

边值问题的一种解法

陈振诚

(中国科学院北京天文台)

在研究流体动力学的某些边值问题以及其他一些数学物理问题中, 如果用现有的积分变换法去解决遇到的一些积分方程, 则获得的某些结果将与实际情况不甚相符。这样, 就为描述相应的物理现象造成困难。例如

1. 考虑一个自由出流定常运动的流体动力学平面问题, 见图 1。设水深为 h_2 , 出口高度为 $a = h_2 - h_1$, 来流速度为 U 。假定水是理想不可压缩流体, 它的速度势函数是 $\Phi(x, y) =$

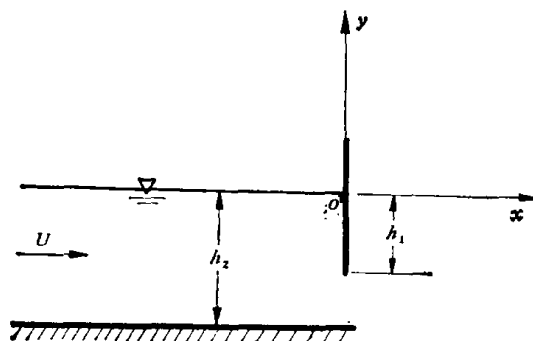


图 1

$Ux + \varphi(x, y)$, 式中 $\varphi(x, y)$ 是扰动速度势。于是, 问题的求解就归结为求出 $\varphi(x, y)$ 。它必须满足下列的方程和边界条件:

在 $-\infty \leq x \leq 0, -h_2 \leq y \leq 0$ 和 $0 < x \leq \infty, -h_2 \leq y \leq -y_1(x)$ 域中, $\nabla^2 \Phi = 0, \nabla^2 \varphi = 0$;

$$\text{在 } x = 0, -h_1 \leq y \leq 0 \text{ 处, } \Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \text{ 即 } \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -U; \quad (1)$$

$$\text{在 } -\infty \leq x \leq 0, y = 0 \text{ 处, } \varphi(x, 0) = 0; \quad (2)$$

$$\text{在 } -\infty \leq x \leq \infty, y = -h_2 \text{ 处, } \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \quad (3)$$

$$\text{在 } x \rightarrow -\infty, -h_2 \leq y \leq 0 \text{ 处, } \varphi_x \rightarrow 0, \varphi_y \rightarrow 0; \quad (4)$$

$$\text{在 } x = 0, -h_2 \leq y < -h_1 \text{ 处, 流体顺畅地流出出口, 在此处 } \varphi_x, \varphi_y \text{ 为有限值, 即 } |\varphi_x| < \infty, |\varphi_y| < \infty; \quad (5)$$

$$0 < x \leq \infty, y = -y_1(x) \text{ 的流线是流体出流后的自由表面, 它处于大气压力之下; } \quad (6)$$

$$\text{在 } x \rightarrow \infty, -h_2 \leq y \leq -y_1(x) \text{ 处, } |\varphi_x| < \infty, |\varphi_y| < \infty. \quad (7)$$

1) 若把满足方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 的 $\varphi(x, y)$ 以 Fourier 积分的形式给出

本文 1979 年 1 月 9 日收到。

$$\varphi(x, y) = \int_0^\infty E(\alpha) e^{\alpha x} \sin \alpha y d\alpha + \int_0^\infty H(\eta) \cos \eta x \operatorname{sh} \eta y d\eta, \quad (8)$$

式(8)自然满足条件(2)。把式(8)分别代入边界条件(1)、(3),并用 Fourier 变换解相应的积分方程,从而分别求得

$$E(\alpha) = \frac{2U(\cos \alpha h_1 - 1)}{\pi \alpha^2}, \quad H(\eta) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty E(\alpha) \frac{\alpha^2 \cos \alpha h_2 d\alpha}{\eta(\alpha^2 + \eta^2) \operatorname{ch} \eta h_2}, \quad (9)$$

把式(9)代入式(8),并求得 φ_x 。令 $x=0$, 考虑 $-h_1 \leq y \leq 0$, 沿图 2 所示的环路对 φ_x 求积分,证实条件(1)满足。考虑 $x=0$, $-h_2 \leq y < -h_1$, 取图 2 指出的环路对 φ_x 做积分运算,得 $v_x = \varphi_x \equiv 0$ 。但是,实际的情况应该是 $v_x \neq 0$, 而是 U , h_1 , y 的函数。

2) 如果把 $\varphi(x, y)$ 写成 Laplace 积分和 Fourier 积分的形式

$$\varphi(x, y) = \int_{\varepsilon_0 - i\infty}^{\varepsilon_0 + i\infty} D(\nu, x) e^{\nu y} d\nu + \int_0^\infty [M(\eta) \operatorname{ch} \eta(y + h_2) + N(\eta) \operatorname{sh} \eta y] \cos \eta x d\eta, \quad (10)$$

式中 $D(\nu, x) = \kappa(\nu) \sin \nu x$ 。把式(10)分别代入(1)、(2)、(3),并分别用 Laplace 变换和 Fourier 变换解相应的积分方程,求出

$$\begin{aligned} \kappa(\nu) &= \frac{U}{2\pi i} \frac{1 - e^{\nu h_1}}{\nu^2}, \quad M(\eta) = \int_{\varepsilon_0 - i\infty}^{\varepsilon_0 + i\infty} T(\nu, \eta) d\nu, \\ N(\eta) &= \int_{\varepsilon_0 - i\infty}^{\varepsilon_0 + i\infty} T(\nu, \eta) \frac{\nu}{\eta} e^{-\nu h_2} d\nu, \quad T(\nu, \eta) = \frac{\nu \kappa(\nu)}{(\eta^2 - \nu^2) \operatorname{ch} \eta h_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

把式(11)代入式(10),求出 φ_x 。令 $x=0$, 考虑 $-h_1 \leq y \leq 0$, 对于包含有 $e^{\nu(h_1+y)}$ 因子的项按图 3 而包含 $e^{\nu y}$ 的项则取图 4 指出的环路对 φ_x 做积分之后证实条件(1)是满足的。若考虑 $-h_2 \leq y < -h_1$, 将相应的 φ_x 沿图 4 标出的环路做积分运算,得 $v_x = \varphi_x \equiv 0$ 。仍与实际物理图象不符。

2. 把一个无限薄的气体盘作为基态,有一长度为 $2b$ 的棒以角速度 $\Omega \xi$ 绕其中心与气体盘作相对转动,引出扰动态。式中 $\xi = u(t) = \exp(i\omega t)$, ω 为圆频率, t 为时间。为了描述气体的运动,考虑平面问题,引用固定直角坐标系 x, y 。把棒置于 y 方向。坐标原点为棒的中点。假定气体为理想流体,其投影面密度 $\rho(x, y, t) = \rho_0(x, y) + \rho_1(x, y, t)$, 引力势 $V(x, y, t) = V_0(x, y) + V_1(x, y, t)$, 式中 $\rho_0(x, y)$, $V_0(x, y)$ 分别为基态的密度与引力势而 $\rho_1(x, y, t)$, $V_1(x, y, t)$ 则为扰动态的。假定气体的被扰动在小尺度上是无旋的运动。设气体的速度势函数为 $\Psi(x, y, t) = \phi(x, y, t) + \Omega xy \xi$, 其中 $\phi(x, y, t)$ 为扰动速度势。设 U 为气体速度矢,则其 x, y 方向的分量分别为 $v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x$, $v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y$ 。设压力为 $P(x, y, t)$, G 为引力常数。于是这个问题的求解就归结为解决下列的偏微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} U^2 \right) = -\nabla V - \frac{1}{\rho} \nabla P, \\ \nabla^2 V &= 4\pi G \rho, \quad \operatorname{rot} U = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

以及满足下列边界条件:

$$\text{在 } x=0, -b \leq y \leq b \text{ 处, } \Psi_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \text{ 即 } v_x = -\Omega y \xi, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{在 } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \text{ 处, } v_x \rightarrow 0, v_y \rightarrow 0, \rho(x, y, t) \rightarrow 0, V(x, y, t) \rightarrow 0, \\ P(x, y, t) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (14)$$

在 $r < \infty$ 处, $v_x \equiv 0, v_y \equiv 0, \rho(x, y, t) \equiv 0, V(x, y, t) \equiv 0, P(x, y, t) \equiv 0$, (15)

1) 如果用 Fourier 变换解决问题, 满足条件 (13), 有

$$v_x = -\xi \int_0^\infty A(\alpha) \alpha \sin \alpha y e^{-\alpha |x|} d\alpha \operatorname{sign} x, \quad A(\alpha) = \frac{2\Omega}{\pi \alpha} \left(\frac{b \cos \alpha b}{\alpha} - \frac{\sin \alpha b}{\alpha^2} \right) \operatorname{sign} x. \quad (16)$$

2) 若用 Laplace 变换, 满足边界条件 (13), 则有

$$v_x = \xi \int_{\varepsilon_0 - i\infty}^{\varepsilon_0 + i\infty} B(\nu) \nu (\cos \nu x - \sin \nu x) e^{\nu y} d\nu, \\ B(\nu) = \frac{\Omega}{i2\pi \nu^3} [\nu b (e^{\nu b} + e^{-\nu b}) - (e^{\nu b} - e^{-\nu b})], \quad (17)$$

分别令式 (16)、(17) v_x 中的 $x = 0$, 考虑 $b < y < -b$ 线上, 对 v_x 分别按相应的环路, 见图 2、3、4, 做相应的积分运算, 都得到 $v_x \equiv 0$.

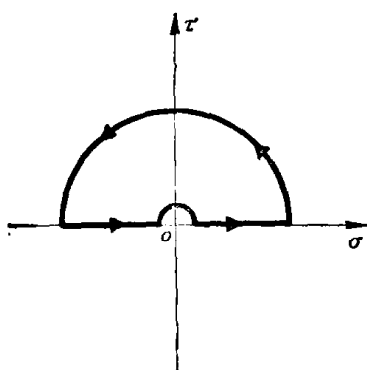


图 2

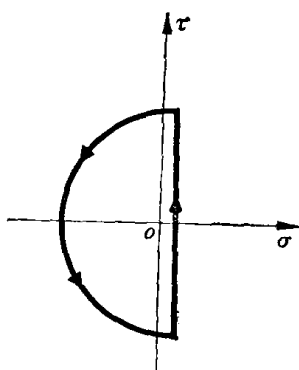


图 3

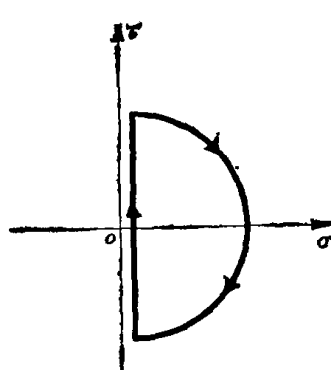


图 4

这就清楚地表明, 对于上列问题, 用 Fourier 变换或用 Laplace 变换都未能求得合乎实际物理图象的结果。

为了解决这类问题, 我们提出一种积分变换方法。本文概要叙述这种积分变换并用实际例子简要阐明这种积分变换在解决数学物理方程中的具体应用。

符号 区间 $a < x < b$, 写成 (a, b) ; $a \leq x \leq b$, 写成 $[a, b]$; 凡条件

$$\left| \int_0^\infty |f(x)|^q e^{-\xi x} dx \right| < \infty, \quad x\sigma > 0; \quad \left| \int_{-\infty}^0 |f(x)|^q e^{-\xi x} dx \right| < \infty, \quad x\sigma < 0 \quad (18)$$

成立的所有函数分别写成 $L_q(0, \infty)$; $L_q(-\infty, 0)$. 式中 $\xi = \sigma + i\tau$ 为复变量, $q \geq 1$ 为正整数。在没有特别指出所考虑的区间的必要时以及没有误解的可能时就简单地把 $L_q(0, \infty)$, $L_q(-\infty, 0)$ 写成 L_q .

定义 设 $f(x) \in L_1(0, \infty)$, 或 $f(x) \in L_1(-\infty, 0)$, 也就是条件

$$\left| \int_0^\infty |f(x)| e^{-\xi x} dx \right| < \infty, \quad x\sigma > 0; \quad \text{或} \quad \left| \int_{-\infty}^0 |f(x)| e^{-\xi x} dx \right| < \infty, \quad x\sigma < 0 \quad (19)$$

成立, 并且 $S(\xi, k_0, x) = K_0 e^{-\xi x} / \sqrt{k_0^2 + \xi^2}$, ($K_0 = \sqrt{k_0^2 + \gamma^2} \operatorname{ch} \gamma$, $\xi = \zeta - c_0$), 则我们把

$$\mathfrak{E}_{k_0}\{f(x)\} = F(k_0, \xi) = \int_0^\infty f(x) S(\xi, k_0, x) dx, \quad \sigma x > 0;$$

$$\text{或} \quad \mathfrak{E}_{k_0}\{f(x)\} = F(k_0, \xi) = \int_{-\infty}^0 f(x) S(\xi, k_0, x) dx, \quad \sigma x < 0, \quad (20)$$

称为函数 $f(x)$ 的以 $S(\xi, k_0, x)$ 为核的一种积分变换式。 c_0 为任意一个正数, $c_0 > \sigma_0$, γ 是 $F(k_0, \xi)$ 在复平面 ξ 上的极点, k_0 为任意实常量。称 $F(k_0, \xi)$ 为象函数。式 (20) 中的符号

$\mathfrak{E}_{k_0}$ 称为积分变换算子。

实际上,除某些例外情况,常能找到一个实数 σ_0 ,使积分式在 $\sigma > \sigma_0$ 时收敛(存在),而在 $\sigma < \sigma_0$ 时不存在(发散)。使积分(20)存在的集合 $\sigma > \sigma_0$ 称为 $\mathfrak{E}_{k_0}\{f(x)\}$ 的收敛域或存在域。设 h 为任意实常量,并且

$$R_c(\zeta, x) = \frac{1}{\pi i} \frac{\operatorname{ch} \zeta x}{\operatorname{ch} \zeta h}; \quad R_s(\zeta, x) = \frac{1}{\pi i} \frac{\operatorname{sh} \zeta x}{\operatorname{ch} \zeta h}, \quad -|h| \leq x \leq |h|. \quad (21)$$

定理 1 设 $f(x) \in L_1(0, \infty)$, 或 $f(x) \in L_1(-\infty, 0)$; 并且 $F(k_0, \zeta)$ 是 $f(x)$ 的以 $S(\zeta, k_0, x)$ 为核的一种积分变换; 而且函数 $\mathfrak{F}(\zeta) = F(k_0, \zeta)R(\zeta, x)$ 具有下列性质: 1) 在割去线段 $(c_0 - ik_0, c_0 + ik_0)$ 的平面上, $\mathfrak{F}(\zeta)$ 可以分出两个正则分支, 2) 在割缝的对岸 $\mathfrak{F}(\zeta)$ 的值不同, 3) $\mathfrak{F}(\zeta)$ 的每个分支在无限远点都有高于或等于二阶的零点, 即

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} |\mathfrak{F}(\zeta)| \leq \frac{\exp[-l(|h| - |x|)]}{l^2} \rightarrow 0,$$

则对于任意一个正数 c_0 , 象原函数 $f(x)$ 可用下列的积分公式以 $F(k_0, \zeta)$ 表出。

$$\text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时, 有 } \mathfrak{E}_{k_0}^{-1}\{F(k_0, \zeta)\} = f(x) = \int_{c_0 - ik_0}^{c_0 + ik_0} F(k_0, \zeta) R_c(\zeta, x) d\zeta, \quad (22)$$

$$\text{若 } f(x) \text{ 是奇函数, 则有 } \mathfrak{E}_{k_0}^{-1}\{F(k_0, \zeta)\} = f(x) = \int_{c_0 - ik_0}^{c_0 + ik_0} F(k_0, \zeta) R_s(\zeta, x) d\zeta. \quad (23)$$

没有特殊说明的必要时,例如在一般论述中,把 $R_c(\zeta, x)$, $R_s(\zeta, x)$ 简单地用记号 $R(\zeta, x)$ 表示。符号 $\mathfrak{E}_{k_0}^{-1}$ 称为逆积分变换算子。式(22)、(23)把函数 $f(x)$ 用它的积分变换式 $F(k_0, \zeta)$ 表出,叫做这种积分变换的反演公式。当 $F(k_0, \zeta) \in L_1$ 的时候,则称式(22)、(23)所示的 $f(x)$ 是函数 $F(k_0, \zeta)$ 的以 $R(\zeta, x)$ 为核的逆积分变换式,前者为 $F(k_0, \zeta)$ 的双曲余弦逆变换,而后者则为双曲正弦逆变换。

$\mathfrak{E}_{k_0}$ 是一个线性算子, $\mathfrak{E}_{k_0}^{-1}$ 也是一个线性算子。

现在,用本文提出的这种积分变换来解决下列问题:

1. 设 x', y' 为直角坐标系,见图 1。引入参考长度 h_1 。设 $y = y'/h_1$, $x = x'/h_1$, $h_2 = h'_2/h_1$, h'_2 为水深。把满足连续方程式 $\nabla^2 \Phi = 0$ 的流体速度势函数写成 $\Phi(x, y) = U h_1 x + \varphi(x, y)$ 。其中

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \frac{1}{\pi i} \int_{c_0 - ik_0}^{c_0 + ik_0} F_1(k_0, \zeta) \frac{\operatorname{ch} \zeta y}{\operatorname{ch} \zeta} \sin \zeta x d\zeta + \int_0^\infty [P(\eta) \operatorname{sh} \eta y \\ & + Q(\eta) \operatorname{ch} \eta(y + h_2)] \cos \eta x d\eta, \end{aligned} \quad (24)$$

式中的第一项是本文提出的积分,而第二项则是 Fourier 积分。在 $x = 0$, $-1 \leq y \leq 0$ 处满足条件(1)并引用本文提出的积分变换,得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{-i}{\pi h_1} \int_{c_0 - ik_0}^{c_0 + ik_0} F_1(k_0, \zeta) \frac{\operatorname{ch} \zeta y}{\operatorname{ch} \zeta} \zeta d\zeta = -U, \quad F_1(k_0, \zeta) = \frac{-U h_1 k_0}{\zeta^2 \sqrt{k_0^2 + \zeta^2}}, \quad (25)$$

在 $-\infty \leq x \leq 0$, $y = 0$; $-\infty \leq x \leq \infty$, $y = -h_2$ 处分别满足条件(2); 条件(3), 有

$$\begin{aligned} \int_{c_0 - ik_0}^{c_0 + ik_0} W(\zeta, x) d\zeta + \int_0^\infty Q(\eta) I(\eta, x) d\eta = 0, \quad - \int_{c_0 - ik_0}^{c_0 + ik_0} W(\zeta, x) \zeta \operatorname{sh} \zeta h_2 d\zeta \\ + \int_0^\infty P(\eta) \eta I(\eta, x) d\eta = 0, \quad I(\eta, x) = \operatorname{ch} \eta h_2 \cos \eta x, \end{aligned} \quad (26)$$

式中 $W(\zeta, x) = F_1(k_0, \zeta) \sin \zeta x / i\pi \operatorname{ch} \zeta$ 。以式(25)为基础解出积分方程(26), 得

$$Q(\eta) = \int_{c_0-ik_0}^{c_0+ik_0} J(\eta, \zeta) d\zeta, \quad P(\eta) = - \int_{c_0-ik_0}^{c_0+ik_0} J(\eta, \zeta) \frac{\zeta}{\eta} \operatorname{sh} \zeta h_2 d\zeta,$$

$$J(\eta, \zeta) = \frac{2\zeta F_1(k_0, \zeta)}{i\pi^2(\eta^2 - \zeta^2) \operatorname{ch} \zeta \operatorname{ch} \eta h_2}, \quad (27)$$

把式(25)、(27)代入式(24), 求出在 $x=0$ 处的

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = - \frac{U k_0}{i\pi} \int_{c_0-ik_0}^{c_0+ik_0} \frac{\operatorname{ch} \zeta y d\zeta}{\zeta \sqrt{k_0^2 + \zeta^2} \operatorname{ch} \zeta}, \quad (28)$$

若 $-1 \leq y \leq 0$, 则取图5所示的环路对式(28)求积分, 得 $v_x = -U$, 可见条件(1)满足。如果 $-h_2 \leq y < -1$, 从式(28)可知, $v_x \approx 0$, 而是 U, y, h_1 的函数, 与实际情况相符。由式(24)求出 φ_x, φ_y 并按图2指出的环路对 η 求积分, 得到, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $v_x \rightarrow 0, v_y \rightarrow 0$, 即条件(4)满足。进一步可以证实 $\Phi(x, y)$ 满足连续方程和全部边界条件, 它是这个问题的唯一解。

2. 设 x', y' 为直角坐标系。引入参考长度 b , 令 $x = x'/b, y = y'/b, \bar{x} = |x| - 1, \Psi(x, y, t) = \Omega b^2 xy \xi + \phi(x, y, t)$ 。把 $\phi(x, y, t)$ 写成本文所给积分的形式

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) = & \frac{\xi}{i\pi} \int_{c_0-ik_0}^{c_0+ik_0} F_2(k_0, \zeta) [(\sin \zeta \bar{x} \\ & + \cos \zeta x) \operatorname{sh} \zeta y + \operatorname{ch} \zeta y \cos \zeta x] \frac{d\zeta}{\operatorname{ch} \zeta}, \end{aligned} \quad (29)$$

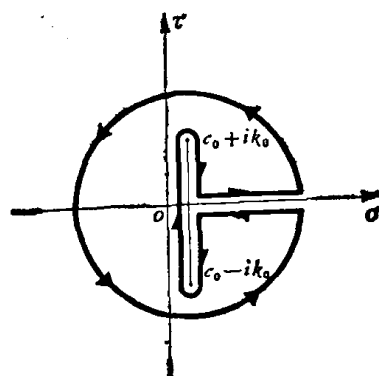


图5

在 $x=0, -1 \leq y \leq 1$ 上满足边界条件(13), 并引用积分变换公式(23), 得

$$\frac{i}{\pi b} \int_{c_0-ik_0}^{c_0+ik_0} F_2(k_0, \zeta) \frac{\operatorname{sh} \zeta y}{\operatorname{ch} \zeta} \zeta \cos \zeta d\zeta \operatorname{sign} x = \Omega y b, \quad F_2(k_0, \zeta) = \frac{-b^2 \Omega k_0 \operatorname{sign} x}{\zeta^3 \sqrt{k_0^2 + \zeta^2} \cos \zeta}. \quad (30)$$

考虑小扰动, 在解方程组(12)时, 略去各该方程中出现的较高阶的小量项。设 $\Theta_\alpha, \mathfrak{T}_\beta$ 为无量纲常量; $\bar{\rho}$ 为实常量; n, m 为正整数。求得的解是:

$$\rho_0(x, y) = \bar{\rho}(X + Y), \quad \rho_1(x, y, t) = \frac{i}{\omega} [\Psi_x(\rho_0)_x + \Psi_y(\rho_0)_y],$$

$$\Psi_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (\rho_0)_x = \frac{\partial \rho_0}{\partial x}, \quad (\rho_0)_y = \frac{\partial \rho_0}{\partial y}, \quad \lambda = 2\pi, \quad (31)$$

$$V_0(x, y) = -\bar{\rho} G b^2 \left(X \frac{|x|}{\kappa} + Y \frac{|y|}{\beta} \right), \quad V_1(x, y, t) = i \frac{\lambda G}{\omega} \rho_0(x, y) \Psi(x, y, t),$$

$$\int \frac{dP}{\rho} = -i\omega \Psi(x, y, t) - V, \quad (32)$$

式中 $X = \sum_{\alpha=1}^n \Theta_\alpha \exp[-\lambda \kappa(|x| + iy)]$, $Y = \sum_{\beta=1}^m \mathfrak{T}_\beta \exp[-\lambda \beta(ix + |y|)]$ 。从式(29)导出 $x=0$ 处的

$$\phi_x = v_x = \frac{-\Omega b k_0}{i\pi} \xi \int_{c_0-ik_0}^{c_0+ik_0} \frac{\operatorname{sh} \zeta y d\zeta}{\zeta^2 \sqrt{k_0^2 + \zeta^2} \operatorname{ch} \zeta}, \quad (33)$$

考虑 $-1 \leq y \leq 1$ 处, 在图 5 指出的环路上对 (33) 式做积分运算, 得 $v_x = -Qy'\xi$, 与式 (13) 指出的条件一致。从式 (33) 可知, 在 $x = 0, 1 < y < -1$, 但 $|y| < \infty$ 处, $v_x \approx 0$, 是 Q, y, b 的函数。与实际的物理图象相符。对于在被积函数中含有因子 $\cos \zeta \bar{x}$ 或 $\sin \zeta \bar{x}$ 的积分, 当 $-2 \leq x \leq 2, 1 < y < -1$ 时把 $\text{sh} \zeta y = (e^{\zeta y} - e^{-\zeta y})/2, \text{ch} \zeta y = (e^{\zeta y} + e^{-\zeta y})/2$ 分别分开两项; 当 $2 < x < -2, -1 \leq y \leq 1$ 时把 $\sin \zeta \bar{x} = (e^{i\zeta \bar{x}} - e^{-i\zeta \bar{x}})/2i, \cos \zeta \bar{x} = (e^{i\zeta \bar{x}} + e^{-i\zeta \bar{x}})/2$

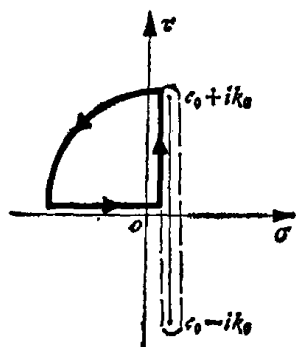


图 6

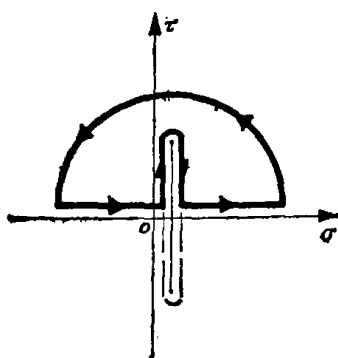


图 7

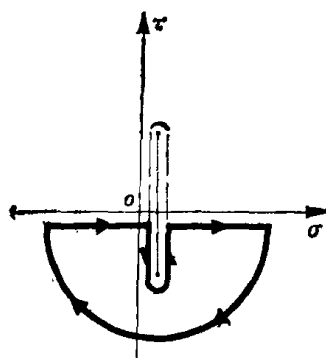


图 8

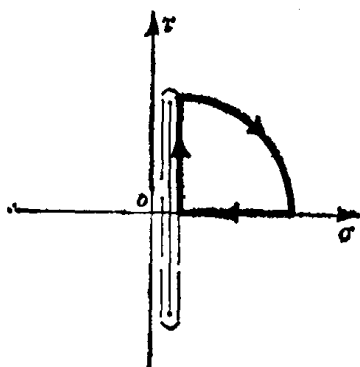


图 9

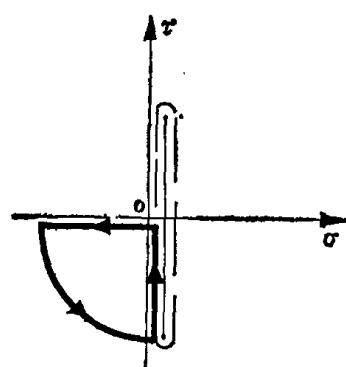


图 10

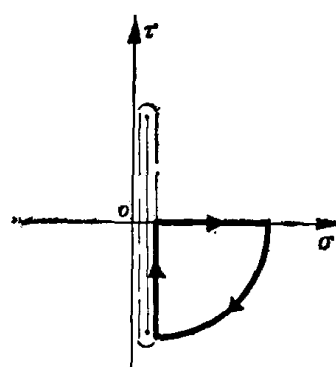


图 11

分别分成两项, 取适当的积分环路 (见图 4、6、7、8、9、10、11) 并把全部相应的积分结果归纳起来, 将会得到: 在 $r \rightarrow \infty$ 处, $v_x \rightarrow 0, v_y \rightarrow 0, \rho(x, y, t) \rightarrow 0, V(x, y, t) \rightarrow 0, P(x, y, t) \rightarrow 0$ 。因此式 (29)、(31)、(32) 给出的解满足所有的方程和边界条件, 它是这个问题的自洽的唯一解。将这个解所提供的有关结果分别代入能量方程与状态方程, 并求解之, 就可得到相应的物理量。这个解提供的各该物理量基本符合实际情况。

由此可见, 本文提出的这种积分变换方法能较好地解决某些问题。