

http://bhxb.buaa.edu.cn jbuua@buaa.edu.cn

DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2022.0642

非仿射非线性系统控制综述

全权¹, 陈炼^{2,*}

(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191;

2. 交通运输部公路科学研究院 物流工程研究中心, 北京 100088)

摘 要: 作为仿射非线性系统更一般化的描述, 非仿射非线性系统所对应的实际应用更加广泛, 也更贴近实际。因此, 研究非仿射非线性系统的控制问题十分重要。然而, 非线性系统的非仿射特性会使控制信号以非线性函数形式出现在闭环系统中, 从而带来诸如控制方向未知、奇异、过零等问题。由此, 解决非仿射非线性系统的控制问题面临着巨大的挑战。基于此, 介绍了仿射、严格反馈和高阶系统的相关背景知识, 总结和分析了解决非仿射非线性系统控制的3种解决思路, 包括函数变换法、参考模型法和数据驱动法。在已有的研究成果基础上, 指出非仿射非线性系统研究领域所面临的挑战和发展趋势。

关 键 词: 非仿射系统; 非线性系统; 严格反馈; 数据驱动; 加性分解

中图分类号: V249.1; TP273

文献标志码: A

文章编号: 1001-5965(2024)08-2367-15

经典控制理论作为一种成熟的工具, 在线性系统中的应用相当广泛。然而, 实际的被控对象往往存在许多非线性因素。因此, 要将线性系统控制理论用于解决实际问题, 就必须建立在一些必要假设基础上。例如, 要求被控对象的运动范围较小, 忽略饱和、死区、摩擦等非线性因素。然而, 在真实控制环境中, 若这些非线性因素处理不当, 将会导致整个闭环系统的稳定性急剧下降, 甚至出现不稳定现象。因此, 迫切需要一种新方案去解决非线性系统的控制问题。

为此, 现代控制理论为非线性控制领域揭开了崭新的篇章, 自其诞生之初, 便激起了研究者们浓厚的兴趣与广泛关注。总体来看, 非线性控制领域向着不同维度、不同方向蓬勃发展。维度体现在单输入单输出 (single input single output, SISO) 非线性系统向多输入多输出非线性系统发展。同时, 根据不同分类也衍生出各种关于特定类型非线性系统的发展方向。本文聚焦于非仿射非线性系统领域的相关问题。仿射与控制信号在系统中的表现形

式息息相关。对于任意给定状态, 若控制信号以线性形式出现在系统中, 则称控制信号是仿射的, 对应的非线性系统被称为仿射非线性系统^[1]。例如, 高超声速飞行器^[2]、直升机^[3]等实际对象均可视为非仿射系统。相反, 若控制信号以非线性或者复合函数形式出现在非线性系统中, 则被称为非仿射非线性系统。本文的主要工作是总结目前解决非仿射问题的思路, 指出挑战、发展趋势及思考。

1 背景知识

1.1 仿 射

仿射指控制信号以线性形式出现在非线性系统中^[1]。因此, 仿射非线性系统的数学模型可以表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态向量; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ 为非线性函数; $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为非线性增益矩阵; $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ 为实际控制信号。

收稿日期: 2022-07-27; 录用日期: 2022-08-26; 网络出版时间: 2022-09-09 16:09

网络出版地址: link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20220909.1023.001

*通信作者. E-mail: chen.lian@rioh.cn

引用格式: 全权, 陈炼. 非仿射非线性系统控制综述 [J]. 北京航空航天大学学报, 2024, 50 (8): 2367-2381.

QUAN Q, CHEN L. Control of non-affine nonlinear systems: A survey [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2024, 50 (8): 2367-2381 (in Chinese).

从式 (1) 中可知, 非线性增益矩阵 $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 中不包含实际控制信号 $\mathbf{u}$ 的相关信息。当非仿射非线性系统被整理或转换成仿射形式后, 可在一定程度上简化控制器设计。例如, 在 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 可逆的情况下, 可以直接在控制信号中设计相应的前馈信号去抵消动态系统中出现的非线性因素。实际应用中, 某些物理模型经过合理简化后可变成仿射非线性系统。例如, 考虑如下一类常见的高超声速飞行器纵向动力学系统^[4]:

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{T \cos \alpha - D}{m} - g \sin \gamma \\ \dot{h} = V \sin \gamma \\ \dot{\gamma} = \frac{L + T \sin \alpha}{mV} - \frac{g}{V} \cos \gamma \\ \dot{\alpha} = Q - \frac{L + T \sin \alpha}{mV} + \frac{g}{V} \cos \gamma \\ \dot{\theta} = Q \\ \dot{Q} = \frac{M}{I_{yy}} \end{cases} \quad (2)$$

式中: m 为飞行器质量; α 为迎角; θ 为俯仰角; γ 为航迹倾角; h 为飞行高度; V 为飞行速度; Q 为俯仰角速度; g 为重力加速度; I_{yy} 为飞行器俯仰方向的转动惯量; T 、 D 、 L 和 M 分别为推力、阻力、升力和俯仰力矩。这些参数通常由拟合多项式表示。例如, 俯仰力矩 M 和阻力 D 可以表示为

$$\begin{cases} M = z_T (C_{T0}^{\alpha^3} \alpha^3 + C_{T0}^{\alpha^2} \alpha^2 + C_{T0}^{\alpha} \alpha + C_{T0}^0) + \bar{q} S \bar{c} (C_M^{\alpha^2} \alpha^2 + C_M^{\alpha} \alpha + C_M^{\delta_e} \delta_e + C_M^0) \\ D = \bar{q} S (C_D^{\alpha^2} \alpha^2 + C_D^{\alpha} \alpha + C_D^{\delta_e^2} \delta_e^2 + C_D^{\delta_e} \delta_e + C_D^0) \end{cases} \quad (3)$$

式中: z_T 、 C_{T0} 、 C_D 、 C_M 、 $\bar{q}$ 、 S 、 $\bar{c}$ 为常值拟合系数。通常情况下, 可以选择升降舵偏角 δ_e 作为需要设计的控制信号。因此, 在忽略与升降舵偏角有关的高次项 $\bar{q} S (C_D^{\delta_e^2} \delta_e^2)$ 后, 式 (2) 可以简化为仿射非线性系统。另外, 机电系统^[5]、柔性机器人^[6]等众多实际应用忽略摩擦项的情况下也可以看为仿射非线性系统。

若控制信号以非线性隐函数的形式进入动态模型中, 则被称为非仿射非线性系统^[7], 其数学表达式可为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4)$$

式中: $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{R}^n$ 为非线性函数。下文很多举例实际上是式 (4) 的具体形式。为方便下文描述, 如果变量为标量, 一概用白斜体符号表示。

由式 (4) 可以看出, 实际控制信号已经是 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 的变量之一, 且无法从中单独分离出来。例如, 文献 [8] 提到的一维非线性系统为

$$\dot{x} = e^x + u + u^2 \tanh(u) \quad (5)$$

该系统中的控制信号是双曲正切函数和二次函数的相关变量, 因此, 可以看为非仿射非线性系统。其实, 式 (5) 描述的动态系统比较特殊, 其没有其他子系统。

考察某受到非线性输入饱和影响的四阶车摆系统^[9]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_1(x_3, x_4) \\ x_4 \\ f_2(x_3, x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-\cos x_3}{2 - \cos x_3^2} \end{bmatrix} \tanh(u) \quad (6)$$

式中:

$$\begin{cases} f_1(x_3, x_4) = \frac{x_4^2 \sin x_3 - 9.8 \sin x_3 \cos x_3}{2 - (\cos x_3)^2} \\ f_2(x_3, x_4) = \frac{-x_4^2 \sin x_3 \cos x_3 + 19.6 \sin x_3}{2 - (\cos x_3)^2} \\ \tanh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \end{cases} \quad (7)$$

该非线性系统中不仅存在非仿射的控制信号, 而且第 2、4 子系统还无法找到严格反馈标志信号。这 2 个困难将会导致反步、动态面等递归控制器设计框架难以应用。为将反步、动态面控制算法引入非仿射控制领域中, 研究人员开始致力于将非仿射非线性系统转换为严格反馈仿射系统。

1.2 严格反馈

严格反馈需要满足 2 个条件: ①实际控制信号仅在最后一阶子系统中出现; ②其他子系统中存在比该子系统高一阶的状态变量。该状态变量可以视为严格反馈信号。严格反馈非线性系统的数学表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{\mathbf{x}}_i) + g_i(\bar{\mathbf{x}}_i) x_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\mathbf{x}) + g_n(\mathbf{x}) u \\ y = x_1 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (8)$$

式中: $\bar{\mathbf{x}}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T$ 和 y 分别为状态变量和系统输出; $f_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$ 、 $g_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$ 、 $f_n(\mathbf{x})$ 、 $g_n(\mathbf{x})$ 为足够光滑的非线性函数。

该类严格反馈系统通常称为下三角系统。矩阵论中的相关知识可用于该类系统的控制器设计和稳定性分析。例如, 在动态模型 (6) 中, 一阶子系统 $\dot{x}_1 = x_2$ 存在状态 x_2 , 并且 x_2 前的系数是常数, 可以看成是严格反馈标志信号。但是, 二阶子系统中却无法分离出严格反馈信号 x_3 。因此, 四阶车摆系统 (6) 应该属于非仿射非严格反馈系统。另外, 系统 (6) 被研究者称为纯反馈非仿射非线性系统^[10]。

其中, 纯反馈指其他子系统(子系统中不包含实际控制信号)中无法分离出用于构造虚拟控制律的严格反馈信号。

通常情况下, 实际系统经过适当近似处理后可转化为严格反馈仿射非线性系统, 如基于小角度假设建立的四旋翼飞行器姿态子系统^[11], 或当完整高超声速飞行器动态模型^[4]满足如下 2 个假设的情况下, 可以被转换为控制非仿射严格反馈系统。

假设 1 在高度调节过程中, 假设此时巡航速度不变且等于 V_r 。

假设 2 在飞行过程中, 航迹倾角 γ 的变化足够小至 $\sin \gamma \approx \gamma$ 。

基于假设 1 和假设 2, 高度子系统可以化简为包含复合干扰的严格反馈仿射非线性系统^[12]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} g_1(V_r)x_2 \\ f_2(x_2, V_r) + g_2(V_r)x_3 \\ x_4 \\ f_4(x_2, x_3, V_r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_4(V_r) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2(\alpha, \delta_e) \\ 0 \\ \omega_4(\alpha, \delta_e) \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中:

$$\begin{cases} x_1 = h/h_r \\ x_2 = \gamma \\ x_3 = \theta \\ x_4 = Q \\ g_1(V_r) = V_r/h_r \\ g_2(V_r) = C_L^c q S / (m V) - g/V_r - g_2(V_r)x_2 \\ f_2(x_2, V_r) = C_L^0 q S / (m V) - g/V_r - g_2(V_r)x_2 \\ f_4(x_2, x_3, V_r) = (z_T C_T^c + 0.5 \rho V_r^2 S \bar{c} C_M^0) / I_{yy} \\ g_4(V_r) = 0.5 \rho V_r^2 S \bar{c} C_M^0 / I_{yy} \end{cases} \quad (10)$$

其中: $C_L^c q$ 、 k_{T1} 、 C_L^0 、 C_T^c 、 C_M^0 、 C_M^c 为固有参数; h_r 为参考高度; ρ 为大气密度; $\omega_2(\alpha, \delta_e)$ 、 $\omega_4(\alpha, \delta_e)$ 为复合外部干扰。

对比完备模型 (2) 和近似模型 (9), $T \sin \alpha$ 和 $T \cos \alpha$ 被简化处理。在构造误差动态方程的过程中, 这种具有线性形式且可分离的严格反馈标志信号被视为连接每个子系统的桥梁。因此, 可以先为最低阶的子系统构造一个候选的李雅普诺夫函数, 同时, 为该子系统设计虚拟控制信号。虚拟控制信号可为下一个子系统提供理想的状态参考。当然, 严格反馈信号的任务是跟踪该状态参考信号。因此, 严格反馈信号在递归控制算法的设计过程中起着不可替代的关键性作用。

考虑如下一个简单的二阶严格反馈仿射非线

性系统实例:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1^3/5 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2^3/7 + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (11)$$

为使动态系统 (11) 完成给定的跟踪任务, 需定义如下误差变量:

$$e_1 = x_1 - y_d \quad (12)$$

式中: y_d 为预先给定的参考输出信号。

对式 (12) 进行求导操作后, 可以获得一阶子系统对应的误差子系统:

$$\dot{e}_1 = x_1 + x_2 + x_1^3/5 - \dot{y}_d \quad (13)$$

然而, 该子系统中并未出现真实的控制信号, 因此, 无法控制该子系统的稳定性。此时, 需要引入一个虚拟控制信号 χ_1 使得式 (13) 变为

$$\dot{e}_1 = x_1 + \chi_1 + (x_2 - \chi_1) + x_1^3/5 - \dot{y}_d \quad (14)$$

对于 χ_1 的设计, 应先引入误差项 $k_1 e_1$ 以保证子系统动态 x_1 的稳定, 再引入前馈信号 $-x_1 - x_1^3/5 + \dot{y}_d$ 以抵消该子系统中出现的非线性成分。于是, χ_1 可以被设计成如下形式:

$$\chi_1 = -k_1 e_1 - x_1 - x_1^3/5 + \dot{y}_d \quad (15)$$

式中: $k_1 \in \mathbf{R}$, $k_1 > 0$ 。

将式 (15) 代入式 (14) 可以得到

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + (x_2 - \chi_1) \quad (16)$$

此时, $x_2 - \chi_1$ 可以视为下一个子系统的跟踪误差 $e_2 = x_2 - \chi_1$ 。因此, χ_1 可以看成是下一个子系统的参考信号, 这样就可以使各个子系统级联在一起, 从而最终受到实际控制信号 u 的控制。于是, 可以获得第 2 个子系统的误差动态系统:

$$\dot{e}_2 = x_1 x_2 + u + x_2^3/7 - \dot{\chi}_1 \quad (17)$$

从上述设计过程可以发现, 严格反馈信号 x_2 起到了关键性作用, 因为其能够辅助定义下一个子系统的误差信号。然而, 当 x_2 不存在或以复合函数的形式出现在系统中时, 将会带来很大的不便, 即无法直接构造下一个子系统的误差信号。对于动态系统 (11), 由于实际控制信号 u 以线性形式出现在最后一个子系统中, 可以十分方便地用它消除系统的非线性因素。例如, 将 u 设计为

$$u = -k_2 e_2 - x_1 x_2 - x_2^3/7 - e_1 + \dot{\chi}_1 \quad (18)$$

式中: $k_2 \in \mathbf{R}$, $k_2 > 0$ 。

下面只需构造形如 $V_l = 0.5 e_1^2 + 0.5 e_2^2$ 的李雅普诺夫函数即可证明整个误差系统是渐进稳定的。从上述例子可以发现, 逐级递归设计是反步技术的关键步骤。反步技术虽然对非线性系统的形式要求

较高,但其也具有如下优势:①各子系统中的非线性函数不必满足增长性条件^[13];②子系统中的不确定函数也可以不受三角条件^[14]约束。

1.3 高阶

高阶指的是严格反馈信号和实际控制信号以高次幂的形式出现在系统之中。一类高阶非仿射非线性系统^[15]的数学模型可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}) + x_2^{a_1} \\ \dot{x}_2 = f_2(\mathbf{x}) + x_3^{a_2} \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\mathbf{x}, u) + u^{a_n} \end{cases} \quad (19)$$

式中: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$; $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为大于 1 的正常数。

高阶非仿射非线性系统可以看作是比严格反馈系统更加一般化的非线性系统。高阶非仿射非线性系统的实际应用对象包括由 Rui 等^[16]提出的一类两自由度欠驱动系统。Rui 等^[16]额外考虑了弹簧带来的非线性因素,建立了高阶非仿射非线性系统动态模型。额外考虑弹簧的非线性特性必定使得所建立的数学模型更加贴近实际。

高阶非仿射系统的显著特征是在原点处的 Jacobian 线性化不满足可控性^[17]条件。这种不可控特性将会给高阶系统的控制器设计带来前所未有的困难与挑战。目前,较为经典的解决思路是:先构造一种带有幂次的李雅普诺夫函数^[18],再运用具有高次幂的李雅普诺夫函数分析和证明控制系统的稳定性,从而在该过程中获得相应的控制信号。由于稳定性任务相比于跟踪任务较容易实现,关于高阶非仿射系统的稳定性控制器设计与研发工作已经得到了一定程度的发展。在初始阶段,一种专为处理高阶非线性系统仿射困难的工具——“adding a power integrator”技术^[15]诞生于 21 世纪初。自此之后,该技术频繁出现在高阶非仿射系统的控制器设计领域中。文献 [19] 基于一种新的参数分离技术和“adding a power integrator”工具为不确定高阶非仿射系统设计了一种仅包含一个自适应参数的稳定控制算法。随后,一种具有统一结构的李雅普诺夫函数^[20]被用于处理高阶非仿射系统中存在的高阶和低阶非线性困难,该函数能设计具有全局有限时间收敛特性的稳定控制器。文献 [21] 研究了一类具有不确定动力学的高阶非仿射系统的全局有限时间自适应镇定问题,提供了一种巧妙的分析策略和一个全新的李雅普诺夫函数,以设计具有快速有限时间收敛特性的控制器。注意到,上述具有有限时间收敛特性的控制器,其收敛时间均

与初始条件有联系,且控制器的结构十分复杂。一方面,当初始状态不可获取或远离平衡点时,控制器的瞬态特性将受到严重影响。不过,固定时间稳定定理^[22]带来了新的解决思路。基于固定时间收敛框架设计的控制器,其收敛速度仅与主要控制参数相关,即初始状态信息不再是闭环系统收敛速度的影响因素。目前,针对高阶非仿射系统的固定时间收敛控制器设计相关成果十分稀少。另一方面,从简化控制器设计的角度出发,文献 [23] 为高阶非仿射系统提出了一种低复杂度跟踪控制算法,但该算法要求高阶非仿射系统满足非线性增长条件。文献 [24] 将受输出约束的高阶非仿射系统作为研究对象提出了一种自适应动态面控制算法,不仅成功消除了增长性条件假设,且适用于跟踪控制问题。值得注意的是,文献 [24] 采用的动态面控制算法主要使用滤波器的输出来近似虚拟控制信号的导数。然而,滤波器的输出并不能完全代替控制信号的导数,这就造成了一定的逼近误差^[25]。如何减小这种误差以提高控制器的跟踪精度,也是高阶非仿射系统控制领域未来发展的重要方向^[26]。另外,固定时间收敛的控制器设计理念又为高阶非仿射系统的研究打开了一片全新的领域^[27]。但是,固定时间收敛理论需要在全新的李雅普诺夫框架下进行设计。因此,如何在固定时间收敛条件下解决高阶非仿射系统的跟踪控制问题也是一项非常有意义的工作。

2 研究现状

概括来讲,非仿射非线性系统领域正朝着多元化、智能化方向发展。本文以 SCI 数据库为查找对象,采用 Citespace 专业文献分析软件^[28]完成相关文献检索与分析工作。在 Citespace 文献分析软件中键入主题词“non-affine control”“non-affine systems”“nonstrict-feedback systems”“nonstrict-feedback control”后,找到了从 1980 年至 2022 年 5 月 28 日以来非仿射非线性系统的相关研究成果。本次检索共发现了 929 篇文献。从图 1 中可以发现,与非仿射控制有联系的聚类关键字共计 15 个。不同颜色板块对应不同年代的研究成果,聚类关键词前的数字越小,出现频次越高。可以看出,非仿射控制研究的爆发主要集中在 2004 年以后。由深紫色逐渐过渡到黄色表示研究成果出现的时间越来越近。其中,“adaptive control”是出现频次最高的一类关键词,说明自适应技术在解决非仿射困难问题方面起到了关键性作用。另外,紧随其后的是“the neural networks”这一项技术,神经网络作为一

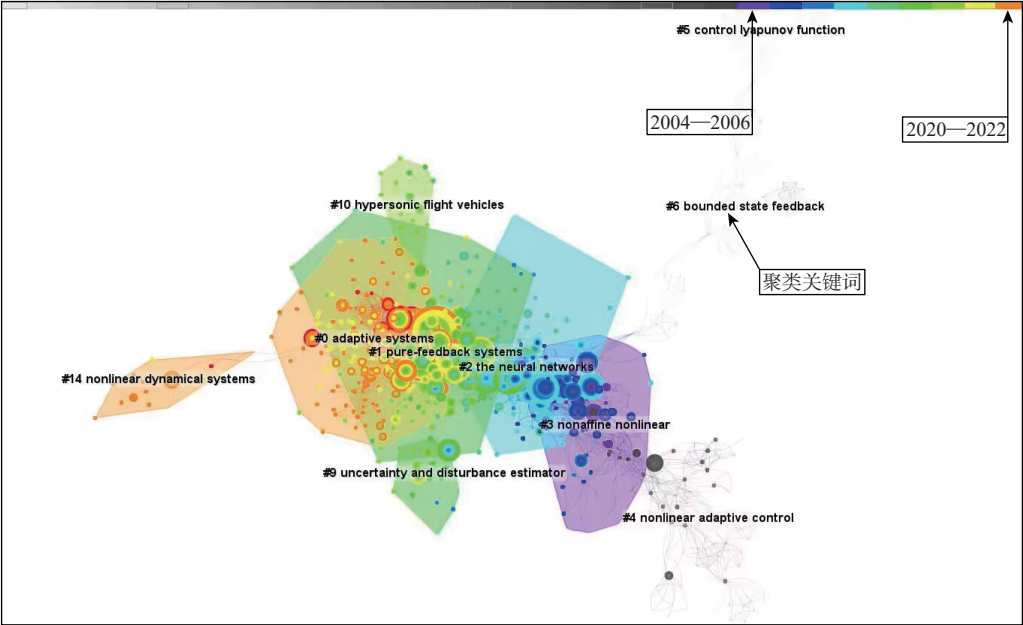


图 1 Citespace 的分析结果

Fig. 1 Analysis results of Citespace

种理想的万能逼近器可以近似非仿射函数, 因此, 也是解决仿射困难问题的常规方案。近年来, 还出现了“hypersonic flight vehicles”技术, 说明非仿射控制理论已经渐渐应用于实际被控对象中。

经过文献分析可以发现, 解决非仿射非线性系统控制问题的方案很多。为描述清晰, 采用结构框图的形式先将现有方法进行细分, 再对每个小类别进行有针对性的综述。

从图 2 可以看出, 目前解决非仿射问题主要分为基于数据驱动和基于模型驱动两大主流方案。从基于模型驱动这一分支出发, 又可以细分为函数变换法和参考模型法。其中, 函数变换法需要明确系统模型, 参考模型法仅需要部分模型。数据驱动法已经完全脱离系统模型的约束。模型变换法按照处理方式的不同, 又可以细分为泰勒展开法、反馈线性化、微分中值定理、半有界建模、逼近法、补零法等 6 种处理方案。参考模型法按照对不确

定动态的处理方式还可以细分为快动态法、自抗扰控制法和加性分解法。对于数据驱动分支, 从控制器设计角度出发将其分为强化学习、迭代学习、PID 控制器和无模型自适应控制器进行介绍。

2.1 函数变换法

函数变换法指的是通过数学理论或额外增加条件/假设后, 将原非线性非仿射函数转换为严格反馈非线性形式。转化后的系统可满足许多经典控制器(反步控制、动态面控制、命令滤波控制^[29]等)的应用条件。

2.1.1 泰勒展开法

泰勒展开法^[30]是以一次泰勒公式为基础发展起来的一种仿射模型转换方法, 其能直接对大部分非仿射非线性系统进行转换, 适应范围广。若非仿射非线性系统 (4) 中的非线性函数满足如下假设: ① $f(x,u)$ 在平衡点 $(x_0=0,u_0=0)$ 足够光滑; ② $f(x,u)$ 在平衡点处的函数值等于零。

在满足上述假设的条件下, 应用泰勒定理可将非仿射非线性系统 (4) 中的非线性函数 $f(x,u)$ 在 x_0 附近的邻域展开为如下形式:

$$f(x,u) = f(x_0,u_0) + \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}(x-x_0) + o(x-x_0) + \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}(u-u_0) + o(u-u_0) \quad (20)$$

式中: $o(u-u_0)$ 、 $o(x-x_0)$ 为残差项; $\partial f(x,u)/\partial x$ 、 $\partial f(x,u)/\partial u$ 为偏导数。

由上述假设可知, $f(x_0=0,u_0=0)=0$, 在忽略残差项的情况下, 可将非仿射非线性系统 (4) 转换为

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (21)$$

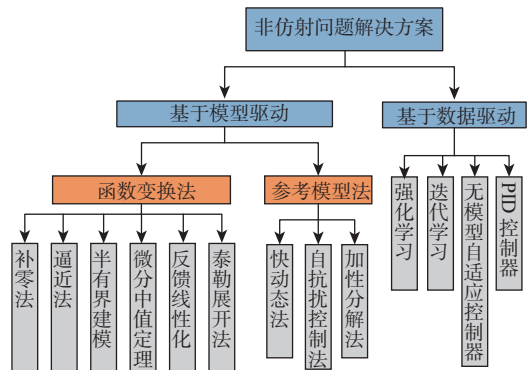


图 2 非仿射问题解决方案之间的关系

Fig. 2 Relationship between non-affine problem solutions

式中:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, u=0} \\ B &= \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, u=0} \end{aligned} \quad (22)$$

由式 (21) 可知, 利用泰勒展开法处理后, 原非仿射非线性系统 (4) 变为线性系统。若原系统转换为线性系统, 可为一些经典控制算法提供应用的基本条件。例如, 基于传递函数的线性控制器设计思想及基于奈奎斯特、伯德图等稳定裕度分析框架可以运用到非线性控制领域。另外, 泰勒展开法简单、直观且物理意义明确, 因此, 可应用于多种控制系统中。

但随着应用范围的逐渐扩大, 研究者们发现泰勒展开法存在如下缺点。例如, 基于泰勒展开法设计的控制器较难应用于多旋翼飞行器、高超声速飞行器的高机动飞行控制中。这是因为利用泰勒展开法处理动态系统的非线性时, 往往会假设各个状态变量接近于平衡点。泰勒展开法的局部特性导致其仅能在平衡点附近才能获得满意的逼近精度。当实际动态轨迹(飞行器的姿态角变化过大)偏离平衡点较远时, 就会因为近似误差过大而导致整个闭环系统出现不稳定的现象。要实现给定的近似精度, 需要在状态空间中的多个工作点运用泰勒展开法作近似处理, 从而获得多个工作点对应的线性定常系统。由此, 必须为每个工作点设计控制器。另外, 为保证无扰动切换, 还需设计相应的补偿器。因此, 复杂的运算将会消耗大量的计算机资源。某些动态系统(高阶非仿射非线性系统^[15])经过 Jacobian 线性化后, 会在原点处出现不可控问题, 因此, 其应用范围受到一定限制。

2.1.2 反馈线性化

反馈线性化^[1]是一种精确的坐标变换方法。首先, 定义微分同胚映射 $T \in \mathbf{R}^n$, 并令 $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$ 。然后, 定义控制输入映射: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{z}, \mathbf{v})$, $\mathbf{v}$ 表示新变量。借助这 2 组映射关系, 可将非仿射非线性系统 (4) 转换为关于新状态 $\mathbf{z}$ 的线性动态方程形式:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{B}_z \mathbf{v} \quad (23)$$

可以发现, 整个变换过程中并未利用泰勒展开这种近似的处理方法。因此, 反馈线性化是一种等效的仿射处理方法。但是, 应用反馈线性化需要动态系统满足对合条件, 并且即使在满足对合条件的情况下如何找到合适的微分同胚映射依旧是一大难点。为消除对合条件的约束, 研究者提出了近似反馈线性化方案^[31]。文献 [9] 利用近似反馈线性化方法处理一类欠驱动倒立摆系统存在的非仿射问

题, 并设计状态反馈控制器, 以此检验该设计方案的实际效果。但是, 近似反馈线性化方法也牺牲了部分非线性信息, 因此, 还需要改进。另外, 反馈线性化是等效变换, 必须要求研究对象的动态模型精确已知。若动态系统存在不确定性或为降低寻找微分同胚映射的难度有意简化研究对象, 则利用反馈线性化设计的闭环控制系统仍存在鲁棒性差的问题。同时, 新状态 $\mathbf{z}$ 的物理意义已经发生改变且不易明确把握。

2.1.3 微分中值定理

为最大限度地保留原动态系统中包含的非线性信息, 研究者提出了基于微分中值定理^[32]的转化方法, 该定理常用于解决如下—类非仿射纯反馈非线性系统的控制问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\bar{\mathbf{x}}_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(\bar{\mathbf{x}}_2, x_3) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{\mathbf{x}}_n, u) \end{cases} \quad (24)$$

式中: $\bar{\mathbf{x}}_j = [x_1, x_2, \dots, x_j]^\top, j = 1, 2, \dots, n$ 。

通过观察可以发现, 动态系统 (24) 与非仿射非线性系统 (4) 相比有如下特点: ①实际控制信号仅出现在最后一个子系统之中; ②每个子系统中最多能够出现比该子系统高一阶的状态变量。应用微分中值定理可以将动态系统 (24) 的非线性函数转换为

$$\begin{cases} f_j(\bar{\mathbf{x}}_j, x_{j+1}) \approx \frac{\partial f_j(\bar{\mathbf{x}}_j, x_{j+1})}{\partial x_{j+1}} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_j=\mathbf{0}} x_{j+1} + f_j(\bar{\mathbf{x}}_j, 0) \\ f_n(\bar{\mathbf{x}}_n, u) \approx \frac{\partial f_n(\bar{\mathbf{x}}_n, u)}{\partial u} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_n=\mathbf{0}, u=0} u + f_n(\bar{\mathbf{x}}_n, 0) \end{cases} \quad (25)$$

观察式 (25) 可以发现, 经过微分中值定理处理后, 每个子系统中开始出现严格反馈信号, 最后一个子系统中开始出现实际控制信号。但是, 这些严格反馈信号与实际控制信号之前均存在时变的偏导数。因此, 为避免控制器的奇异性问题, 通常会假设这些偏导数严格正或严格负, 即符号在整个控制器发挥作用的过程中不能发生改变^[33]。形如式 (24) 所描述的非仿射纯反馈非线性系统, 虽然对控制信号出现的位置做出了限制, 但该类型系统却有着深厚的应用背景。例如, 需要利用舵偏角作为控制输入量的无人船^[34]、固定翼飞行器^[35]、高超声速飞行器^[4]等高精度模型均可看做为非仿射纯反馈非线性系统。因此, 考虑控制信号的非仿射问题也十分具有工程意义。在微分中值定理的辅助下, 反步框架已被广泛应用于处理纯反馈非仿射系统的控制问题。文献 [34] 为具有控制输入非仿射特性的无人船提出了一种反步自适应控制算法。文

献 [36] 将反步控制与自抗扰算法结合后, 提出了一种延时状态反馈跟踪控制算法, 并在具有控制输入非仿射特性的高超声速飞行器模型中进行了相关验证。随后, 动态面控制算法^[37]开始引起科研工作者的关注, 该算法利用滤波器的输出近似虚拟控制信号的导数, 从而省去对虚拟控制信号重复求导的工作。

相比泰勒展开法, 微分中值定理需要的导数信息更少, 并且能够保留更多的非线性信息。但是, 该转换方法还存在如下不足: ①每个子系统上的非线性函数相对于更高阶状态变量必须存在导数; ②这些偏导数必须满足严格正或严格负的限制性条件; ③适用范围没有泰勒展开法广泛。因此, 当动力学系统中存在执行机构饱和、死区等严重不可导现象时, 微分中值定理难以应用。

2.1.4 半有界建模

众所周知, 微分中值定理需要系统函数满足可导性条件。如何去除或弱化该假设条件, 近年来出现了一种可行的替代方案——半有界建模^[38]。若形如动态方程 (24) 描述的一类非仿射纯反馈非线性系统的各个子系统函数满足如下半有界条件:

$$\begin{cases} F_j(\bar{\mathbf{x}}_j, x_{j+1}) \geq x_{j+1} \bar{L}_j + \bar{\theta}_j & x_{j+1} \geq 0 \\ F_j(\bar{\mathbf{x}}_j, x_{j+1}) \leq x_{j+1} \underline{L}_j + \underline{\theta}_j & x_{j+1} < 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

(26)

式中: x_{n+1} 为实际控制信号 u ; $F_j(\bar{\mathbf{x}}_j, x_{j+1}) = f_j(\bar{\mathbf{x}}_j, x_{j+1}) - f_j(\bar{\mathbf{x}}_j, 0)$; $\bar{L}_j$ 、 $\underline{L}_j$ 为未知的正常数; $\bar{\theta}_j$ 、 $\underline{\theta}_j$ 为未知实数。

于是, 非仿射动态系统 (24) 可以被重新建模为具有严格反馈形式的新系统:

$$\dot{x}_j = Q_j(\bar{\mathbf{x}}_{j+1})x_{j+1} + \rho_j(t) + g_j(\bar{\mathbf{x}}_j, 0)$$

(27)

式中: $Q_j(\bar{\mathbf{x}}_{j+1})$ 、 $\rho_j(t)$ 为有界连续函数。

例如, 存在如下纯反馈非线性系统实例:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_2^3/5 \\ f_2(x_1, x_2, u) = x_1x_2 + u + u^3/7 \end{cases}$$

(28)

显然, 系统模型 (27) 满足上述半有界条件。由于已知 $F_1(\bar{\mathbf{x}}_1, x_2) = x_2 + x_2^3/5$, 存在正常数 $\bar{L}_1 = 1$, 使得 $F_1(\bar{\mathbf{x}}_1, x_2) \geq x_2, x_2 \geq 0$ 的结论成立。同理, 若 $\underline{L}_1 = 1$, 则 $F_1(\bar{\mathbf{x}}_1, x_2) < x_2, x_2 < 0$ 。由于半有界连续性条件比可导性条件更弱, 对于控制形如式 (28) 这种类型的非仿射纯反馈系统, 可以从理论上保证所设计的控制器在执行机构发生饱和、死区等不可导情况下, 仍能完成给定的控制任务。因此, 半有界建模方法消除了非仿射函数必须可导的限制条件, 从而在一定程度上扩大了经典控制器的应用范围。例如, 文献 [38] 利用一种包含鲁棒补偿器的动态面控制算法解决了存在不可导函数的纯反馈非线性系统的跟踪控制问题。文献 [39] 进一步考虑动态面控制

存在的滤波误差, 提出了一种命令滤波控制算法, 成功解决了同时具有死区与饱和现象的纯反馈非线性系统的有限时间跟踪控制问题。

2.1.5 逼近法

近年来, 以神经网络^[40-41]和模糊逻辑系统^[42]为代表的万能逼近器在智能控制领域引起了相当大的关注。这是因为在节点数足够多和权重参数设置合理的情况下, 神经网络的输出能以任意精度逼近非线性函数^[43]。在控制领域中, 为近似非线性函数, 可以采用如下径向基函数神经网络:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \boldsymbol{\eta}_1^T \mathbf{W}_1(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}_2^T \mathbf{W}_2(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$$

(29)

式中: $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 为被逼近的非线性函数; $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 为神经网络的逼近误差; $\boldsymbol{\eta}_1$ 、 $\boldsymbol{\eta}_2$ 为权值向量; $\mathbf{W}_1(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{W}_2(\mathbf{x})$ 为激活函数向量。

文献 [44] 针对一类不确定的非线性非仿射 SISO 系统, 提出了一种鲁棒自适应控制器, 采用仿射型神经网络和神经状态反馈补偿逼近误差, 克服外部干扰, 提高了控制器的鲁棒性。文献 [45] 提出了一种神经网络自整定控制器, 并将其应用于离散非仿射非线性系统领域中。文献 [46] 先采用递归神经网络重新构建了包含未知信息的系统动力学方程, 再采用自适应动态规划技术进行控制器设计, 由于在设计过程中采用鲁棒项补偿了神经网络的近似误差, 获得了具有渐进收敛特性的近似最优跟踪控制器。另外, 基于模糊逻辑系统设计的自适应控制器在随机非仿射非线性系统中也取得了良好的控制效果^[47]。利用该万能逼近工具去逼近非仿射项, 可将非仿射系统转化为仿射系统。万能逼近工具虽然有优异的逼近特性, 但也会消耗大量的算力^[48]。另外, 权重参数在调试过程中还存在过拟合问题。因此, 在实际中, 常采用自适应律更新权重参数 $\boldsymbol{\eta}_1$ 、 $\boldsymbol{\eta}_2$ 。其中, 自适应项通常表示为积分器的形式, 不仅相当占用计算机资源, 且会降低闭环系统的稳定裕度^[49]。另外, 为提高近似精度, 必须增加神经网络的节点数量, 将会进一步消耗计算资源。神经网络逼近需要在一个指定的 $\mathbf{x}$ 的紧集上才能获得满意的精度。在实际环境中, 由于外界干扰等问题极易导致状态超出指定的紧集, 会导致神经网络的逼近精度难以得到保证^[50]。文献 [51] 利用神经网络估计隐式的理想状态反馈控制信号, 解决了一类非仿射非线性系统的状态反馈跟踪问题。受限于传感器的精确, 全状态反馈控制器有时难以取得良好的控制效果^[41]。为解决该问题, 文献 [52] 针对非仿射非线性系统提出了一种模糊输出反馈控制器设计方案。经过总结可以发现, 神经网络的主要作用是处理非仿射系统中的非仿射

项或不确定扰动,以此来简化控制器的设计工作。

2.1.6 补零法

补零法可以用于处理虚拟控制信号的非仿射问题,即在动态系统中补充一对平衡点,从而为引入虚拟控制信号奠定基础。以动态系统(24)为例,考虑其控制器设计问题。由于子动态系统 $\dot{x}_j$ 中无法单独分析出仿射变量 x_{j+1} ,会给反步控制器设计带来不便,无法引入虚拟控制信号。因此,子系统的状态有界性难以得到控制。可将动态系统(24)整理成如下形式:

$$\dot{x}_j = f_j(\bar{x}_j, x_{j+1}) - x_{j+1} + x_{j+1} \tag{30}$$

式中: $-x_{j+1} + x_{j+1}$ 可看为一对补充的零点,即补零法。补零思想虽然简单方便,但其中多余的仿射量还需进一步处理。目前的可行方案是将多余仿射变量视为动态系统中包含的不确定动态。因此,可以采用观测器、神经元网络等估计工具进行处理。

综上,泰勒展开法、反馈线性化、微分中值定理、半有界建模、逼近法、补零法等6种处理方案的特点可以用表1来描述。可以看出,泰勒展开法的适用性最广,可以看成是一种近似处理方案。虽然反馈线性化的前提条件较为苛刻,但其却可以做到等效转换。微分中值定理的转换精度比泰勒展开法稍高,但其没有泰勒展开法的适用范围广。近年来提出的半有界建模法虽然不存在可导性约束,但如何判断系统函数是否满足半有界条件依旧是一个具有挑战性的问题。逼近法不仅存在逼近误差,也存在紧集难以确定等问题。由此,目前利用函数变换法处理仿射困难问题的方案还存在不足,具体表现在可导性约束、转换精度低、计算负载过大等方面。补零法在解决非仿射问题的过程中,由于不存在可导性约束和计算负载过大等问题,适用范围较为广泛。

表 1 6 种仿射解决方案对比

Table 1 Comparison of six affine solutions

方案	适用范围	可导性约束	有界性条件	计算复杂度
泰勒展开法	+++++	+++++		+++
反馈线性化	++	+++++		++++
微分中值定理	++	+++		+++
半有界建模	++		有	++
逼近法	++++			+++++
补零法	++++			+

注:“+”越多则相关指标越大。

2.2 参考模型法

与函数变换法不同,参考模型法集中精力寻找一种近似的模型代替原来的非仿射模型,从而达到消除非仿射困难的目的。参考模型通常将非仿射

非线性系统中的非仿射项抵消或重新设计控制信号,使得原系统成为一种易于稳定性分析的参考模型。在该过程中,可以不依赖 $f(x,u)$ 的精确形式。

2.2.1 快动态法

针对一维非仿射非线性系统(4),可以设计如下“快动态^[8]”:

$$\epsilon \dot{u} = -\text{sign}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(f(x,u) + ax) \quad 0 < \epsilon \leq 1 \tag{31}$$

式中: $a > 0$; $\text{sign}(\cdot)$ 为标准符号函数。

该方法将一维非仿射非线性系统(4)看作为一种“慢动态”。假设通过求解快动态方程的控制信号能使原系统变成如下自稳定系统:

$$\dot{x} = -ax \tag{32}$$

观察快动态(31)的表达式可以发现,其设计参数较少,能大大降低参数调试的难度。文献[53]运用时间尺度分离定理,将控制非仿射系统分成快动态与慢动态子系统后,利用自适应动态逆框架设计相关控制算法,理论与仿真结果均表明该控制算法能够满足 Tikhonov 定理^[54]假设的充分条件。然而,基于快动态的控制算法需在如下方面进行改进:①文献[8]仅限于讨论标量动态系统的控制器设计问题,如何将“快动态”的控制器设计方案扩展到高维动态系统中有待进一步研究;②控制器中涉及原系统信息 $f(x,u)$,需要建立精确的动态模型;③需要利用非线性函数的一阶导数。

2.2.2 自抗扰控制法

本文针对自抗扰控制^[55],以二阶非仿射非线性系统为研究对象进行举例说明:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, u) + \Delta_d \end{cases} \tag{33}$$

式中: $g_1(x_1, x_2)$ 、 $g_2(x_1, x_2, u)$ 为未知的系统函数; Δ_d 为有界的外部扰动信号。

定义一组新的坐标变换:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = g_1(x_1, x_2) \end{cases} \tag{34}$$

借助式(34)提供的坐标转换工具,可将非仿射非线性系统(33)转换为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2) = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \\ \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} (g_2(x_1, x_2, u) + \Delta_d) + \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} y_2 \end{cases} \tag{35}$$

自抗扰控制的核心思想是将 y_2 中的非仿射函数、偏导数和外部扰动信号等看成是总扰动^[56-57],

由 $\dot{y}_3 = w$ 表示。另外, 为使控制信号能够以线性的形式出现在动态系统中, 还需引入 $b_0 u$, 其中, b_0 为待设计的正实数。式 (35) 可整理为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 + b_0 u \\ \dot{y}_3 = w \end{cases} \quad (36)$$

式中:

$$y_3 = \left(\frac{\partial g_1(\bar{x}_2)}{\partial x_2} \right) (g_2(\bar{x}_2, u) + \Delta_d) + \left(\frac{\partial g_1(\bar{x}_2)}{\partial x_1} \right) y_2 - b_0 u$$

通过以上转换可以发现, 每个子系统中的非线性项或不确定扰动都被转换到最后一个动态 y_3 中。 y_3 被视为动态系统新增加的状态, 因此, 观测信号的维度也需要增加。于是, 这类观测器被定义为扩张状态观测器。由于自抗扰控制器在设计过程中并未用到任何模型信息, 该算法有较为宽广的适用范围^[58-59]。自抗扰控制器提供的模型转换思路也可以看成是解决非仿射问题的一种有效方案^[60]。但是, 这种思路目前主要集中于二阶非线性系统领域, 若扩展到高维非线性系统, 还相对复杂。不仅如此, 所有的非线性均视为扰动并做统一的处理, 这种做法难免有不合实际的情况, 这是因为不同种类的扰动可能对动态系统产生不同的影响。但是, 自抗扰控制器的设计参数相对较少, 且相关学者还总结出了一些经验公式用于确定这些参数, 因此, 参数整定的工作量大大减小。但在某些情况下, 也需要充分利用物理系统的非线性信息, 可进一步提升控制器的跟踪质量。另外, 如何将一般系统转化为式 (36) 的形式也是自抗扰控制面临的一大挑战。

2.2.3 加性分解法

加性分解^[61] 可以看成是叠加原理在非线性系统控制领域的一种推广, 其基本思想是: 将原控制任务分解成多个子任务, 从而降低控制器设计的难度。考虑如下一类包含扰动的非仿射非线性系统的全状态镇定问题:

$$\dot{x} = f(x, u, d) \quad (37)$$

式中: $x \in \mathbf{R}^n$ 、 $u \in \mathbf{R}^m$ 、 $d \in \mathbf{R}^n$ 分别为系统状态、实际控制信号、与时间相关的外部扰动。选择一个输出函数:

$$y = g(x) \quad (38)$$

若该输出函数能够保证式 (37) 和式 (38) 是最小相位系统, 则控制任务是保证 $y \rightarrow 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 。另外, 输出函数的导数可以表示为

$$\dot{y} = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x, u, d) \quad (39)$$

选择如下主系统:

$$\dot{y}_p = A_p y_p + B_p u_p \quad (40)$$

式中: $A_p \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 、 $B_p \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为常数矩阵; u_p 为主系统的控制信号。

原系统 (37) 减去主系统 (40) 可以得到如下关于辅系统的状态方程:

$$\dot{y}_s = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x, u_p + u_s, d) - (A_p y_p + B_p u_p) \quad (41)$$

式中: u_s 为辅系统的控制信号。

假设将辅系统状态 y_s 看成是总扰动 d_l , 并且令 $u_p = u$, 则式 (37) 可以描述为

$$\begin{cases} \dot{y}_p = A_p y_p + B_p u \\ y = y_p + d_l \end{cases} \quad (42)$$

由此可以看出, 辅系统主要完成扰动抑制任务, 主系统完成跟踪任务。其中, 非仿射项已经被当成扰动的一部分并整理到辅系统中进行集中处理。这种分解思路不仅成功解决了非仿射问题, 而且降低了控制器设计的难度。由于主系统是线性时不变系统, 有很多成熟的控制方法能够完成该系统的控制器设计工作。目前, 加性分解思路已经成功应用于四旋翼飞行器^[11]、空中加油对接^[62]、倾斜转弯导弹^[63] 等一系列实际场景中。然而, 如何构造 $g(x)$ 使得原系统变成非最小相位系统, 以及如何处理 d_l 中与状态相关的扰动成分, 仍需要进一步研究。

2.3 数据驱动法

数据驱动法已经不再重点关注如何对非仿射模型进行转换, 其直接从控制器入手去解决非仿射困难问题, 即先设计一种控制器, 再分析非仿射非线性系统在满足什么条件的情况下才能保证该控制器的收敛性。数据驱动法指的是利用动态系统产生的过程信息或从已有数据中学习新知识后用以解决控制问题的方法^[64-65]。2.1 节和 2.2 节描述的直接从模型入手进行控制器设计的过程是基于模型的设计思路。然而, 实际控制对象不仅难以精确建模, 而且往往存在非仿射特性, 会为控制器设计带来前所未有的困难。即使为实际应用对象建立了动态模型, 也是建立在许多理想化假设基础上。因此, 基于模型的控制方法必须考虑未建模动态的影响^[66]。基于数据驱动的控制算法提供了思路。目前, 基于数据驱动思想设计控制器主要有强化学习、迭代学习、PID 控制器、无模型自适应控制器等控制算法。

2.3.1 强化学习 (自适应动态规划)

强化学习指的是智能体(控制器)能够根据环境(被控对象)给出的奖励或者惩罚信号实时调整自己的动作(控制信号), 从而完成给定的控制任务^[67]。

因此,强化学习控制是一种无模型设计思路,同样可用于解决非仿射系统控制问题^[68]。目前,主流的强化学习技术主要分为动态规划、蒙特卡罗和时序差分学习三大类^[69]。在控制领域中,较为常用的是从最优控制发展而来的自适应动态规划算法。自适应动态规划算法设计可以分为策略迭代^[67]与值迭代^[67]两大类。最终目的是使效能函数取得最小值,从而获取最优控制策略。基于策略迭代的自适应近似动态规划算法可以归纳为如下 4 个步骤:

步骤 1 初始化一个可行的控制信号 $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ 。

步骤 2 根据给定的控制信号计算如下效能函数的输出值:

$$V_{i+1}(\mathbf{x}) = \int_t^{t+T} R(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\mathbf{x}(\tau))) d\tau + V_{i+1}(\mathbf{x}(t+T)) \tag{43}$$

式中: $R(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\mathbf{x}(\tau)))$ 为奖励函数; T 为采样周期; i 为迭代次数标记。

步骤 3 利用如下方程获得当前迭代步骤中的最优控制信号 $\mathbf{u}_{i+1}$:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \arg \min_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla V_{i+1}) \tag{44}$$

式中: $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla V_{i+1})$ 为 Hamilton 函数; ∇V_{i+1} 为函数 V_{i+1} 的梯度。

步骤 4 重复上述步骤,直到达到最大迭代次数或小于相应误差限,则终止迭代。

目前,已经出现利用自适应动态规划^[70]等强化学习技术建立的基于“模型+数据”驱动的通用控制等相关研究成果。例如,文献 [71] 基于简化的变体飞行器动力学模型,利用反步框架设计了基础控制器,为进一步提升控制器的跟踪性能,以误差变量作为输入信号,设计了执行依赖启发式动态规划补充控制器,该设计方案的主要思想是将传统的控制算法作为被控对象的主要控制器,由于传统控制器需要模型信息,当模型信息不精确时,经典控制器的性能难以有效提升,此时,基于强化学习的补充控制器开始介入,由于此时闭环系统已经能够稳定,可以获得大量优质数据,从而提升了训练速度。“模型+数据”驱动的控制器的设计思路在设计复杂度和训练复杂度之间取得了良好折中,因此开始广泛应用。在多旋翼的轨迹跟踪控制领域也出现过基于“模型+数据”的控制器设计思路^[72]。在整个闭环系统中,文献 [72] 采用串级比例微分算法分别对四旋翼飞行器的期望俯仰角、期望滚转角、3 个转矩和总升力设计了相关基础控制器,从而实现了基本的轨迹跟踪,并从该基础控制器构成的闭环系统采集输入输出数据,用于训练强化学习补充

控制器,在训练过程中,还采用了经验回放技术使得训练更加稳定。另外,为降低通信复杂度,文献 [73] 在“模型+数据”的控制器结构中引入了事件触发机制。

2.3.2 迭代学习

迭代学习控制算法可为重复操作过程提供一种合适的控制信号,以实现零误差操作。迭代学习控制技术^[74-75]也可以视为一种数据驱动控制算法,其主要思想是:将系统的跟踪误差作为评价指标,不断在线学习和纠正执行器的动作,从而提升控制器的性能^[76]。迭代学习由于需要从以往的经验中进行学习,常用于解决具有重复动作的跟踪控制问题,如抓取、焊接、喷涂等实际操作轨迹控制。迭代学习是一种不依赖于具体数学模型的控制算法,可用于解决非仿射非线性系统的控制问题。该算法的整个执行过程类似于人们完成重复操作任务的场景。虽然在操作初期,期望行为与实际行为的偏差较大,但操作人员会总结经验并不断改变自己的操作技巧,从而无限接近于期望的操作。从专业角度分析,迭代学习是通过学习律不断地去纠正或更新控制信号,从而使得实际输出更加接近于期望输出。可以发现,迭代控制算法的学习律显著影响控制器的性能。因此,如何设计具有快速收敛特性的学习率一直是迭代学习领域研究的热点。目前,主要存在 2 种经典的学习律,即 D 形学习律和 P 形学习律。

D 形学习律:

$$\mathbf{u}_{j+1}(t) = \mathbf{u}_j(t) + \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{e}}_j(t) \tag{45}$$

P 形学习律:

$$\mathbf{u}_{j+1}(t) = \mathbf{u}_j(t) + \mathbf{K} \mathbf{e}_j(t) \tag{46}$$

式中: $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{\Gamma}$ 为常数增益矩阵; $\mathbf{e}_j(t)$ 、 $\dot{\mathbf{e}}_j(t)$ 为跟踪误差及其一阶导数。

迭代学习的收敛性证明依赖于压缩映射原理,这与强化学习的收敛性证明采用的方法比较接近。

2.3.3 PID 控制器

经典的 PID 控制技术^[77]可以看成是最早的无模型控制器。对于给定的期望轨迹,在输出信号可测的情况下,可以获得误差信息 $\mathbf{e}(t)$ 。以该误差信息为变量,构造如下 PID 控制器:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_p \mathbf{e}(t) + \mathbf{K}_i \int_0^t \mathbf{e}(s) ds + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}(t) \tag{47}$$

式中: $\mathbf{K}_p$ 、 $\mathbf{K}_i$ 、 $\mathbf{K}_d$ 为给定的控制参数。

由于控制信号并未利用任何关于动态系统的信息, PID 控制算法也可以用于解决非仿射非线性系统的控制问题。针对非仿射非线性系统,文献 [78]

证明了 PID 控制算法能够实现全局稳定性所必须满足的全局李普希茨条件。但是, 传统 PID 控制算法仅利用关于误差的加权和输出信号, 并且其中的微分项对噪声非常敏感, 使得 PID 控制器在处理严重非线性、强耦合、参数不确定性的控制问题时存在一定难度。文献 [79] 提出可将不确定函数的偏导数上界看作先验信息, 保证所选择 PID 参数能够满足闭环系统的收敛条件。数据驱动的思想在 PID 控制器设计中主要体现在 PID 参数整定方面。众所周知, 传统的 PID 控制器虽然结构简单, 但需要工程师凭借经验去调整 PID 参数。一旦 PID 参数给定后, 无法在线实时调整^[25]。然而, 实际被控对象及周围环境均存在巨大的干扰, 因此, 固定的 PID 参数显然无法表现出良好的抗扰性能。例如, 将机器人的状态信息作为模糊系统的输入, 一种自整定粒子群优化 PID 控制器被成功应用于机械手的定点控制领域中^[26]。文献 [27] 利用响应特性信息构建模糊系统的隶属度函数, 从而获得一种智能自整定的 PID 控制器, 成功应用于永磁同步电机控制领域中。

2.3.4 无模型自适应控制器

无模型自适应控制指的是仅利用受控系统的输入输出数据在线实时估计相关系统参数, 从而建立不包含任何系统信息的自适应控制器^[80-81]。随着计算机技术的发展, 使得设计者能够利用实时状态数据、跟踪误差等信息建立起易于控制器设计的动力学模型^[82-83]。以一维系统为例, 可以将复杂的非仿射非线性系统在线建模成一阶线性系统:

$$y(k+1) = \theta_1 y(k) + \theta_2 u(k) \tag{48}$$

为达到更好的逼近效果, 也可以建模成如下二阶线性系统:

$$y(k+1) = \theta_2 y(k-1) + \theta_3 u(k) + \theta_4 u(k-1) + \theta_1 y(k) \tag{49}$$

式中: $\theta_i(i=1,2,3,4)$ 为需要通过输入输出数据进行估计的未知参数。

无模型自适应控制算法通常采用投影算法或最小二乘法获取未知参数 $\theta_i(i=1,2,3,4)$ 的估计值 $\hat{\theta}_i(i=1,2,3,4)$ 。因此, 按照等价性原理, 一阶线性系统的控制器可以设计成如下形式^[1,84]:

$$u(k) = \frac{1}{\hat{\theta}_2(k)} (y_d(k+1) - \hat{\theta}_1(k)y(k)) \tag{50}$$

同样, 二阶线性系统的控制器可以设计为

$$u(k) = \frac{1}{\hat{\theta}_3(k)} (y_d(k+1) - \hat{\theta}_1(k)y(k)) - \frac{1}{\hat{\theta}_3(k)} (\hat{\theta}_2 y(k-1) + \hat{\theta}_4 u(k-1)) \tag{51}$$

3 挑战和发展趋势

非仿射非线性系统相比仿射非线性系统缺少结构信息, 更加一般。目前, 非仿射研究领域主要从基于模型和基于数据两大主线开展研究。

3.1 基于模型的控制器设计

基于模型的非仿射控制器设计并没有通用的解决方案, 只能具体问题具体分析。目前, 研究的主要精力考虑如何将非仿射非线性系统转化为仿射非线性系统, 或者考虑扩展模型和问题的范围。

3.1.1 仿射化角度

对于仿射化的研究, 或多或少都会忽略原有系统的部分信息。因此, 如何利用一种新工具将一般非仿射非线性系统无差别或高精度地转换为利于控制器设计的仿射非线性系统, 仍是一个开放性的问题。神经网络是一种比较通用的逼近非仿射函数的通用方法。然而, 逼近的前提是系统状态必须限制在紧集中, 这往往以假设方式给出。针对该问题, Song 等^[50] 提出利用屏障函数将相关状态变量限制在定义的紧集中, 进而采用神经网络逼近, 解决非仿射非线性系统的控制问题。这为仿射化打开了一条新思路。

3.1.2 模型角度

已有研究成果还集中于解决结构较为简单的非仿射系统的控制问题, 实质上, 非仿射非线性系统的形式可以任意复杂。即使对目前考虑的系统, 还存在诸多约束。例如, 对于非仿射高阶系统, 目前还存在增长性条件约束、幂必须是正奇整数等一系列假设。因此, 如何解决更加复杂的非仿射非线性系统的控制问题是科研人员努力的方向。

3.1.3 问题角度

单系统的镇定和跟踪是最基本的问题。根据实际需求, 输入、状态和输出受限、扰动、输入时滞等特点, 会使得针对非仿射非线性系统的镇定和跟踪更加困难。例如, 针对非仿射非线性系统的非最小相位跟踪控制就非常具有挑战。

3.1.4 应用角度

从应用扩展出发, 可以考虑卫星变轨、导弹、无人飞行器、机器人等大量存在脉冲突变现象的非仿射动态系统。脉冲控制技术^[85] 作为一种非连续控制机制, 具有节省能量、通信负载低、鲁棒性强等优势。因此, 如何解决非仿射脉冲非线性系统的控制问题变得更加具有实际意义。

3.2 基于数据的控制器设计

随着系统愈发复杂和数据量增多, 基于模型的设计方法往往更加复杂, 其建模过程繁琐。针对该

问题,利用强化学习和深度神经网络相结合的方法成为当今主流。例如,近期 Deepmind 通过以上方法快速控制磁约束聚变装置——托卡马克的全部 19 个线圈,并精确操纵等离子体自主呈现各种形状,以实现核聚变^[86]。值得说明的是,强化学习和深度神经网络相结合的方法均需要大量的数据,以及寻找合适的奖惩函数才能获得满意的控制效果。一直存在以下挑战:如何保证小样本数据学习?如何保证训练过程系统安全?如何尽可能不依赖人为定义的奖惩函数?如何理论上保证闭环系统的稳定性和稳定裕度等?这些都需要科研人员进行探索。

3.3 基于“模型+数据”的控制器设计

基于模型的控制器设计虽然适用范围有限,但计算负载低。以强化学习为代表的基于数据的控制器设计适用范围广,但训练过程非常耗时且需要巨大样本量。由此可见,直接利用强化学习技术作为主要控制器还是存在很多不足。那么,如何在小样本的基础上进行快速学习从而获得性能优异的控制器,是科研人员追寻的一大目标。针对这种困境,是否可以考虑“模型+数据”的控制器设计方案?即先面向经过简化处理的被控对象设计控制器初步取得一定的控制效果,再在此基础上将输入输出数据作为样本,训练基于强化学习、深度学习的控制器,使得控制性能得到进一步提升。

近年来,“模型+数据”的控制器为解决纯数据驱动方案存在的稳定性差、训练过程繁琐等问题提供了思路。总体来讲,可概括为如下方案:

1) 可以利用可获得的系统动力学知识建立简单的面向控制的动力学模型,实现最基本的控制需求。在实现基本控制需求的基础上,利用强化学习技术作为补充控制器。收集在基本控制器作用下系统的输入输出样本数据,并用于训练强化学习控制器的权重参数。相比利用随机噪声激励动态系统产生的样本数据来说,上述方案收集到的样本数据的质量明显更高,这样可以显著减少收集样本的数量。

2) 将强化学习逼近技术去精确优化动力学模型。首先,将面向控制的动力学模型和真实动力学模型之间的未建模部分视为未知函数。根据万能逼近定理,存在一个神经网络逼近器,能够在给定紧凑集上以任意精度逼近此未知函数。然后,利用从原动态系统中采集到的输入输出数据去训练逼近器的权重参数,从而实现对未知动态的精确建模。最后,基于此精确优化后的动力学模型再进行相关控制设计,必定会使得控制器的性能得到显著提升。

3) 加性分解为此提供了一条可能的思路。例如,考虑非仿射非线性非最小相位系统的跟踪控制问题。利用加性分解^[61]将原系统分解为线性主系统和非线性辅系统以实现控制任务分配。其中,线性主系统可以视为原系统的简化形式,利用经典控制器设计方案解决该类型系统的跟踪控制问题。该方案并未丢弃在原系统转化为主系统的过程中产生的建模误差,而是将这一部分因素放在辅系统中做进一步处理。因此,辅系统主要完成镇定控制任务,即扰动抑制。此时,强化学习控制器可以负责完成此镇定控制任务^[87]。由于主系统控制器已经取得了初步的控制效果(至少能保证整个闭环系统的稳定),可从主系统采集这种优质样本数据对强化学习控制器加以训练,就能够明显缩短训练时间,且跟踪性能也能够得到明显提升。

4 结束语

本文从解决非仿射非线性系统的仿射困难问题出发,综述近十年来取得的研究成果。经过归纳总结后发现,目前的主要研究成果是从基于模型或基于数据两大方向入手去解决非仿射问题,并完成相关的控制器设计。然而,基于模型的解决思路目前还未出现比较通用的解决方案,基于数据的解决思路也存在参数调整困难、训练负载高等问题。因此,在未来的非仿射非线性系统的控制研究领域仍存在很多挑战。但是,随着面临控制问题和动态系统的日益复杂,基于模型的方法及人工智能为代表的基于数据方法的不断深入,必将使得非仿射控制领域的相关理论得到进一步完善。

参考文献 (References)

[1] SLOTINE J J, LI W P. Applied nonlinear control[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1991.

[2] WANG Y H, CHEN M, WU Q X, et al. Fuzzy adaptive non-affine attitude tracking control for a generic hypersonic flight vehicle[J]. Aerospace Science and Technology, 2018, 80: 56-66.

[3] XU D Z, JIANG B, SHI P. Global robust tracking control of non-affine nonlinear systems with application to yaw control of UAV helicopter[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2013, 11(5): 957-965.

[4] PARKER J T, SERRANI A, YURKOVICH S, et al. Control-oriented modeling of an air-breathing hypersonic vehicle[J]. Journal of Guidance Control Dynamics, 2007, 30(3): 856-869.

[5] YU J P, SHI P, ZHAO L. Finite-time command filtered backstepping control for a class of nonlinear systems[J]. Automatica, 2018, 92: 173-180.

[6] LING S, WANG H Q, LIU P X. Adaptive fuzzy dynamic surface control of flexible-joint robot systems with input saturation[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2019, 6(1): 97-107.

- [7] 宋永端, 宋琦. 非仿射系统的控制器设计方法综述[C]//第十三届中国控制会议. Piscataway: IEEE Press, 2011: 785-790.
SONG Y D, SONG Q. Survey of the latest developments in control of non-affine systems[C]//Proceedings of the 13th Chinese Control Conference. Piscataway: IEEE Press, 2011: 785-790(in Chinese).
- [8] HOVAKIMYAN N, LAVRETSKY E, SASANE A. Dynamic inversion for nonaffine-in-control systems via time-scale separation. Part I [J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2007, 13(4): 451-465.
- [9] CARDOSO G S, SCHNITMAN L. Analysis of exact linearization and aproximate feedback linearization techniques[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2011, 2011: 205939.
- [10] ZHANG T P, GE S S. Adaptive dynamic surface control of nonlinear systems with unknown dead zone in pure feedback form[J]. Automatica, 2008, 44(7): 1895-1903.
- [11] QUAN Q. Introduction to multicopter design and control[M]. Berlin: Springer, 2017.
- [12] 张伸. 基于干扰观测器的高超声速飞行器非线性控制方法研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2019.
ZHANG S. Research on nonlinear control method of hypersonic vehicle based on disturbance observer[D]. Beijing: Beihang University, 2019(in Chinese).
- [13] XU L X, WANG Y L, WANG F, et al. Event-triggered active disturbance rejection trajectory tracking control for a quadrotor unmanned aerial vehicle[J]. Applied Mathematics and Computation, 2023, 449: 1-13.
- [14] JIANG Z P, HILL D J. A robust adaptive backstepping scheme for nonlinear systems with unmodeled dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(9): 1705-1711.
- [15] LIN W, QIAN C J. Adaptive regulation of high-order lower-triangular systems: An adding a power integrator technique[J]. Systems & Control Letters, 2000, 39(5): 353-364.
- [16] RUI C, REYHANOGLU M, KOLMANOVSKY I, et al. Nonsmooth stabilization of an underactuated unstable two degrees of freedom mechanical system[C]//Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway: IEEE Press, 1997: 3998-4003.
- [17] WANG N, TAO F Z, FU Z M, et al. Adaptive fuzzy control for a class of stochastic strict feedback high-order nonlinear systems with full-state constraints[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(1): 205-213.
- [18] FU Z M, WANG N, SONG S Z, et al. Adaptive fuzzy finite-time tracking control of stochastic high-order nonlinear systems with a class of prescribed performance[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(1): 88-96.
- [19] LIN W, QIAN C J. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: The smooth feedback case[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(8): 1249-1266.
- [20] SUN Z Y, YUN M M, LI T. A new approach to fast global finite-time stabilization of high-order nonlinear system[J]. Automatica, 2017, 81: 455-463.
- [21] SUN Z Y, SHAO Y, CHEN C C. Fast finite-time stability and its application in adaptive control of high-order nonlinear system[J]. Automatica, 2019, 106: 339-348.
- [22] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [23] YOO S J. Low-complexity robust tracking of high-order nonlinear systems with application to underactuated mechanical dynamics[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 91(3): 1627-1637.
- [24] LING S, WANG H Q, LIU P X. Adaptive tracking control of high-order nonlinear systems under asymmetric output constraint[J]. Automatica, 2020, 122: 109281.
- [25] CAMERON F, SEBORG D E. A self-tuning controller with a PID structure[J]. IFAC Proceedings Volumes, 1983, 16(1): 613-622.
- [26] LIU Y, JIANG D, YUN J T, et al. Self-tuning control of manipulator positioning based on fuzzy PID and PSO algorithm[J]. Frontiers in Bioengineering and Biotechnology, 2021, 9: 817723.
- [27] FU Z L, LIU C P, RUAN S Y, et al. Design of neurotrophic self-tuning PID controller for AC permanent magnet synchronous motor based on neurotrophic theory[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2021, 2021: 5548184.
- [28] CHEN C M. CiteSpace: A practical guide for mapping scientific literature[M]. New York: Nova Science Publishers, 2016.
- [29] FARRELL J A, POLYCARPOU M, SHARMA M, et al. Command filtered backstepping[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1391-1395.
- [30] LABIOD S, GUERRA T M. Indirect adaptive fuzzy control for a class of nonaffine nonlinear systems with unknown control directions[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2010, 8(4): 903-907.
- [31] BEDROSSIAN N S. Approximate feedback linearization: the cart-pole example[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Piscataway: IEEE Press, 1992: 1987-1992.
- [32] WANG M, GE S S, HONG K S. Approximation-based adaptive tracking control of pure-feedback nonlinear systems with multiple unknown time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2010, 21(11): 1804-1816.
- [33] LIU Y H. Adaptive tracking control for a class of uncertain pure-feedback systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(5): 1143-1154.
- [34] HASELTALAB A, NEGENBORN R R. Adaptive control for autonomous ships with uncertain model and unknown propeller dynamics[J]. Control Engineering Practice, 2019, 91: 104116.
- [35] RAZA A, MALIK F M, KHAN R, et al. Robust output feedback control of fixed-wing aircraft[J]. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 2020, 92(8): 1263-1273.
- [36] ZHANG S, WANG Q, YANG G, et al. Anti-disturbance backstepping control for air-breathing hypersonic vehicles based on extended state observer[J]. ISA Transactions, 2019, 92: 84-93.
- [37] SWAROOP D, HEDRICK J K, YIP P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(10): 1893-1899.
- [38] LIU Z C, DONG X M, XIE W J, et al. Adaptive fuzzy control for pure-feedback nonlinear systems with nonaffine functions being semibounded and indifferntiable[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(2): 395-408.
- [39] CHEN L, WANG Q. Finite-time adaptive fuzzy command filtered control for nonlinear systems with indifferntiable non-affine functions[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 100(1): 493-507.
- [40] GE S S, ZHANG J. Neural-network control of nonaffine nonlinear

system with zero dynamics by state and output feedback[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2003, 14(4): 900-918.

[41] LIU Y J, TONG S C, LI Y M. Adaptive neural network tracking control for a class of non-linear systems[J]. International Journal of Systems Science, 2010, 41(2): 143-158.

[42] JI W Q, WANG M, QIU J B. Fuzzy-model-based output feedback controller design for discrete-time non-affine nonlinear systems via piecewise Lyapunov functions[C]//Proceedings of the 8th International Conference on Information Science and Technology. Piscataway: IEEE Press, 2018: 288-293.

[43] CUI Q, WANG Y J, SONG Y D. Neuroadaptive fault-tolerant control under multiple objective constraints with applications to tire production systems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 32(8): 3391-3400.

[44] FU Y, CHAI T Y. Indirect self-tuning control using multiple models for non-affine nonlinear systems[J]. International Journal of Control, 2011, 84(6): 1031-1040.

[45] ZHAO S T, GAO X W. Robust adaptive control for a class of uncertain non-affine nonlinear systems using affine-type neural networks[J]. International Journal of Systems Science, 2016, 47(11): 2691-2699.

[46] ZHANG H G, CUI L L, ZHANG X, et al. Data-driven robust approximate optimal tracking control for unknown general nonlinear systems using adaptive dynamic programming method[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(12): 2226-2236.

[47] GANG T T, YANG J, GAO Q, et al. A fuzzy approach to robust control of stochastic nonaffine nonlinear systems[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2012, 2012: 439805.

[48] LUO S H, LEWIS F L, SONG Y D, et al. Accelerated adaptive fuzzy optimal control of three coupled fractional-order chaotic electromechanical transducers[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 29(7): 1701-1714.

[49] QUAN Q, DU G X, CAI K Y. Proportional-integral stabilizing control of a class of MIMO systems subject to nonparametric uncertainties by additive-state-decomposition dynamic inversion design[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2016, 21(2): 1092-1101.

[50] SONG Y D, HE L, WANG Y J. Globally exponentially stable tracking control of self-restructuring nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(9): 4755-4765.

[51] GE S S, ZHANG J. State feedback NN control of non-affine nonlinear system with zero dynamics[C]//Proceedings of the American Control Conference. Piscataway: IEEE Press, 2003: 4530-4535.

[52] LIU Y J, TONG S C, WANG W. Adaptive fuzzy output tracking control for a class of uncertain nonlinear systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(19): 2727-2754.

[53] LAVRETSKY E, HOVAKIMYAN N. Adaptive dynamic inversion for nonaffine-in-control uncertain systems via time-scale separation. Part II[J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2008, 14(1): 33-41.

[54] KHALIL H K. Nonlinear systems[M]. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.

[55] HAN J Q. From PID to active disturbance rejection control[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2009, 56(3): 900-906.

[56] 金辉宇, 张瑞青, 王雷, 等. 线性自抗扰控制参数整定鲁棒性的根轨迹分析[J]. 控制理论与应用, 2018, 35(11): 1648-1653.

JIN H Y, ZHANG R Q, WANG L, et al. Root locus analysis on parameter tuning robustness of linear active disturbance rejection control[J]. Control Theory & Applications, 2018, 35(11): 1648-1653 (in Chinese).

[57] 高志强. 自抗扰控制思想探究[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(12): 1498-1510.

GAO Z Q. On the foundation of active disturbance rejection control[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(12): 1498-1510(in Chinese).

[58] CHEN S, XUE W C, HUANG Y. On active disturbance rejection control for nonlinear systems with multiple uncertainties and nonlinear measurement[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(8): 3411-3435.

[59] SHAO S, GAO Z. On the conditions of exponential stability in active disturbance rejection control based on singular perturbation analysis[J]. International Journal of Control, 2017, 90(10): 2085-2097.

[60] ZHANG X Y, ZHANG X C, XUE W C, et al. An overview on recent progress of extended state observers for uncertain systems: Methods, theory, and applications[J]. Advanced Control for Applications, 2021, 3(2): e89.

[61] QUAN Q, CAI K Y. Additive decomposition and its applications to internal-model-based tracking[C]//Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control held jointly with 28th Chinese Control Conference. Piscataway: IEEE Press, 2009: 817-822.

[62] REN J R, QUAN Q, LIU C J, et al. Docking control for probe-drogue refueling: An additive-state-decomposition-based output feedback iterative learning control method[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2020, 33(3): 1016-1025.

[63] REN J R, QUAN Q, ZHAO L B, et al. Two-degree-of-freedom attitude tracking control for bank-to-turn aerial vehicles: An additive-state-decomposition-based method[J]. Aerospace Science and Technology, 2018, 77: 409-418.

[64] HOU Z S, WANG Z. From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective[J]. Information Sciences, 2013, 235: 3-35.

[65] 侯忠生. 无模型自适应控制的现状与展望[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(4): 586-592.

HOU Z S. On model-free adaptive control: The state of the art and perspective[J]. Control Theory & Applications, 2006, 23(4): 586-592 (in Chinese).

[66] 侯忠生, 许建新. 数据驱动控制理论及方法的回顾和展望[J]. 自动化学报, 2009, 35(6): 650-667.

HOU Z S, XU J X. On data-driven control theory: The state of the art and perspective[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(6): 650-667 (in Chinese).

[67] SUTTON R S, BARTO A G. Reinforcement learning: An introduction[M]. Cambridge: MIT Press, 2018.

[68] LIU D R, XU Y C, WEI Q L, et al. Residential energy scheduling for variable weather solar energy based on adaptive dynamic programming[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2018, 5(1): 36-46.

[69] NA J, HERRMANN G. Online adaptive approximate optimal tracking control with simplified dual approximation structure for continuous-time unknown nonlinear systems[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2014, 1(4): 412-422.

- [70] MURRAY J J, COX C J, LENDARIS G G, et al. Adaptive dynamic programming[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, 2002, 32(2): 140-153.
- [71] WANG Q, GONG L G, DONG C Y, et al. Morphing aircraft control based on switched nonlinear systems and adaptive dynamic programming[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 93: 105325.
- [72] LIN X B, YU Y, SUN C Y. Supplementary reinforcement learning controller designed for quadrotor UAVs[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 26422-26431.
- [73] LIN X B, LIU J, YU Y, et al. Event-triggered reinforcement learning control for the quadrotor UAV with actuator saturation[J]. *Neurocomputing*, 2020, 415: 135-145.
- [74] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [75] SUN M X, HUANG B J. Iterative learning control[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1999(in Chinese).
- [76] XU J X, TAN Y. Linear and nonlinear iterative learning control[M]. Berlin: Springer, 2003.
- [77] 许建新, 侯忠生. 学习控制的现状与展望[J]. *自动化学报*, 2005, 31(6): 943-955.
- [78] XU J X, HOU Z S. On learning control: the state of the art and perspective[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(6): 943-955(in Chinese).
- [79] ASTROM K J, HAGGLUND T. PID controllers: Theory, design, and tuning[M]. Durham: Instrument Society of America, 1995.
- [80] ZHANG J K, GUO L. Theory and design of PID controller for nonlinear uncertain systems[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2019, 3(3): 643-648.
- [81] ZHAO C, GUO L. PID controller design for second order nonlinear uncertain systems[J]. *Science China Information Sciences*, 2017, 60(2): 022201.
- [82] HOU Z S, XIONG S S. On model-free adaptive control and its stability analysis[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(11): 4555-4569.
- [83] 侯忠生. 非参数模型及其自适应控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [84] HOU Z S. Nonparametric model and its adaptive control theory[M]. Beijing: Science Press, 1999(in Chinese).
- [85] HUI Y, CHI R H, HUANG B, et al. Observer-based sampled-data model-free adaptive control for continuous-time nonlinear non-affine systems with input rate constraints[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(12): 7813-7822.
- [86] LIN N, CHI R H, HUANG B, et al. Event-triggered nonlinear iterative learning control[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, 32(11): 5118-5128.
- [87] CHI R H, LI H Y, SHEN D, et al. Enhanced P-type control: Indirect adaptive learning from set-point updates[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, 68(3): 1600-1613.
- [88] LI X D, LI P. Stability of time-delay systems with impulsive control involving stabilizing delays[J]. *Automatica*, 2021, 124: 109336.
- [89] DEGRAVE J, FELICI F, BUCHLI J, et al. Magnetic control of Tokamak plasmas through deep reinforcement learning[J]. *Nature*, 2022, 602: 414-419.
- [90] CHEN L, QUAN Q. Reinforcement learning for non-affine nonlinear non-minimum phase system tracking under additive-state-decomposition-based control framework[C]//*Proceedings of the IEEE 12th Data Driven Control and Learning Systems Conference*. Piscataway: IEEE Press, 2023.

Control of non-affine nonlinear systems: A survey

QUAN Quan¹, CHEN Lian^{2,*}

(1. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;

2. Logistics Engineering Research Center, Research Institute of Highway Ministry of Transport, Beijing 100088, China)

Abstract: As a more general description of affine nonlinear systems, the practical applications corresponding to non-affine nonlinear systems are more comprehensive and closer to reality. Therefore, it is essential to study the control problems of non-affine nonlinear systems. However, the closed-loop system's control signal appears as a nonlinear function due to the non-affine properties of nonlinear systems, which can lead to issues including singularity, zero-crossing, and uncertain control direction. From this point, solving control problems of non-affine nonlinear systems is a considerable challenge. This paper first introduces the relevant background knowledge of affine, strict feedback, and high-order systems, and then summarizes three solutions through literature research: function transformation method, reference model method, and data-driven method. Finally, based on existing research findings, the challenges and development trends faced in the field of non-affine nonlinear system research are proposed.

Keywords: non-affine systems; nonlinear systems; strict feedback; data-driven; additive decomposition

Received: 2022-07-27; **Accepted:** 2022-08-26; **Published Online:** 2022-09-09 16:09

URL: link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20220909.1023.001

* **Corresponding author.** E-mail: chen.lian@rioh.cn