$$

其中: $\mathbf{z}_k$ 为由恒星矢量叠加之后的奇异值组成的向量, 由于奇异值分解具有唯一性, 奇异值分解的唯一性可表示为由测量矩阵组成的非齐次线性方程组 $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k$ 有唯一解, $\mathbf{H}_k$ 为系数矩阵, $\mathbf{x}_k$ 为未知变量。

若 $\mathbf{z}_k$ 为零向量, 非齐次线性方程组退化为齐次线性方程组, 此时只存在零解或无穷多解, $\mathbf{x}_k$ 不能被唯一确定, 系统不可观。

若 $\mathbf{z}_k$ 为非零向量, 非齐次线性方程组 $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k$ 有唯一解, 矩阵 $\mathbf{H}_k$ 需要满足非齐次线性方程组有解的充分必要条件, 即 $\text{rank}(\mathbf{H}_k) = 5, k = 1, 2, \dots$, 综上所述则有

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{k+n-1} \end{pmatrix} = \text{rank}(\mathbf{H}_k) = 5 \quad (26)$$

3.2 奇异值的可观测性分析与评价指标构建

系统的可观测性可用给定输入输出的偏差来度量, 在输入给定的情况下, 输出的偏差越大则可观测性越强。从奇异值物理意义出发分析奇异值大小与可观测性的关系, 如图4所示, $\mathbf{w}_i$ 为恒星矢量, 根据奇异值分解的物理意义, 计算矩阵 $\mathbf{W}$ 最大奇异值的平方

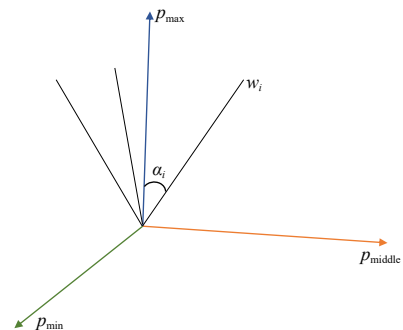


图4 矩阵奇异值分解的物理意义

Fig. 4 Physical significance of matrix singular value decomposition

$$\sigma_1^2 = \max_{\|p_{\max}=1\|} \|WW^T p_{\max}\| = \max_{\|p_{\max}=1\|} \left\| \sum_{i=1}^N w_i w_i^T p_{\max} \right\| \quad (27)$$

其中: $p_{\max}$ 为最大奇异值 σ_1 对应的左奇异向量, 就物理意义而言 $p_{\max}$ 为恒星矢量 w_i 投影到 $p_{\max}$ 之和的最大的矢量。同理, $p_{\min}$ 为恒星矢量 w_i 投影到 $p_{\min}$ 之和的最小矢量, $p_{\min}$ 和 $p_{\max}$ 组成的平面垂直, 式 (27) 可改写为

$$\sigma_1^2 = \max_{\|p_{\max}=1\|} \sum_{i=1}^N \|\cos \alpha_i\| \quad (28)$$

其中: α_i 为 w_i 与 $p_{\max}$ 的夹角, $\sin \alpha_i$ 的大小可表示为 σ_1 的偏差, 由于 $p_{\max}$ 垂直于与 $p_{\min}$ 和 $p_{\max}$ 组成的平面, α_i 与 w_i 和 $p_{\min}$ 组成的夹角互余, 因此 σ_2, σ_3 的偏差与 $\cos \alpha_i$ 的大小有关, 在小视场的情况下, $\cos \alpha_i$ 大于 $\sin \alpha_i$, 故 σ_1 的偏差小于 σ_2, σ_3 , 扩大 σ_2, σ_3 的偏差可显著增强系统的可观测性, 而 σ_2, σ_3 的偏差与 $\cos \alpha_i$ 的大小有关, 只需扩大 $\cos \alpha_i$ 即可, σ_1 与 $\cos \alpha_i$ 成正比, 即扩大 σ_2, σ_3 的偏差等价于最大化最小的奇异值, 但由于对奇异值上界的研究较少且并不完备, 目前未给出较为完备的上界, 可通过对最小奇异值最大化来间接使最大奇异值最大化。

与奇异值有关的可观测性有两种评价指标, 相对条件数 (Relative Conditional Number, RCN) 和绝对条件数 (Absolute Conditional Number, ACN)。

相对条件数: 相对条件数也称为条件数, 若矩阵 W 的所有特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$, 它的相对条件数定义为最大奇异值与最小奇异值的比值, 即

$$RCN = \lambda_1 / \lambda_3 \quad (29)$$

绝对条件数: 若矩阵 W 的所有特征值分别为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$, 它的相对条件数定义最小奇异值的逆, 即

$$ACN = \lambda_3^{-1} \quad (30)$$

相对条件数是相对测量误差的放大倍数确界, 上界是指相对误差放大倍数必然达到 RCN 。但一般来说, 相对误差没有量纲, 不利于理解, 在实际应用中很少用到相对条件数的概念。对于本文提出的方法, 绝对条件数优于相对条件数。

3.3 恒星构型及组合选择

选取恒星数量大于3可得到3个奇异值, 若使用星敏传感器视场的所有恒星来计算奇异值, 只能得到3个奇异值, 计算量大且测量矩阵 H_k 仅有3行, H_k 的阶数小于状态参数的个数, 由定理1可知, 此时系统不可观。针对此问题, 可将恒星分成若干组, 使得 H_k 的阶数大

于状态参数的个数。而恒星之间有不同的组合, 故需优化恒星组合, 为简化求解奇异值的计算复杂度, 用较少的恒星得到较多的测量信息。不妨3个恒星一组, 使每个组合的恒星数量达到产生3个奇异值所满足的最低的恒星数量。若选取3颗恒星, 则恒星矩阵 W 是一个 3×3 的方阵, 此时求解矩阵的奇异值可通过求解特征值来实现, 对于一个方阵二者满足关系为

$$\sigma_i(W) = |\lambda_i(W)| \quad (31)$$

相对于奇异值特征值的分解计算复杂度更低, 选取3个恒星为一组有效地降低了计算复杂度。

由3.2节可知, $\sigma_{\min}$ 可作为评价标定模型的指标, $\sigma_{\min}$ 越大可观测性越强, 标定精度越高, 对于恒星优选问题, 可以转化为优化问题

$$\begin{cases} \max_{P_d=[P_1, P_2, \dots, P_l]} \min(\sigma_{\min}(W_1), \sigma_{\min}(W_2), \dots) \\ W_k = [w_i \quad w_j \quad w_l] \\ w_i = F(x_0, y_0, f, k_1, k_2, P_i) \end{cases} \quad (32)$$

其中: $P_d = [P_1, P_2, \dots, P_l]$ 为图像坐标系观测到所有恒星坐标的集合; $F(\cdot)$ 为反射函数可将成像后像素坐标系的二维坐标转换到星敏传感器坐标系。

求解此优化问题只需给出矩阵最小奇异值 $\sigma_{\min}$ 的下界, 在给定下界的基础上, 最大化该下界, 可以得到使最小奇异值最大的恒星组合。

对于矩阵最小奇异值下界的研究, 主要集中在方阵, 此时矩阵的奇异值可通过求解特征值来得到。1989年Johnson^[24]得到了如下结论, 对于一个 n 阶方阵, 设

$$r_k(A) = \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \quad c_k(A) = \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{jk}| \quad (33)$$

则

$$\sigma_{\min}(A) \geq \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ |a_{kk}| - \frac{1}{2} [r_k(A) + c_k(A)] \right\} \quad (34)$$

Johnson^[25]在此基础上得到如下结论

$$\sigma_{\min}(A) \geq \min_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{1}{2} (|a_{kk}| + |a_{jj}|) - \sqrt{(|a_{kk}| - |a_{jj}|)^2 + [r_k(A) + c_k(A)][r_j(A) + c_j(A)]} \right\} \quad (35)$$

在式 (35) 给定最小特征值下界的基础上, 最大化该下界, 理论上可通过对矩阵元素求导得到最小特征值下界的最大值, 但求导形式过于复杂, 很难得到解析解。从数量级出发, $P_d = [P_1, P_2, \dots, P_N]$ 为图像坐标系所有观测到恒星坐标的集合, 不妨令 $P_1 = (x_1,$

$y_1) \mathbf{P}_2 = (x_2, y_2) \mathbf{P}_3 = (x_3, y_3)$, 若不考虑主点、焦距、畸变等误差, 其在星敏感器坐标系的坐标为

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} \begin{bmatrix} -x_i \\ -y_i \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{wi} \\ -y_{wi} \\ f_i \end{bmatrix} \quad (36)$$

矩阵 $\mathbf{W}$ 可表示为

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -x_{w1} & -x_{w2} & -x_{w3} \\ -y_{w1} & -y_{w2} & -y_{w3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

在小视场的情况下, $x, y \gg f_i$, 由式 (35) 可知, 若 $k=3$ 或 $j=3$, 根据对称性可知此时对应的最小特征值下界为

$$B = \left\{ -\sqrt{\frac{[f_1 + f_2 + |x_{w3}| + |y_{w3}|][|x_{w2}| + |f_2| + |y_{w1}| + |y_{w3}|] + (|f| - |y_{w2}|)^2}{(|f_3| + |y_{w2}|)^2}} + \frac{1}{2} (|f_3| + |y_{w2}|) \right\} \quad (38)$$

若 $k=1, j=2$ 或 $j=1, k=2$, 根据对称性可知此时对应的最小特征值下界为

$$C = \left\{ -\sqrt{\frac{[f_1 + |y_{w1}| + |x_{w3}| + |x_{w2}|][|x_{w2}| + |f_2| + |y_{w1}| + |y_{w3}|] + (|x_{w1}| - |y_{w2}|)^2}{(|x_{w1}| + |y_{w2}|)^2}} + \frac{1}{2} (|x_{w1}| + |y_{w2}|) \right\} \quad (39)$$

从量纲分析可知 $C < B$, 因此在理想情况下, 最小特征值的下界由 $k=1, j=2$ 或 $j=1, k=2$ 取得。从式 (39) 的结构看, 放大 C , 等价于使 $|x_{w1}| + |y_{w2}|$ 尽可能的大, 同时 $|x_{w1}| - |y_{w2}|$ 尽可能小, 即使 $|x_{w1}|, |y_{w2}|$ 同时达到最大, 且二者在大小上一致, $|y_{w1}|, |x_{w2}|, |x_{w3}|, |y_{w3}|$ 尽可能小。根据上述分析, 对于理想恒星的分布, $\mathbf{P}_1$ 在 x 轴的最左边或最右边, $\mathbf{P}_2$ 在 y 轴的最上边或最下边, $\mathbf{P}_3$ 在中间原点处。如图5所示, 每一块三角形对应一

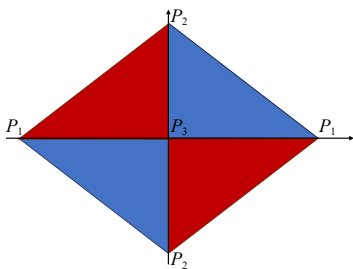


图5 理想的恒星构型

Fig. 5 Ideal configuration of stars

个最优构型, 每个恒星至少使用两次, 用较少的点来扩充 $\mathbf{H}_k$ 的阶数, 图5中4个三角形可以组成4个测量矩阵, 且每块三角形恒星矢量投影到星敏感器坐标系不共线, 即构成的矩阵不存在全为零的特征值向量, 满足定理2中的可观测条件。

3.4 计算复杂度分析

基于传统的星内角距不变原理方法核心在于用最小二乘法迭代使待估计参数收敛, 核心公式为

$$\Delta \mathbf{X}_l^k = \left[(\mathbf{A}^k)^T \mathbf{A}^k \right]^{-1} \mathbf{A}^k \mathbf{R}^k \quad (40)$$

该方法需多次迭代, 且每次迭代过程中都涉及矩阵求逆运算, 矩阵 $\mathbf{A}^k$ 的维数随着选取恒星数量的增加呈几何倍数增加, 迭代求解时间长运算量大。

对于本文提出的基于奇异值分解结合扩展卡尔曼滤波在轨标定方法, 在滤波更新过程中矩阵求逆运算只涉及增益 $\mathbf{K}_k$ 的求解, 观察增益 $\mathbf{K}_k$ 的结构, 其中: $(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R})^{-1}$ 维数与 $\mathbf{H}_k$ 的阶数保持一致, 而 $\mathbf{H}_k$ 的阶数与选取恒星的数量有关, 最低为3。在收敛速度方面, 结合基于可观测性的选星方法可增加滤波的收敛速度, 快速收敛到真实值。与传统方法相比, 避免了高维矩阵的求逆运算, 降低了计算复杂度, 节约了计算资源。

4 仿真验证

本文对所提出的星敏感器在轨标定方案进行数值模拟。在仿真实验中初始焦距22.5 mm, 视场 $19.14^\circ \times 11.18^\circ$, 更新频率2 Hz, 地面标定的光学参数 $\mathbf{x}_0 = [10, 10, 22.5, 0.5, -0.5]^T$ 。实验采用的仿真数据包括惯性坐标系的三维星矢量坐标及其在像素坐标系对应的二维恒星矢量坐标, 并加入了均值0.1 pixel、标准差为1的高斯白噪声二维恒星矢量坐标。

4.1 不同恒星构型对标定结果的影响

特征值向量的残差不能较好地评估在轨标定性能, 本文用星内角距偏差作为评估在轨标定性能的指标。星内角距偏差基于星内角距不变原理, 用无误差的仿真数据, 将二维图像投影到星敏感器坐标系, 计算无误差数据和投影数据之间的星内角距偏差。

为验证本文所提构型的合理性, 将所提的恒星组合与文献[20]所提的恒星组合对比, 其恒星构型为叠加形式, 如图6所示, 此构型综合了各种恒星, 其可观测性相较于其它构型来说具有一定的优越性, 但随恒星数量的增加也使得其计算复杂度呈几何倍数增加, 计算效率较低。

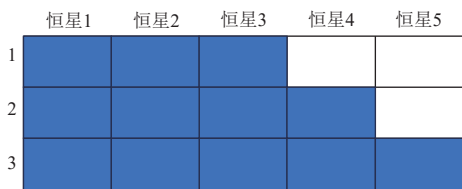


图6 恒星叠加示意图

Fig. 6 Schematic of stellar superposition

连续对300幅图像进行仿真标定, 对比两种不同恒星组合的在轨标定性能, 最小特征值所选取的恒星数

量和恒星组合方式如图5所示, 恒星叠加构型选取的恒星数量与图5保持一致, 选取方式为随机选取, 恒星组合方式如图6所示。两种恒星组合在标定过程中畸变系数、焦距、主点的变化情况, 并用标定后的结果计算两种组合星内角距偏差, 结果如图7所示。

两种恒星组合在畸变系数的表现没有较大的差异, 基于最小特征值的恒星组合收敛速度略快, 在标定50幅图像之后二者均能得到收敛, 与主点和焦距相比, 畸变系数对成像影响较大, 容易标定。对于在焦

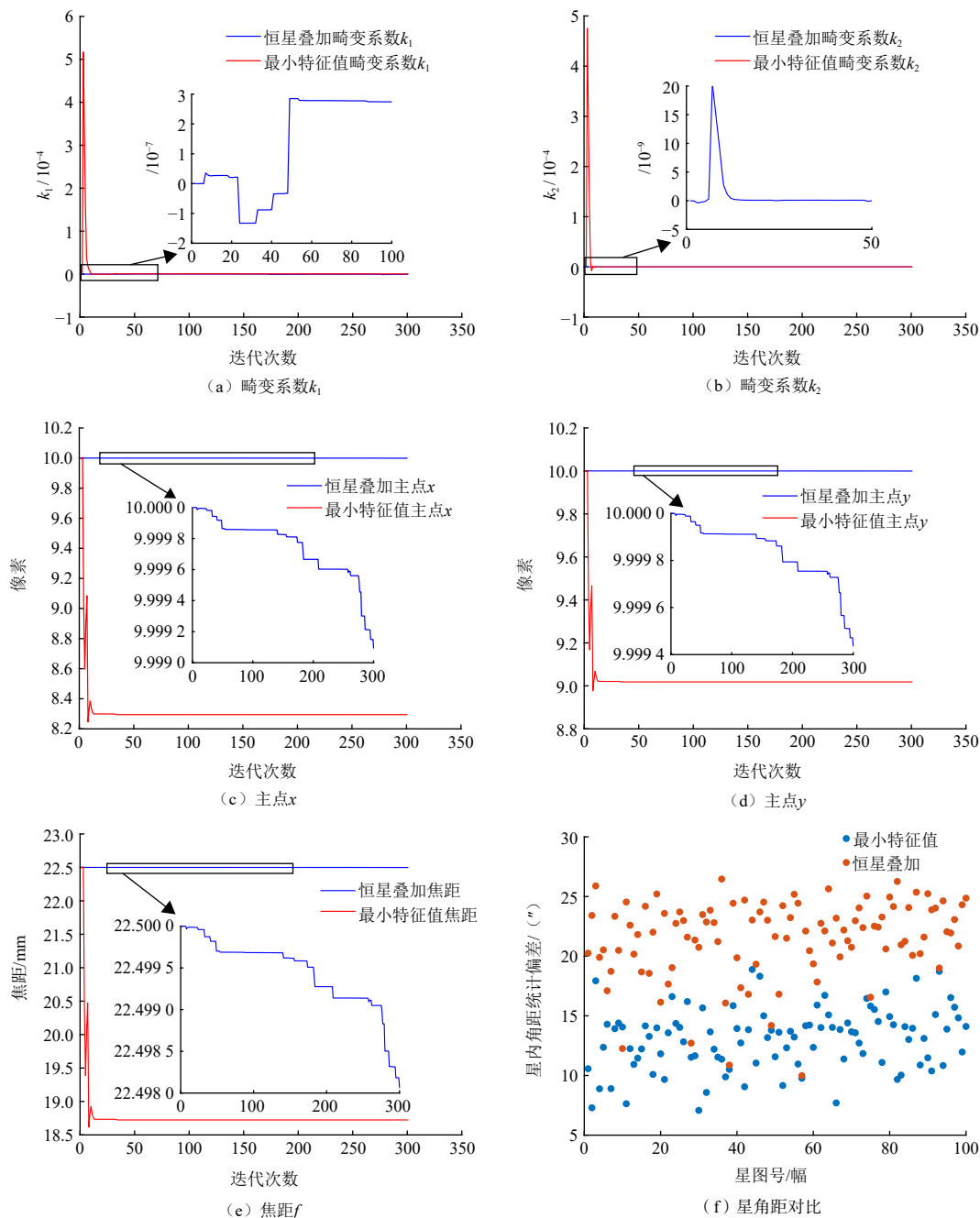


图7 两种恒星组合对比

Fig. 7 Comparison of two stellar combinations

距和主点的标定结果,如图7(c)、(d)、(e)所示,在标定300幅图像后基于恒星叠加的组合并没有收敛,其收敛速度明显慢于基于最小特征值的恒星组合,基于最小特征值的组合其本质是通过扩大最小特征值的下界来增强系统的可观测性,提升系统可观测性可有效提高扩展卡尔曼滤波的收敛速度。两种组合每次迭代过程中的最小特征值如图8所示,基于恒星叠加的最小特征值远远大于另一种恒星组合的最小特征值。用标定之后的参数将二维图像投影到相机坐标系中,计算两种恒星组合在100幅图像下的星内角距偏差,每一幅图像的星内角距偏差如图7(f)所示,基于最小特征值的星内角距偏差更小,更具优越性。由3.3节的分析,选取恒星的最优构型应该是以0点为原点的正菱形构型,从第10幅图像开始采样间隔为10 s,采样6次,每次选取的恒星分布如图9所示,可看出选取恒星分布构型为菱形或者近似菱形,可用选取恒星之间围成菱形的面积大小或者与正菱形的相似度来度量标定效果。

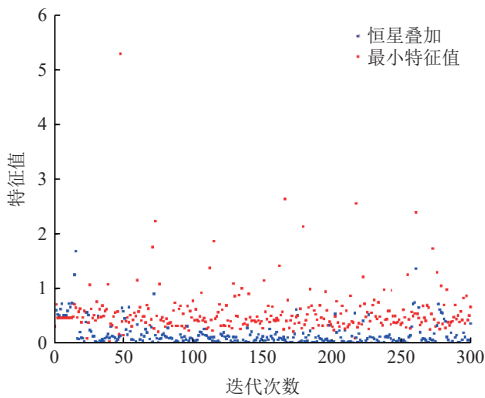


图8 最小特征值对比
Fig. 8 Comparison of minimum singular values

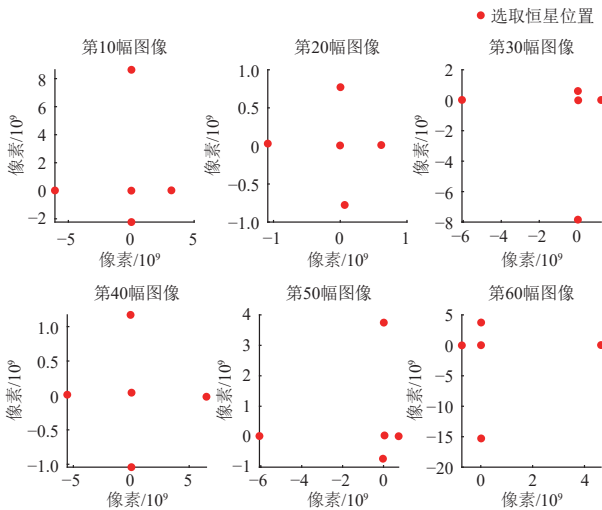


图9 选取恒星位置分布
Fig. 9 Distribution of selected stellar positions

4.2 不同恒星数量及观测误差对标定结果的影响

本文所提出的基于奇异值分解的在轨标定模型,至少观测3颗恒星才可以产生奇异值,故选取恒星数量最少为3,由定理1可知选取3颗恒星时系统状态不可观测,因此需要选取3颗及以上数量的恒星来标定光学参数,分别选取3、4、5、6颗恒星,对300幅图像进行在轨仿真标定,用标定之后的参数结果将二维图像投影到星敏感器坐标系,计算两种恒星组合在100幅图像的星内角距偏差的平均值,对比选取不同恒星数量的在轨标定性能。不同恒星数量的构型和组合方式如图10所示,若选取恒星数量为6,为最大化 H_k 的阶数,第6个点选在 P_3 附近,距离原点最近处。非 P_3 处只能额外产生两次三角形, P_3 附近的点可额外产生4个三角形最大化 H_k 的阶数。相对于选取3颗恒星,选取4颗时的星内角距偏差更低,在轨标定性能更好,但选取6颗恒星时的星内角距偏差相对于选取5颗恒星并没有太大的提升,这是由于当选取5颗恒星时 H_k 的阶数为12,此时 H_k 的阶数已经远远大于状态参数的个数,结果如图11、图12和表1所示。具有非常好的可观测性,恒星数量的增加对标定精度的提高有限,如果继续增加恒星数量并不会显著提高在轨标定的精度,反而会浪费星上的计算资源。

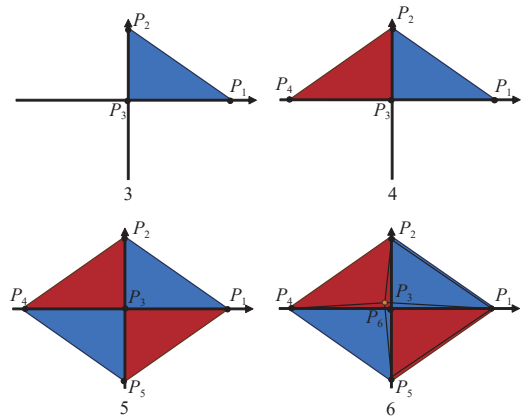
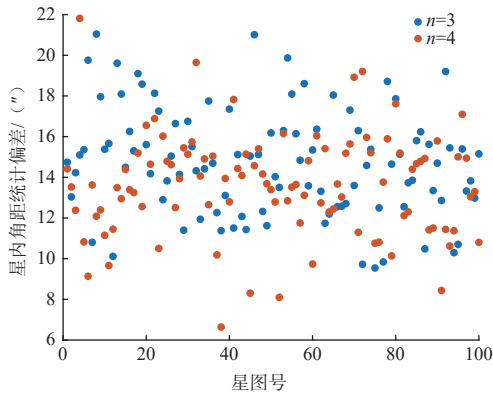
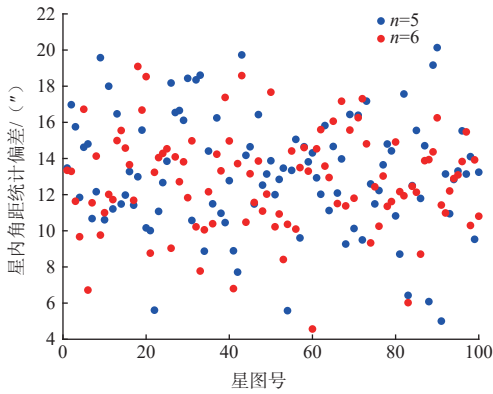


图10 不同恒星数量的构型与组合方式
Fig. 10 Configurations and combinations of different star numbers

由上文可知,当选取恒星数量为5时,此时 H_k 的阶数为12,此时系统可观测性较强,标定精度较高。恒星数量为5,分别给图像坐标系的二维恒星矢量坐标分别添加0.1、0.2、0.3、0.4、0.5、0.6、0.7 pixel的观测误差,计算其在100幅图像星内角距偏差的平均值,结果如图13所示。随着图像噪声的增加,星内角距偏差随之增大,当图像噪声增加到0.4 pixel之后,继续增大噪声并不会使星内角距偏差明显增大,星内角距偏差保持在一个稳定的水平,综上本文提出的在轨标定方法有一定的抗差性。



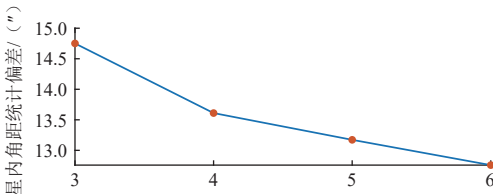
(a) 恒星数量为3、4时



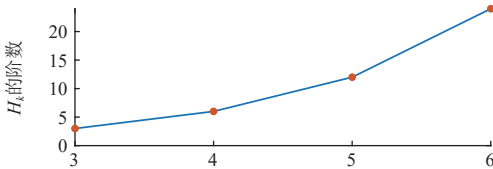
(b) 恒星数量为5、6时

图 11 不同恒星数量的星内角距偏差对比

Fig. 11 Comparison of angular separation deviations for different numbers of stars



(a) 选取恒星数量



(b) 选取恒星数量

图 12 不同恒星数量下对应的星内角距偏差和 H_k 的阶数Fig. 12 Orders of H_k and angular separation deviations corresponding to different numbers of stars表 1 选取不同恒星数量对应的 H_k 的阶数和平均星内角距偏差Table 1 Angular separation deviations and orders of H_k corresponding to different numbers of stars

选取恒星数量/个	H_k 的阶数	平均星内角距偏差/(°)
3	3	14.7512
4	6	13.6105
5	12	13.1722
6	24	12.7582

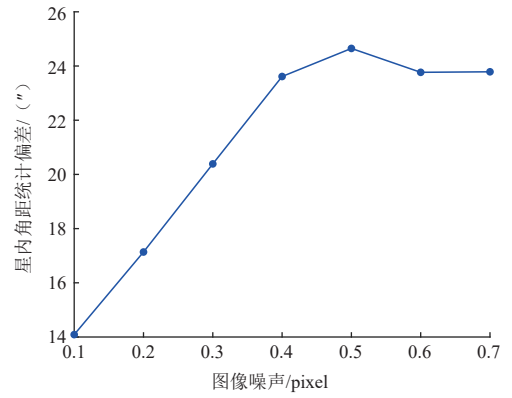


图 13 不同观测误差下星内角距偏差对比

Fig. 13 Comparison of angular separation deviations under different observation errors

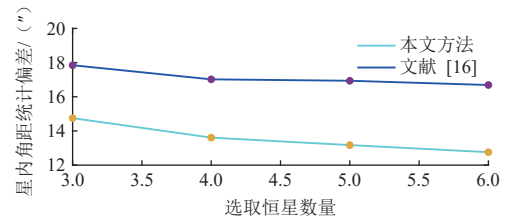
4.3 计算复杂度与标定精度对比

为验证本文提出方法在计算复杂度上的性能, 与文献[16]所提出的方法进行对比, 文献[16]在传统基于星内角距不变原理的标定方法, 提出一种新的标定方法。选取恒星数量为5, 选取方式与前文保持一致, 对比方法选取恒星数量为5, 选取方式为随机选取。计算两种方法每次迭代的时间, 用标定后的结果, 分别计算两种方法在100幅图像的星内角距偏差的平均值。结果如表2所示, 对比两种方法在选取不同恒星数量下的计算复杂度和标定精度, 结果如图14所示。

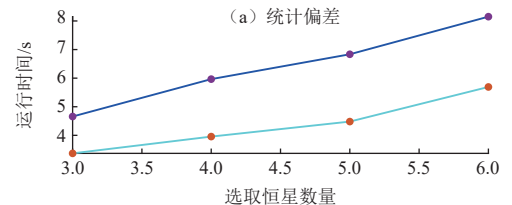
表 2 平均星内角距偏差和运行时间对比

Table 2 Angular separation deviations and orders of H_k corresponding to different numbers of stars

方法	运行时间/s	平均星内角距偏差/(°)
本文方法	4.4811	13.1722
文献[16]	6.8350	16.9375



(a) 统计偏差



(b) 运行时间

图 14 不同恒星数量的计算复杂度和标定精度对比

Fig. 14 The computational complexity and calibration accuracy corresponding to different numbers of stars

从运行时间和平均星内角距偏差两项指标来看, 本文提出的在轨标定方法优于传统的基于星内角距不

变原理标定方法,当选取恒星数量增多,本文提出的方法与传统方法在标定精度和计算复杂度上的差距进一步拉大,进一步凸显了优势。

5 结 论

本文针对传统标定方法在深空探测器难以实现高效在轨标定的问题,提出了基于奇异值分解不变性结合扩展卡尔曼滤波的在轨标定方法,用最小特征值去描述标定系统的可观性进而得到最优恒星构型,解决了星上计算和存储资源严重受限,无法解算和存储大量恒星的问题。数值仿真表明,与其它恒星组合相比,本文提出的在轨标定模型有一定的优越性,对观测噪声有一定的抑制作用。

参考文献

- [1] 岳阳阳. 双CCD星敏传感器标定方法研究[D]. 长沙:国防科学技术大学,2018.
YUE Y Y. Calibration method of double-CCD star sensor[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2018.
- [2] 易敏,邢飞,孙婷,等. 高精度星敏传感器标定方法研究[J]. 仪器仪表学报,2017,38(9):2154-2160.
YI M, XING F, SUN T, et al. Calibration method of high-accuracy star sensor[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2017, 38(9): 2154-2160.
- [3] 王凡,常军,郝云彩,等. 甚高精度星敏传感器的点扩散函数检测技术[J]. 光学技术,2016,42(1):24-27.
WANG F, CHANG J, HAO Y C, et al. The point spread function modeling of the ultra-high accurate star tracker[J]. *Optical Technique*, 2016, 42(1): 24-27.
- [4] 孙向阳. 深空导航敏传感器标定系统与关键技术研究[D]. 长春:长春理工大学,2014.
SUN X Y. The calibration system and the technique research of deep space navigation sensor[D]. Changchun: Changchun University of Science and Technology, 2014.
- [5] WANG X L, GUAN X J, FANG J C, et al. A high accuracy multiplex two-position alignment method based on SINS with the aid of star sensor[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2015, 42: 66-73.
- [6] WEI X G, ZHANG G J, FAN Q Y, et al. Star sensor calibration based on integrated modelling with intrinsic and extrinsic parameters[J]. *Measurement*, 2014, 55: 117-125.
- [7] CHEN X D, ZHAN H Y, FAN S Y, et al. High-accuracy real-time attitude determination and imagery positioning system for satellite-based remote sensing[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2023, 61: 1-14.
- [8] ZHANG L, SUN B, LIU H, et al. On-orbit calibration of star sensor based on the virtual plane[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2024, 73: 1-18.
- [9] THOMPSON R D, GREEN O R, BRADLEY C, et al. On-orbit calibration and performance of the EMIT imaging spectrometer[J]. *Remote Sensing of Environment*, 2024, 303: 113986.
- [10] ZHANG H, QIN W, WANG K X, et al. On-orbit geometric calibration of the HJ-2 a/B satellites' infrared sensors[C]//Proceedings of ISPRS Annals of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. Changsha, China: ISPRS, 2024.
- [11] 常建松. 基于姿态敏感器的卫星自主导航及误差标定方法研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2021.
CHANG J S. Research on attitude sensor based satellite autonomous navigation and error calibration methods[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021.
- [12] SEJONG H, HYUNJIN K, CHAN G P. Observability analysis of in-flight calibration of gyros and attitude sensors on orbit[C]//Proceedings of 2016 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium (PLANS). Savannah, GA: IEEE, 2016.
- [13] GUAN Z C, ZHANG G, GE L L. Correction of camera interior orientation elements based on multi-frame star map[C]//Proceedings of IGARSS 2020-2020 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium. Waikoloa, HI, USA: IEEE, 2020.
- [14] GANESH P, VOLLE K, BUZAUD P, et al. Extrinsic calibration of camera and motion capture systems[C]//Proceedings of SoutheastCon 2021. Atlanta, GA, USA: IEEE, 2021.
- [15] GRIFFITH T D, SINGLA P, JUNKINS J L. Autonomous on-orbit calibration approaches for star tracker camera[J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2002, 112: 39-57.
- [16] CHEN X D, XING F, YOU Z, et al. On-orbit high-accuracy geometric calibration for remote sensing camera based on star sources observation[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2022, 60: 1-11.
- [17] 赫志达. 星敏传感器误差建模及解耦标定方法研究[D]. 长沙:国防科技大学,2020.
HE Z D. Research on star sensor error modeling and decoupled calibration method[D]. Changsha: National University of Technology Defense, 2020.
- [18] 李响,谢俊峰,莫凡,等. 基于扩展卡尔曼滤波的星敏传感器在轨几何标定[J]. 航天返回与遥感,2019,40(3):82-93.
LI X, XIE J F, MO F, et al. On-orbit geometric calibration of star tracker based on EKF[J]. *Spacecraft Recovery & Remote Sensing*, 2019, 40(3): 82-93.
- [19] WU L, XU Q, HEIKILÄ J, et al. A star sensor on-orbit calibration method based on singular value decomposition[J]. *Sensors*, 2019, 19(15): 3301.
- [20] 许倩. 基于温度变化的星敏传感器在轨标定研究[D]. 长春:长春工业大学,2021.
XU Q. Research on on-orbit calibration of star sensor based on temperature variation[D]. Changchun: Changchun University of Technology, 2021.
- [21] 冯文灏. 近景摄影测量[M]. 武汉:武汉大学出版社,2002.
- [22] 谢俊峰,江万寿,龚健雅. 顾及星像点分布的恒星相机在轨检校[J]. 北京航空航天大学学报,2011,37(10):1271-1276.
XIE J F, JIANG W S, GONG J Y. On-orbit calibration of stellar camera considering distribution of star image points[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2011, 37(10): 1271-1276.
- [23] ZHANG Z. A flexible new technique for camera calibration[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(11): 1330-1334.
- [24] JOHNSON C R, SZULC T. Further lower bounds for the smallest

singular value[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, North-Holland, 1998, 272(1-3): 169-179.

- [25] JOHNSON C R. A Gersgorin-type lower bound for the smallest singular value[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1989, 112: 1-7.

作者简介:

赵心语 (2002—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向: 深空探测自主导航。

通信地址: 湖南省长沙市开福区福元路1号 (410073)

电话: 15171214586

E-mail: zhaoxinyunudt@nudt.edu.cn

王炯琦 (1979—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向: 航天测控数据处理、多源信息融合。**本文通信作者。**

通信地址: 湖南省长沙市开福区福元路1号 (410073)

电话: 13787198870

E-mail: wjq_gfkd@163.com

On-Orbit Calibration Method for Star Sensor Based on Optimal Star Selection

ZHAO Xinyu, HOU Bowen, SUN Bowen, ZHOU Xuanying, WANG Jiongqi

(College of Sciences, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: To address optical parameters are affected by the complex environment in space will produce a certain bias in spacecraft on-orbit operation, it will seriously affect the accuracy of spacecraft attitude estimation. The traditional on-orbit calibration method generally base on star angular distance invariance, but it has high computational complexity, the computational and storage resources of deep space probe are very limited, it is difficult to be realized. This paper introduces a calibration method based on singular value decomposition invariance, the size of the singular value is used to measure the observability of the calibration system, on this basis based on the observability to optimize the selection of star distribution and combination, combined with extended Kalman filtering to calibrate the optical parameters of the star tracker. The simulation results show that compared with the traditional star optimal selected model, the optimal selected model proposed in this paper has an advantage in calibrated accuracy and can better suppress the star observational error.

Keywords: star sensor; on-orbit calibration; singular values decomposition invariant; star distribution; optimization combination

Highlights:

- Improving the on-orbit calibration method based on the invariance of singular value decomposition invariance.
- Analyzing the observability of the on-orbit calibration system in different number of stars.
- Combined with the lower bound of the minimum singular value, obtaining the optimal star distribution and combination.

[责任编辑: 杨晓燕, 英文审校: 宋利辉]