中国科学 (A 辑)
第32卷 第5期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2002年5月

具有未知阻尼边界的逆散射问题解的惟一性及重构*

刘继军 程 晋
(东南大学应用数学系，南京 210096) (复旦大学数学系，上海 200433)

中村玄
(北海道大学数学系，札幌 060-0810，日本)

摘要 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的散射体 D 在阻尼边界条件下由散射波的远场形式重建散射体边界的逆散射问题. 证明了该反问题解的惟一性，并给出了确定边界形状的精确的反演方法. 由于边界阻尼是未知的，这预示着散射波的远场形式含有散射体的比现在已知的更多的信息.

关键词 阻尼边界 逆散射 惟一性 远场形式 探测方法

设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 为具有光滑边界的有界区域，当 D 内的介质在 ∂D 上具有阻尼型边界条件时，入射平面波 $u^i(x) = e^{ikx\cdot d}$ 在 D 上的散射可用下列 Helmholtz 方程的外问题描述；

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda(x) u = 0, & x \in \partial D, \\ \dfrac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s = O\left(\dfrac{1}{r}\right), & r = |x| \to \infty, \end{cases} \tag{0.1}$$

其中 ν 是 ∂D 的外法向，总波场 $u = u^i + u^s$ 是给定的入射波 u^i 与相应的散射波 u^s 之和 (参见文献 [1], 第 2 章). 假定阻尼系数 $\lambda(x) \in L^\infty(\partial D)$, 在 ∂D 几乎处处成立 $\Im\lambda(x) > 0$, 则 (0.1) 式存在惟一解 $u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$(参见文献 [2], 第 3 章).

对给定的入射波 $u^i(x)$, 相应的散射波有渐近表示

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{u^\infty(d,\theta) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \qquad |x| \to \infty, \tag{0.2}$$

$u^\infty(d,\theta)$ 称为散射波的远场形式. 本文考虑由 $u^\infty(d,\theta)$ 重建 ∂D 的逆散射问题，结果为

定理 0.1 假定有界区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 及其边界阻尼系数 $\lambda(x)$ 满足：

(i) D 具有 C^2 光滑的边界， $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ 是连通的；

2001-03-13 收稿，2001-12-21 收修改稿
* 国家自然科学基金 (批准号：19971016) 和东南大学科技基金资助项目及复旦大学非线性科学实验室部分资助项目

(ii) 复值函数 $\lambda(x) \in L^\infty(\partial D)$, 对某已知的 $\lambda_0 > 0$, $\|\lambda\| < \lambda_0$, $\Im\lambda(x) > 0$,
则由 $\{u^\infty(d,\theta) : \theta, d \in S^2\}$ 重建 ∂D 时，解是惟一的, S^2 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面.

对该反问题的某些特殊情形，理论上和数值上已有一些结果. 在 $\lambda(x) = 0$ 和 $\lambda(x) = \infty$ 的条件下，重建 ∂D 的惟一性结果见文献 [3 ∼ 5]; 数值方法见文献 [1, 6 ∼ 8]. 但是，已有的数值方法都是通过某种近似得到的，本身和惟一性结果没有联系. 如果 ∂D 已知，重建 $\lambda(x)$ 的惟一性结果见文献 [1,9], 数值方法见文献 [10,11].

对一般 ROBIN 边界条件下重建 ∂D 的逆散射问题，相应的结果极少，其理论难点在于，∂D 未知必然导致其上的阻尼系数未知，即该反问题同时含有 ∂D 和 $\lambda(x)$ 两个未知量. 该问题在应用上的重要性也是明显的：对散射体 D, 不可能假设它是完全硬的 ($\lambda(x) = 0$) 或者完全软的 ($\lambda(x) = \infty$). Isakov 在评论文献 [12] 时 (见 Mathematical Reviews 93m: 35181) 猜测该反问题的解应该是惟一的. 该反问题反演的近似算法见文献 [13], 它利用与 3 个入射波对应的低频散射波近似重建 ∂D 和 $\lambda(x)$.

本文证明了该反问题解的惟一性，给了 Isakov 猜想肯定的回答，并且证明的方法是构造性的. 我们得到了 ∂D 的表达式，这意味着同时得到了重建 ∂D 精确的反演算法. 其技术核心基于对边界曲面 ∂D 的一种全新的定义，构造了 ∂D 的一个独立于 $\lambda(x)$ 的标志函数 (indicator), 从而可以在 $\lambda(x)$ 未知的情况下重建 ∂D. 本文采用的这种探测方法，在电阻抗成像中的应用可见文献 [14,15].

1 从远场形式到近场形式

先将反问题远场数据 $u^\infty(d,\theta)$ 转换为近场数据，再据此定义一个 Dirichlet-to-Neumann 映射，该映射将作为反问题的输入条件.

记 $\Omega = B(0,R)$, 并假定 $\bar{D} \subset B(0,R/2)$. 考虑定解问题

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in \Omega \setminus \bar{D}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda(x) u = 0, & x \in \partial D, \\ u(x) = f, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

由偏微分方程理论知，对 $f \in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$, (1.1) 式存在惟一解 $u(x) \in \mathrm{H}^1(\Omega \setminus \bar{D})$. 考虑由 (0.1) 式定义的 $u(x)$ 在 $\Omega \setminus \bar{D}$ 上的值. 如果 $u(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上的值给定，则它满足边值问题 (1.1) 式. 据此可定义 Dirichlet-to-Neumann 映射

$$\Lambda_{D,\lambda} : f \to \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega).$$

下面的结果给出了 $u(x)$ 的远场数据 (它是已知的反演输入) 和上面定义的 Dirichlet-to-Neumann 映射的关系.

定理 1.1 设 $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ 上的波场 u 满足 (1.1) 式, 则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}$ 可由 $f(x)$ 和 $\{u^\infty(d,\theta) : \theta, d \in S^2\}$ 惟一确定.

该定理表示由散射波的远场形式可惟一确定其近场形式 (与散射体边界条件无关).

证 第一步. 由于 $u^s(x)$ 是 Helmholtz 方程的辐射解，故 $u^s(x)$ 在 $|x| > R/2$ 上可由 $\{u^\infty(d,\theta) : d, \theta \in S^2\}$ 惟一确定 (参见文献 [1] 定理 2.14 ∼ 2.16). 再记

$$G(x-y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

为 Helmholtz 方程的基本解. 对任意给定的 $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, 定义 $E(\cdot, y) \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ 为

$$\begin{cases} \Delta E + k^2 E = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ \dfrac{\partial E}{\partial \nu} + \lambda E = -\left(\dfrac{\partial G}{\partial \nu} + \lambda G\right), & x \in \partial D, \\ \dfrac{\partial E}{\partial r} - ikE = O\left(\dfrac{1}{r}\right), & r = |x| \to \infty \end{cases}$$

的解.

第二步. 可以证明, 对 $x, y \in \partial\Omega$, $E(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial \nu(x)} E(x,y)$ 和 $\frac{\partial}{\partial \nu(y)} E(x,y)$ 可以由 $\{u^\infty(d,\theta) : \theta, d \in S^2\}$ 确定.

事实上, 由于能够选取 R, 所以可假定 0 不是 $\Delta + k^2$ 在 Ω 上的特征值, 故 $\{e^{ikx\cdot d} | d \in S^2\}$ 在 $L^2(\partial\Omega)$ 中是稠密的 (文献 [1], 定理 5.5), 因此对任意固定的 $y \in \partial B(0, R_1)(R_1 > R)$, 存在序列 $\{\alpha_j^n(y), d_j^n(y)\}$, 使得在 $n \to \infty$ 时,

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant m_n(y)} \alpha_j^n(y) e^{ikx\cdot d_j^n(y)} \to G(x-y)$$

在 $L^2(\partial\Omega)$ 上成立. 另一方面, 由于 $\sum_{1\leqslant j\leqslant m_n(y)} \alpha_j^n(y) e^{ikx\cdot d_j^n(y)}$ 和 $G(x-y)$ 在 Ω 上均满足 Helmholtz 方程, 由文献 [1] 定理 5.4(内部 Dirichlet 问题的适定性) 知, 序列 $\sum_{1\leqslant j\leqslant m_n(y)} \alpha_j^n(y) \cdot e^{ikx\cdot d_j^n(y)}$ 在 Ω 的任意紧集上一致收敛于 $G(x-y)$ (包括其各阶导数), 从而 $n \to \infty$ 时,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu(x)} + \lambda(x)\right) \sum_{1 \leqslant j \leqslant m_n(y)} \alpha_j^n(y) e^{ikx\cdot d_j^n(y)} \to \left(\frac{\partial}{\partial \nu(x)} + \lambda(x)\right) G(x-y)$$

在 $L^2(\partial D)$ 上成立. 由于 $u^s(x,d)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ \dfrac{\partial u^s}{\partial \nu} + \lambda u^s = -\left(\dfrac{\partial}{\partial \nu} + \lambda\right) e^{ikx\cdot d}, & x \in \partial D, \\ \dfrac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s = O\left(\dfrac{1}{r}\right), & r = |x| \to \infty, \end{cases}$$

从而由正散射问题对边值的连续依赖性, 对 $y \in \partial B(0, R_1)$, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant m_n(y)} \alpha_j^n(y) u^s(x, d_j^n(y)) \to E(x,y)$$

在 $R/2 < |x| < 2R$ 上一致成立. 故由第一步的结果知对 $y \in \partial B(0, R_1)$ 和 $R/2 < |x| < 2R$, $E(x,y)$, $\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu(x)}$ 和 $\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu(y)}$ 可以由 $\{u^\infty(d,\theta) : \theta, d \in S^2\}$ 确定. 令 $R_1 \to R$ 即得所要的结论.

第三步. 完成定理 1.1 的最后证明. 对 $R/2 < R_0 < R, x_0 \in \partial B(0, R_0)$, 记 $G_D = G_D(x, x_0) = G(x - x_0) + E(x, x_0)$, 由 Green 公式及 G_D 在 ∂D 上的边界条件知,

$$u(x_0) = \int_{\Omega \setminus \bar{D}} (G_D \Delta u - u \Delta G_D) dx = \int_{\partial\Omega} \left(G_D \frac{\partial u}{\partial \nu_1} - f \frac{\partial G_D}{\partial \nu_1}\right) ds,$$

ν_1 是区域 $\Omega \setminus \bar{D}$ 边界的外法向. 在 $\partial B(0, R_0)$ 上对 u 取法向导数并令 $R_0 \to R$, 由位势在边界上的阶跃性质 [2] 得,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_1(x_0)} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_D(x, x_0)}{\partial \nu_1(x_0)} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_1(x)} ds(x) - \frac{\partial}{\partial \nu_1(x_0)} \int_{\partial\Omega} f(x) \frac{\partial G_D(x, x_0)}{\partial \nu_1(x)} ds(x).$$

这是一个关于 $\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu(x)}\right|_{\partial\Omega}$ 的第二类 Fredholm 积分方程. 一方面, 由 (1.1) 式的惟一可解性知该积分方程也存在惟一解; 另一方面, 由第二步的结果知, 对 $x, y \in \partial\Omega$, $\frac{\partial G_D(x,y)}{\partial \nu(x)}$, $\frac{\partial G_D(x,y)}{\partial \nu(y)}$ 可以

由 $\{u^\infty(d,\theta):\theta,d\in S^2\}$ 确定，因此 $\frac{\partial u}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega}$ 可以由 $f(x)$ 和 $\{u^\infty(d,\theta):\theta,d\in S^2\}$ 据上述积分方程确定. 定理证毕.

根据上述结果，原反问题转化为由给定的 Dirichlet-to-Neumann 映射

$$\Lambda_{D,\lambda}: f\to\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega}\in \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$$

重建 ∂D. 相应于 $D=\emptyset$, 引进 Dirichlet-to-Neumann 映射 $\Lambda_{0,0}: H^{1/2}(\partial\Omega)\to \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$:

$$\Lambda_{0,0}: f\to\frac{\partial v_0}{\partial\nu}(x)\bigg|_{\partial\Omega},$$

其中 $v_0(x)\in \mathrm{H}^1(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases}\Delta v_0+k^2v_0=0, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ v_0(x)=f, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\end{cases}\tag{1.2}$$

由 k 的假定， $\Lambda_{0,0}$ 显然有定义，且独立于 $(\partial D,\lambda(x))$.

定理 1.2 设 $u(x)\in \mathrm{H}^1(\Omega\setminus\bar D)$ 和 $v_0(x)\in \mathrm{H}^1(\Omega)$ 分别是 (1.1) 和 (1.2) 式的解，则有常数 $C=C(k,R,\lambda_0)$, 使得

$$\|u-v_0\|_{\mathrm{H}^1(\Omega\setminus\bar D)}\leqslant C\|v_0\|_{\mathrm{H}^1(D)}$$

对一切 $f\in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ 成立.

2 探测方法

定义 2.1 对任意连续曲线 $c=\{c(t)|0\leqslant t\leqslant 1\}$, 如果满足 (i) $c(0),c(1)\in\partial\Omega$, (ii) $c(t)\in\Omega(0<t<1)$, 则称 c 为 Ω 内的一根针 (needle).

定义 2.2 对 Ω 内的针 c, 称

$$t(c,D)=\sup\{0<t<1: c(s)\in\Omega\setminus\bar D, 0<s<t\}$$

为几何影响因子 (GIP). 如果 c 不碰到 ∂D 上任何一点，则取 $t(c,D)=1$.

据此定义知，如果针 c 碰到 $\bar D$, 则 $t(c,D)<1$ 且 $t(c,D)$ 是首次碰撞时间.

由于 $\Omega\setminus\bar D$ 是连通的，显然有

$$\partial D=\{c(t)|_{t=t(c,D)},\quad c \text{ 是针},\ t(c,D)<1\},\tag{2.1}$$

因此为了决定 ∂D, 只要从 Dirichlet-to-Neumann 映射决定每一根针的 GIP.

先给出 Helmholtz 方程的 Runge 逼近定理 [16].

引理 2.1 设 Γ 是 $\partial\Omega$ 中的任意开集. 任给 $t>0$, 存在 $\mathrm{H}^1(\Omega)$ 中的序列 $\{v_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 满足 Helmholtz 方程，并且满足 $\mathrm{supp}(v_n|_{\partial\Omega})\subset\Gamma$ 和

$$v_n\to G(\cdot-c(t)),\ \text{在 } \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\setminus\{c(t')|0<t'<t\})\text{中}.$$

显然 $v_n|_{\partial\Omega}$ 依赖于 $c(t)$, 记为 $v_n|_{\partial\Omega}=f_n(\cdot,c(t))$, 其中 $f_n(\cdot,c(t))\in \mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ 且 $\mathrm{supp}(f_n(\cdot,c(t))\subset\Gamma$.

对给定的 $c\in\Omega$ 和 $0<t<1$, 构造表征函数 (indicator)

$$I(t,c)=\lim_{n\to\infty}\overline{\langle(\Lambda_{D,\lambda}-\Lambda_{0,0})f_n(\cdot,c(t)),f_n(\cdot,c(t))\rangle},\tag{2.2}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\partial\Omega$ 的 L^2 内积.

下面的结果表明 $\Re I(t,c)$ ($\Re$ 表示实部) 可用于计算 GIP.

定理 2.1　对给定的 $c(t)\in\Omega$, $0<t(c,D)<1$ 的充要条件是

$$\lim_{t\to t(c,D)}\Re(I(t,c))=-\infty, \tag{2.3}$$

且 $I(t,c)$ 对一切 $0\leqslant t<t(c,D)$ 存在，$|\Re(I(t,c))|<+\infty$ 对一切 $0\leqslant t<t(c,D)$ 成立.

证　对给定的针 c, 由引理 2.1 知存在 $\{v_n(x)\}\subset \mathrm{H}^1(\Omega)$, 满足

$$\begin{cases}\Delta v_n+k^2v_n=0, & x\in\Omega,\\ v_n=f_n(\cdot,c(t)), & x\in\partial\Omega,\quad \mathrm{supp}f_n(\cdot,c(t))\subset\Gamma,\end{cases} \tag{2.4}$$

$$v_n\to G(\cdot-c(t))\text{在 }\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\setminus\{c(t')|0<t'<t\})\text{中},\quad n\to\infty. \tag{2.5}$$

设 $u_n(x)\in\mathrm{H}^1(\Omega)$, 满足

$$\begin{cases}\Delta u_n+k^2u_n=0, & x\in\Omega\setminus\bar{D},\\ \dfrac{\partial u_n}{\partial\nu}+\lambda(x)u_n=0, & x\in\partial D,\\ u_n(x)=f_n, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{2.6}$$

则由定理 1.2 知 $\|u_n-v_n\|_{H^1(\Omega\setminus\bar{D})}\leqslant C\|v_n\|_{\mathrm{H}^1(D)}$, 而 $v_n\in\mathrm{H}^1(\Omega)$, 故 $w_n=u_n-v_n|_{\Omega\setminus\bar{D}}\in\mathrm{H}^1(\Omega\setminus\bar{D})$, 并满足

$$\begin{cases}\Delta w_n+k^2w_n=0, & x\in\Omega\setminus\bar{D},\\ \dfrac{\partial w_n}{\partial\nu}+\lambda(x)w_n=-\left(\dfrac{\partial v_n}{\partial\nu}+\lambda(x)v_n\right), & x\in\partial D,\\ w_n(x)=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{2.7}$$

另一方面，由 (2.5) 式知，对 $c(t)\in\Omega\setminus\bar{D}$, $v_n\to G(\cdot-c(t))$ 在 $\mathrm{H}^1(D)$ 上成立，故由 Helmholtz 方程定解问题对边界条件的连续依赖性，当 $n\to\infty$ 时，

$$w_n\to w \tag{2.8}$$

在 $\mathrm{H}^1(\Omega\setminus\bar{D})$ 中成立，其中 w 满足

$$\begin{cases}\Delta w+k^2w=0, & x\in\Omega\setminus\bar{D},\\ \dfrac{\partial w}{\partial\nu}+\lambda(x)w=-\left(\dfrac{\partial G(\cdot-c(t))}{\partial\nu}+\lambda(x)G(\cdot-c(t))\right), & x\in\partial D,\\ w(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{2.9}$$

这只要注意到

$$\begin{aligned}\|w_n-w\|_{\mathrm{H}^1(\Omega\setminus\bar{D})}&\leqslant C\left\|\frac{\partial(v_n(\cdot)-G(\cdot-c(t)))}{\partial\nu}+\lambda(\cdot)(v_n(\cdot)-G(\cdot-c(t)))\right\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial D)}\\&\leqslant C\|v_n(\cdot)-G(\cdot-c(t))\|_{\mathrm{H}^1(D)}\end{aligned}$$

即可. 另由第 4 节的计算知

$$\begin{aligned}&-\langle\overline{(\Lambda_{D,\lambda}-\Lambda_{0,0})f_n(\cdot,c(t))},f_n(\cdot,c(t))\rangle\\=&\int_{\Omega\setminus\bar{D}}\{|\nabla w_n|^2-k^2|w_n|^2\}dx+\int_D\{|\nabla v_n|^2-k^2|v_n|^2\}dx\\&+\int_{\partial D}\{\bar{\lambda}|v_n|^2-\lambda|w_n|^2\}ds-\int_{\partial D}(\lambda-\bar{\lambda})\bar{w}_nv_nds.\end{aligned} \tag{2.10}$$

取 $n\to\infty$ 得

$$-I(t,c)=\int_D\{|\nabla G(\cdot-c(t))|^2-k^2|G(\cdot-c(t))|^2\}dx+\int_{\Omega\setminus\bar D}\{|\nabla w|^2-k^2|w|^2\}dx$$
$$+\int_{\partial D}\{\bar\lambda|G(\cdot-c(t))|^2-\lambda|w|^2\}ds+\int_{\partial D}(\lambda-\bar\lambda)\bar w G ds. \tag{2.11}$$

由于 $c(1)\in\partial\Omega$, 而 $0<t<1$ 时, $c(t)\in\Omega\setminus\bar D$, 容易验证

$$\lim_{t\to1}\Re I(t,c)\neq-\infty,\quad |\Re I(t,c)|<+\infty,\quad 0\leqslant t<1.$$

如果 $t(c,D)<1$, 则对 $0<t<t(c,D)$ 有 $c(t)\in\Omega\setminus\bar D$, 且 $x_0=c(t(c,D))\in\partial D$. 完全类似于前述证明知, 当 $0<t<t(c,D)$ 时, $|\Re I(t,c)|<+\infty$. 对 $I(t,c)$ 的表达式计算得

$$-\Re I(t,c)\geqslant\int_D|\nabla G(\cdot-c(t))|^2dx-k^2\int_D|G(\cdot-c(t))|^2dx-k^2\int_{\Omega\setminus\bar D}|w|^2dx$$
$$+\int_{\partial D}\Re\lambda[|G(\cdot-c(t))|^2-|w|^2]ds-2\int_{\partial D}\Im\lambda\Im[\overline{w}G(\cdot-c(t))]ds. \tag{2.12}$$

根据对 $x_0\in\partial D$ 时, $w(x,x_0)$ 和 $G(x-x_0)$ 的奇性分析 (见下面定理 3.1 和 3.2) 及 (2.12) 式得 (2.3) 式, 定理证毕.

据定理 2.1 即得定理 0.1 关于重建 ∂D 的惟一性及算法. 事实上, 由于 $t(c,D)$ 可以由 $\Lambda_{\lambda,D}$ 惟一确定, 故 ∂D 据定义也就惟一确定, 并且重建 ∂D 的步骤如下:

(i) 由远场数据 $\{u^\infty(d,\theta):d,\theta\in S^2\}$ 计算 Dirichlet-to-Neumann 映射 $\Lambda_{\lambda,D}$;

(ii) 对给定的针 c 计算序列 v_n 和 $f_n(\cdot,c(t))$;

(iii) 计算 $\langle\overline{(\Lambda_{D,\lambda}-\Lambda_{0,0})f_n(\cdot,c(t))},f_n(\cdot,c(t))\rangle$;

(iv) 计算 $I(t,c)$ 最终得

$$\partial D=\big\{c(t_0):|\Re I(t,c)|<\infty,0\leqslant t<t_0;\quad\lim_{t\to t_0-}\Re I(c,t)=-\infty\big\}.$$

上述重建 ∂D 的算法实现是一个重要而困难的问题, 其难点在于数值实现中的大计算量和 Green 函数的逼近函数 v_n 的具体构造, 前者是高维反问题中的一个无法回避的共同现象, 对后者, 已有的在 Dirichlet 边界条件下的初步的数值工作见文献 [17]. 值得一提的是, 逆散射问题的一个最近的工作 [18] 提供了一个全新的可行的构造途径, 即通过一个第一类线性积分方程的以 Green 函数 $G(\cdot-c(t))$ 为右端的对应于不同偏差 $1/n$ 的最小模解作为 v_n, 进而构造近似的 Green 函数. 此问题正在研究中.

3 几个核心估计

本节证明定理 1.2 并给出 $\|w\|_{L^2(\Omega\setminus\bar D)}$ 的估计.

定理 1.2 的证 记 $p(x)=u(x)-v_0(x)|_{\Omega\setminus\bar D}$, 易知 $p(x)$ 满足

$$\begin{cases}\Delta p+k^2p=0, & x\in\Omega\setminus\bar D,\\ \dfrac{\partial p}{\partial\nu}+\lambda(x)p=-g, & x\in\partial D,\\ p(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $g(x)=\left(\frac{\partial v_0}{\partial\nu}+\lambda(x)v_0\right)|_{\partial D}$.

对 $g \in \mathrm{H}^{-1/2}(\partial D)$, 先证明 (3.1) 式存在惟一解. 考虑 $g=0$ 的情形. 由 Green 公式知,

$$\int_{\partial D} \Im\lambda(x)|p|^2 ds = 0.$$

由于 $\Im\lambda > 0$, 从而 $p|_{\partial D} = 0$, 再由 p 在 ∂D 上的边界条件知 $\left.\frac{\partial p}{\partial \nu}\right|_{\partial \nu} = 0$, 因此由 Helmholtz 方程 Cauchy 问题解的惟一性知在 $\Omega \setminus \bar{D}$ 上 $p=0$, 故 (3.1) 式的解是惟一的. 另一方面, 由散射问题的标准方法 [2], (3.1) 式可以化为一个第二类的积分方程, 由 Fredholm 二择一定理和解的惟一性即得解的存在性.

据此由 Green 公式把 (3.1) 式写成积分的弱形式后, 即知存在惟一的 $p \in \mathrm{H}^1(\Omega \setminus \bar{D})$, 使得对一切 $\varphi \in V = \{\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega \setminus \bar{D}), \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}$ 有

$$\int_{\Omega\setminus\bar{D}} (\nabla p \nabla \varphi - k^2 p\varphi) dx - \int_{\partial D} \lambda p \varphi ds = \int_{\partial D} g\varphi ds = \langle g, \varphi|_{\partial D}\rangle$$

成立, 因此由偏微分方程弱解估计的标准理论知 (文献 [19], 第 3 章 12 节),

$$\|p\|_{\mathrm{H}^1(\Omega\setminus\bar{D})} \leqslant C\|g\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial D)} = C\left\|\frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \lambda(x) v_0\right\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial D)}.$$

此估计也可由一般的椭圆型方程混合边界问题的结果得到 [20]. 另一方面, 把 v_0 限制在 D 上, 由于 v_0 满足

$$\begin{cases} \Delta v_0 + k^2 v_0 = 0, & x \in D, \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial \nu} + \lambda(x) v_0 = g_1, & x \in \partial D, \end{cases} \tag{3.2}$$

故由迹定理知 $\|g_1\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\partial D)} \leqslant C\|v_0\|_{\mathrm{H}^1(D)}$, 定理得证.

定理 3.1　存在独立于 D 的常数 C, 使得 $\|w\|_{L^2(\Omega\setminus\bar{D})} \leqslant C$ 成立.

证　先定义 $v(x)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = w, & x \in \Omega \setminus \bar{D}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} + \overline{\lambda}(x) v = 0, & x \in \partial D, \\ v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

从而有

$$\|v\|_{\mathrm{H}^2(\Omega\setminus\bar{D})} \leqslant C\|w\|_{L^2(\Omega\setminus\bar{D})}. \tag{3.4}$$

由于 $\Omega \setminus \bar{D} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathrm{H}^2(\Omega \setminus \bar{D})$ 可以嵌入到 $B^{1/2}(\Omega \setminus \bar{D})$(指数为 1/2 的 Hölder 空间), 从而有 $\|v\|_{B^{1/2}} \leqslant C\|v\|_{\mathrm{H}^2}$, 进而得 $\|v\|_{B^{1/2}} \leqslant C\|w\|_{L^2}$, 据此不等式有

$$\begin{cases} |v(x) - v(y)| \leqslant C|x-y|^{1/2}\|w\|_{L^2(\Omega\setminus\bar{D})}, & x, y \in \Omega \setminus \bar{D}, \\ \|v\|_{L^\infty(\Omega\setminus\bar{D})} \leqslant C\|w\|_{L^2(\Omega\setminus\bar{D})}. \end{cases} \tag{3.5}$$

另一方面, 由 v 和 w 的弱解的定义, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\setminus\bar{D}} |w(x)|^2 dx &= \int_{\Omega\setminus\bar{D}} (\Delta + k^2) v(x) \bar{w}(x) dx \\ &= -\int_{\partial D} v(x)\bar{\lambda}(x)\bar{G}(x - c(t)) ds - \int_{\partial D} (v(x) - v(c(t)))\frac{\partial}{\partial \nu_0}\bar{G}(x - c(t)) ds \\ &\quad - v(c(t)) \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_0}\overline{G}(x - c(t)) ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

从而由 (3.6) 式得

$$\|w\|^2_{L^2(\Omega\setminus\bar{D})} = -\int_{\partial D} v\overline{\lambda G}(x-c(t))ds - \int_{\partial D}(v(x)-v(c(t)))\frac{\partial}{\partial\nu_0}\bar{G}(x-c(t))ds$$
$$-k^2 v(c(t))\int_D \bar{G}(x-c(t))dx. \tag{3.7}$$

注意到 $c(t)\to\partial\Omega$ 时,

$$\int_{\partial D}|\bar{G}(x-c(t))|ds,\quad \int_{\partial D}|x-c(t)|^{1/2}\left|\frac{\partial}{\partial\nu_0}\bar{G}(x-c(t))\right|ds,\quad \int_D|\bar{G}(x-c(t))|dx$$

都是有界的, 从而由 (3.5) 和 (3.7) 式得 $\|w\|^2_{L^2(\Omega\setminus\bar{D})}\leqslant C\|w\|_{L^2(\Omega\setminus\bar{D})}$, 定理得证.

定理 3.2 设 $x_0\in\partial D$, 对某 $\delta>0$, $c(t)\in\Omega\setminus\bar{D}\cap\partial B(x_0,\delta)$, 其中 $B(x_0,\delta)$ 是 x_0 为心、半径为 δ 的开球, 则对充分小的 δ 存在 $C>0$, 使得下列估计成立:

$$\int_D|\nabla G(x-c(t))|^2dx\geqslant\frac{C}{\delta},\qquad \int_D|G(x-c(t))|^2dy\leqslant C,$$
$$\int_{\partial D}|G(x-c(t))|^2ds\leqslant C|\ln\delta|,\quad \int_{\partial D}|w(x,c(t))|^2ds\leqslant C\int_{\partial D}|G(x-c(t))|^2ds,$$

其中的常数 C 可以是不同的.

证 用 $T(x_0,\partial D)$ 表示 ∂D 上点 x_0 的切平面. 由 Green 函数表达式易知

$$|\nabla G(x-c(t))|^2=O\left(\frac{1}{|x-c(t)|^4}\right),\quad |G(x-c(t))|^2=O\left(\frac{1}{|x-c(t)|^2}\right). \tag{3.8}$$

如果 $\delta>0$ 充分小, 则 $\partial D\cap B(x_0,\delta)$ 近似于 $T(x_0,\partial D)\cap B(x_0,\delta)$, 从而对充分小的 δ 有

$$\int_D\frac{1}{|x-c(t)|^4}|dx\geqslant\int_{D\cap B(x_0,\delta)}\frac{1}{|x-c(t)|^4}dx\geqslant\int_{D\cap B(x_0,\delta)}\frac{1}{(2\delta)^4}dx$$
$$=\frac{1}{(2\delta)^4}\int_{D\cap B(x_0,\delta)}dx\geqslant\frac{1}{(2\delta)^4}\frac{1}{4}\int_{B(x_0,\delta)}dx=\frac{C}{\delta}, \tag{3.9}$$

故得到第 1 个估计. 第 2 个估计是显然的.

令 $c(t')\in\Omega\setminus\bar{D}$ 满足 $c(t')\in\partial B(x_0,\delta)$, 且 $c(t')-x_0$ 垂直于 $T(x_0,\partial D)$, 则存在 $C>0$, 使得 $|x-c(t)|\geqslant C|x-c(t')|$ 对充分小的 δ 成立, 故

$$\int_{\partial D}|G(x-c(t))|^2dx\leqslant C\left(\int_{\partial D1}+\int_{\partial D2}\right)\frac{1}{|x-c(t')|^2}dx, \tag{3.10}$$

其中取 $\partial D1=\partial D\cap\{x:|x-c(t')|^2\geqslant 1/|\ln\delta|\}$, $\partial D2=\partial D\cap\{x:|x-c(t')|^2\leqslant 1/|\ln\delta|\}$.

第 1 积分项化为

$$\int_{\partial D1}\frac{1}{|x-c(t')|^2}ds\leqslant|\ln\delta|\int_{\partial D1}ds\leqslant C|\ln\delta|. \tag{3.11}$$

对第 2 积分项, 由于

$$\partial D2'=\left\{x:x\in T(x_0,\partial D),|x-x_0|^2\leqslant\frac{1}{|\ln\delta|^2}-\delta^2\right\},$$

当 δ 充分小时近似于 $\partial D2$, 故有

$$\int_{\partial D2}\frac{1}{|x-c(t')|^2}ds\leqslant 2\int_{\partial D2'}\frac{1}{|x-c(t')|^2}ds=\int_{\partial D2'}\frac{1}{|x-x_0|^2+\delta^2}ds$$
$$=4\pi(|\ln\delta|-\ln(|\ln\delta|))\leqslant C|\ln\delta|. \tag{3.12}$$

由 (3.10) ~ (3.12) 式即得第 3 个估计. 第 4 个估计是由解的微局部分析技术得到的，限于篇幅，证明细节将另外发表 1).

4　$\Lambda_{D,\lambda}$ 的表达式

本节给出 (2.10) 式的证明. 设 $v(x) \in \mathrm{H}^1(\Omega \setminus \bar{D})$. 由 (2.6) 式的弱解 u_n 的定义知

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega\setminus\bar{D}} v\Delta u_n dx + \int_{\Omega\setminus\bar{D}} k^2 v u_n dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u_n}{\partial n} ds - \int_{\partial D} v\frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega\setminus\bar{D}} (\nabla u_n \nabla v - k^2 v u_n) dx. \end{aligned} \tag{4.1}$$

考虑到 u_n 的边界条件，在此式中取 $v = \bar{v}_n$ 得

$$\langle \Lambda_{D,\lambda} f_n, \overline{f_n}\rangle = \int_{\Omega\setminus\bar{D}} (\nabla u_n \nabla \bar{v}_n - k^2 u_n \bar{v}_n) dx - \int_{\partial D} \lambda u_n \bar{v}_n ds. \tag{4.2}$$

类似可得

$$\langle \Lambda_{0,0} f_n, \overline{f_n}\rangle = \int_{\Omega} (\nabla v_n \nabla \bar{v}_n - k^2 v_n \bar{v}_n) dx. \tag{4.3}$$

由于 $w_n = u_n - v_n$ 及 $(\bar{u}_n - \bar{v}_n)|_{\partial\Omega} = 0$, 故

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\setminus\bar{D}} (|\nabla w_n|^2 - k^2|w_n|^2) dx - \int_{\partial D} \lambda |w_n|^2 ds \\ &= \int_{\Omega\setminus\bar{D}} (\nabla w_n \nabla \bar{w}_n - k^2 w_n \bar{w}_n) dx - \int_{\partial D} \lambda w_n \bar{w}_n ds \\ &= -\overline{\langle \Lambda_{D,\lambda} f_n, \overline{f}_n\rangle} + \overline{\langle \Lambda_{0,0} f_n, \bar{f}_n\rangle} + \int_{\partial D} (\lambda - \bar{\lambda}) v_n \bar{u}_n ds \\ &\quad - \int_{D} (|\nabla v_n|^2 - k^2 |v_n|^2) dx - \int_{\partial D} \lambda |v_n|^2 ds. \end{aligned} \tag{4.4}$$

综合上述及 $u_n = w_n + v_n$ 即完成了证明.

致谢　作者衷心感谢审稿人提出的宝贵意见，第一作者衷心感谢群马大学工学部 M. Ikehata 教授在其访问期间的有益讨论.

参　考　文　献

1 Colton D L, Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. 37~83

2 Colton D L, Kress R. Integral Equation Methods in Scattering Theory. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1983. 97~107

3 Colton D L, Sleeman B D. Uniqueness theorems for the inverse problem of acoustic scattering. IMA J Appl Math, 1983, 31(3): 253~259

4 Kress R, Rundell W. Inverse obstacle scattering using reduced data. SIAM J Appl Math, 1998, 59(2): 442~454

1) Cheng J, Liu J J, Nakamura G. Reconstruction of obstacle and boundary impedance from Dirichlet-to-Neumann map. J Math Kyoto University (待发表)

5 Zinn A. On an optimization method for the full- and limited-aperture problem in inverse acoustic scattering for sound soft obstacle. Inverse Problems, 1989, 5(2): 239~253
6 Colton D L, Kirsch A. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region. Inverse Problems, 1996, 12(4): 383 ~ 393
7 Kress R, Zinn A. Three-D reconstructions from near-field data in obstacle scattering. In: Yamaguti M, Hayakawa K, Iso Y, et al, eds. Inverse Problems in Engineering Sciences, ICM-90 Satellite Conference Proceedings. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 43 ~ 51
8 Kress R. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory. J Comput Appl Math, 1995, 61(3): 345 ~ 360
9 Colton D L. The determination of the surface impedance of an obstacle from measurements of the far field pattern. SIAM J Appl Math, 1981, 41(1): 8 ~ 15
10 Liu J J. Inverse scattering problem with impedance boundary condition. J Partial Differential Equation, 2000, 13(3): 279 ~ 288
11 刘继军. 一类阻尼边界条件下的逆散射问题. 计算数学, 2001, 23(1): 111 ~ 120
12 Kedzierawski W. The determination of the surface impedance of an obstacle. Proc Edingburgh Math Soc, 1993, 36(2): 1 ~ 15
13 Smith R T. An inverse acoustic scattering problem for an obstacle with an impedance boundary condition. J Math Anal Appl, 1985, 105(2): 333 ~ 356
14 Ikehata M, Nakamura G. Slicing of a 3-D object from boundary measurements. Inverse Problems, 1999, 15(5): 1243 ~ 1253
15 Ikehata M. Reconstruction of the shape of the inclusion by boundary measurements. Commun in PDE, 1998, 23(8): 1459 ~ 1474
16 Ikehata M. Reconstructions of obstacle from boundary measurements. Wave Motion, 1999, 30: 205 ~ 223
17 Ikehata M, Siltanen S. Numerical method for finding the convex hull of an inclusion in conductivity from boundary measurements. Inverse Problems, 2000, 16(4): 1043 ~ 1052
18 Potthast R. Stability estimates and reconstructions in inverse acoustic scattering using singular sources. J Compt Appl Maths, 2001, 114(2): 247 ~ 274
19 Mizohata S. The Theory of Partial Differential Equations. New York: Cambridge University Press, 1973. 10 ~ 50
20 Groger K. A $W^{1,p}$-estimate for solutions to mixed boundary value problems for second order elliptic differential equations. Mathematischs Annalen, 1989, 283: 679 ~ 687