中国科学 E 辑: 技术科学 2008 年 第 38 卷 第 9 期: 1453 ~ 1463
www.scichina.com tech.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

非饱和土中功的表述以及有效应力与相分离原理的讨论

赵成刚*, 张雪东

北京交通大学土建学院岩土工程系, 北京 100044
* E-mail: cgzhao@center.njtu.edu.cn

收稿日期: 2007-05-29; 接受日期: 2007-08-20
国家自然科学基金项目(批准号: 50778013)和北京自然科学基金项目(批准号: 8082020) 资助

摘要 基于多相孔隙介质理论的质量、线动量、能量平衡方程和非饱和土力学的假定, 推导出总变形功W的一种表达式. 在总变形功的具体方程基础上给出了建议与土骨架位移在功上对偶的有效应力表达式. 它和Wheeler(2003 年)以及其他一些研究者根据直觉和经验给出的有效应力具有相同的形式, 但本文给出的有效应力是从多相孔隙介质理论的基本原理出发, 经推演而得到的, 具有坚实的理论基础和科学依据. 文中根据总变形功的具体表达式, 指出非饱和土的物理力学性质复杂, 其影响因素较多, 其固体骨架的变形不可能像饱和土那样由有效应力唯一确定. 另外, 利用总变形功的表达式以及各相自由能A^{α}的关系式, 论证并得出了Passman(1984年)给出的相分离原理不严格适用于非饱和土的结论.

关键词
总变形功
有效应力
非饱和土
相分离原理的适用性
多相孔隙介质理论

非饱和土力学经过几十年的研究, 虽然取得了丰硕的成果, 但这些成果绝大多数都是基于直觉的、经验的、宏观现象学的认识, 缺少严格和科学的理论基础. 20 世纪 60 年代发展起来的多相孔隙介质理论(混合物理论), 可以统一地描述多相孔隙介质中相与相之间复杂的相互作用以及在外力和各种环境作用下的反应, 并为建立多相孔隙介质(也包括非饱和土)的本构关系提供了合理、科学的理论基础和指导. 因为它可以把土的渗流、变形、强度和稳定性统一在一个理论框架下进行描述, 它有希望成为非饱和土乃至整个土力学学科统一、严格和科学的理论基础.

饱和土中有效应力原理的提出促使土力学发生了根本性的变化. 但有效应力原理在非饱和土中是否存在? 如果存在, 其具体形式是怎样的? 到目前为止, 这些问题也没能得到很好的

解决. Aichison等人[1], Bishop等人[2,3]和Blight[4]提出了非饱和土中的单应力有效应力. 由于三相非饱和土的性质非常复杂, 像饱和土那样采用单应力的有效应力描述非饱和土的性质遇到了极大的困难. 鉴于在非饱和土中单应力的有效应力存在的问题, Fredlund等人[5]论证了采用2个独立的应力变量(双应力变量)作为有效应力的合理性. 此后, 以双应力变量(包括基质吸力)作为有效应力的研究得到了迅速的发展. 但双应力变量理论仍然不能很好地描述非饱和土的复杂现象, 例如Wheeler等人[6]指出, 非饱和土的性质不但受到各相应力的影响而且还受到其他因素的影响, 例如饱和度的影响等, 这是因为即使净应力(net stress)、基质吸力和孔隙比相同, 但两个具有不同饱和度土样的力学行为和土颗粒之间的相互作用力(即所谓的有效应力)却可以不同. 这说明仅利用两个独立的应力变量还不能唯一确定非饱和土的变形和强度. Dean等人[7]基于功的对偶应力, 讨论了非饱和土有效应力的形式; 李锡夔[8]基于双应力变量理论建议了一个非饱和土的广义有效应力的定义; 谢定义[9]也对这一问题进行了深入的思考与讨论. 由这些研究可见, 关于非饱和土中有效应力的研究和讨论还在继续发展中, 没能得到较好的解决.

孔隙介质理论[10]中的能量原理(或热力学第一定律)是一种普适的定律, 它必然也适用于非饱和土. 而能量方程中的变形功(work of deformation), 有时也称为机械功(mechanical work)涉及非饱和土内各相的应力(或它们的某些组合)以及与其对偶的广义应变的关系, 它的讨论有助于对非饱和土力学性质的认识以及本构关系的建立, 因此受到有关研究者的关注[7,11,12].

本文基于多相孔隙介质理论, 引入体积分数作为独立状态变量(用于考虑非饱和土的微观内部结构变化). 在这种情况下, 各相的应力就可以作为独立的状态变量而不是内变量. 以土骨架(固相)速度作为参照系, 推导出能量平衡方程和总变形功的一种特殊表达式. 以这一表达式为基础推导并建议了一种适用于非饱和土的有效应力公式. 另外, 利用总变形功的具体方程和各相自由能的关系式, 论证了Passman[13]给出的相分离原理并不适用于非饱和土.

1 非饱和土中各相的平衡方程以及相应的整体方程

de Boer[14]论述了体积分数(volume fraction)对多相孔隙介质理论的重要性, 并将引入该条件的混合物理论称之为孔隙介质理论. 实际上, 体积分数是为了描述多相孔隙介质的局部结构特征的变化而引入的量, 它的引入可以使非饱和土中各相应力或相应的变形成为独立状态变量, 而不再是微观尺度的量. 对于三相非饱和土, 体积分数的定义为

$$n^{\alpha} = \frac{V_{\alpha}}{V}, \quad (\alpha = s, w, a), \tag{1}$$

其中 n^{α} 为 α 相物质的体积分数, α 可以是固相(土颗粒) s、液相 w 和气相 a. V_{α} 为代表性单元内 α 相物质所占的体积, V 为代表性单元的总体积. V 可表示为

$$V = V_s + V_w + V_a. \tag{2}$$

把(2)式两端同时除以 V, 得

$$1 = \frac{V_s}{V} + \frac{V_w}{V} + \frac{V_a}{V} = n^s + n^w + n^a = \sum_{\alpha = s,w,a} n^{\alpha}. \tag{3}$$

代表性单元 α 相的体积平均质量密度定义为

$$\rho^{\alpha}=n^{\alpha}\rho_{\alpha}, \quad (\alpha=s,w,a), \tag{4}$$

其中 ρ_{α} 为 α 相物质本身的实际质量密度.

$$\rho=\rho^{s}+\rho^{w}+\rho^{a}. \tag{5}$$

根据孔隙介质理论, 非饱和土中 α 相($\alpha=s,w,a$)的质量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律的局部微分形式为[10]

$$\frac{\mathrm{d}\rho^{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\rho^{\alpha}\mathrm{div}v_{\alpha}=\hat{\rho}^{\alpha}, \tag{6}$$

$$\mathrm{div}\sigma^{\alpha}+\rho^{\alpha}b^{\alpha}+\hat{p}^{\alpha}=\rho^{\alpha}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}v_{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\hat{\rho}^{\alpha}v_{\alpha}, \tag{7}$$

$$\rho^{\alpha}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{tr}(\sigma^{\alpha}:D^{\alpha})-\mathrm{div}q^{\alpha}+\rho^{\alpha}r^{\alpha}+\hat{e}^{\alpha}-\hat{p}^{\alpha}\cdot v_{\alpha}-\hat{\rho}^{\alpha}\left(\varepsilon^{\alpha}+\frac{1}{2}v_{\alpha}^{2}\right), \tag{8}$$

其中 $\hat{\rho}^{\alpha}$ 为其他相物质对 α 相物质的质量供应项; $\hat{p}^{\alpha}$ 为其他相物质对 α 相物质相互作用的体积力; (7)式右端第二项 $\hat{\rho}^{\alpha}v_{\alpha}$ 代表由质量供应项 $\hat{\rho}^{\alpha}$ 而产生的与其他相物质的动量相互交换; (6)和(7)式中 v_{α} 为 α 相物质运动的速度(向量); 但在(8)式中 v_{α} 视为标量; σ^{α} 为 α 相物体中(本身)的Cauchy应力; $D^{\alpha}=\frac{1}{2}(L^{\alpha}+L^{\alpha^{T}})=\mathrm{sym}(\mathrm{grad}v_{\alpha})$, $L=\mathrm{grad}v_{\alpha}$; b^{α} 为 α 相物体本身的单位质量的体积力; ε^{α} 为 α 相物体单位质量的内能; q^{α} 为 α 相物质本身的热流向量; r^{α} 为 α 相物质(由辐射或外热等产生的)单位质量的能量供应项; $\hat{e}^{\alpha}$ 为其他相物质对 α 相引起的能量供应项; (8)式右端最后两项分别代表其他相物质与 α 相物质质量和动量的相互作用(交换)而产生的能量项. 把(6) ~ (8)式对 $\alpha=s,w,a$ 叠加后, 形成混合物整体的平衡方程为[10]

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\mathrm{div}v=0, \tag{9}$$

$$\rho=\sum\rho^{\alpha}, \quad v=\sum\frac{\rho^{\alpha}}{\rho}v_{\alpha}, \quad \sum\hat{\rho}^{\alpha}=0, \tag{10}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\mathrm{div}\sigma+\rho b, \tag{11}$$

$$\sum\hat{p}^{\alpha}=0, \quad b=\sum\frac{\rho^{\alpha}}{\rho}b^{\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum\left[\frac{\rho^{\alpha}}{\rho}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}v_{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\frac{\hat{\rho}^{\alpha}}{\rho}v_{\alpha}\right], \quad \sum\sigma^{\alpha}=\sigma, \tag{12}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}=W+\rho r-\mathrm{div}q, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=\sum\left[\frac{\rho^{\alpha}}{\rho}\frac{d^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}}{dt}+\frac{\hat{\rho}^{\alpha}}{\rho}\varepsilon^{\alpha}\right], \quad \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}=\sum\left[\frac{\rho^{\alpha}}{\rho}V_{\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}v^{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\hat{\rho}^{\alpha}}{\rho}v_{\alpha}^{2}\right], \quad \sum\frac{\rho^{\alpha}}{\rho}r^{\alpha}=r,$$

$$\sum q^{\alpha}=q\,,\;\; W=\sum[\mathrm{tr}(\sigma^{\alpha}:D^{\alpha})+(\rho^{\alpha}b^{\alpha}+\mathrm{div}\sigma^{\alpha})\cdot V_{\alpha}],\;\; \sum\hat{e}^{\alpha}=0\,, \tag{14}$$

(13)式的能量守恒方程利用(11)式也可以表示为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=W+\rho r-\mathrm{div}q\,, \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=\sum\left[\frac{\rho^{\alpha}}{\rho}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\frac{\hat{\rho}^{\alpha}}{\rho}\varepsilon^{\alpha}+\frac{1}{2}\hat{\rho}^{\alpha}v_{\alpha}^{2}\right],\;\; r=\sum\frac{\rho^{\alpha}}{\rho}r^{\alpha},\;\; q=\sum q^{\alpha}\,,$$

$$W=\sum\mathrm{tr}(\sigma^{\alpha}:D^{\alpha}),\;\; \sum\hat{e}^{\alpha}=0\,. \tag{16}$$

由(13)和(15)式可以看到能量守恒方程可以用不同的形式表示, 并且由(14)和(16)式可以知道因为整体平衡方程形式的不同, 整体平衡方程中的各整体物理量的定义也并不唯一.

2 能量守恒方程的特殊形式

Hansen[15]指出, 按照Trusdell[16]给出的三条先验公理而得到的各种限制方程(例如(14)和(16)式定义的诸方程)从数学上不统一, 而且某些量的取法难以从物理上给出解释. 因此, 对混合物整体变量的定义以及相应的限制方程的提法仍有进一步研究的需要. 例如按(10)式定义的整体速度是质量平均加权后的速度. 但在土力学或水文学中, 通常都是以土骨架速度v_s作为参照系而建立渗流方程或其他方程. 用混合物理论建立的方程与土力学、水文学等工程学科建立的方程, 因采用的基本运动量不一致而导致方程的形式也不同. 本节试图以土力学中的一些基本变量作为出发点和参照系, 推导并建立一些相应的物理量和基本方程, 并以此为基础对非饱和土的能量方程和有效应力进行了讨论. 下面先给出非饱和土的 3 个基本假定.

1) 非饱和土中的同一点, 三相温度相同;

2) 忽略质量、动量、内能在不同相之间的转化;

3) 假定三相之间有明显的交界面, 并不能相互浸入和混溶.

定义α相流体物质的相对(固体)速度$\overline{v}_{\alpha}$为

$$\overline{v}_{\alpha}=v_{\alpha}-v_{s}\,,\qquad(\alpha=w,a), \tag{17}$$

其中v_{α}为α相流体物质的相速度(流体本身真实速度). 非饱和土体积分数可用下面土力学中常用的符号计算, 即

$$n^{s}=1-n\,,\;\; n^{w}=nS_{r}\,,\;\; n^{a}=n(1-S_{r})\,, \tag{18}$$

其中n为孔隙率; S_r为饱和度.

2.1 基于体积分数的变形功的方程

体积分数可以描述多相孔隙介质内部的结构变化, 它为分析多相孔隙介质的耗散机制和相应的宏观变形奠定了基础. 本节将以土力学的基本变量和它们与体积分数的关系以及前面给出的平衡方程为基础, 推导出便于非饱和土力学应用的变形功的方程. 当取土骨架的运动量作为参照系时, 假定ρ^{α}不随空间变化但可以随时间变化, 单相的质量守恒方程(6)式可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}\rho^{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\rho^{\alpha}\mathrm{div}v_s=-\mathrm{div}[\rho^{\alpha}(v_{\alpha}-v_s)]=-\mathrm{div}(\rho^{\alpha}\overline{v}_{\alpha}),\quad(\alpha=s,w,a). \tag{19}$$

定义α相的模量为

$$K_{\alpha}=\rho_{\alpha}\frac{\mathrm{d}P_{\alpha}}{\mathrm{d}\rho_{\alpha}},\qquad(\alpha=s,w,a), \tag{20}$$

其中P_{α}为代表性单元中α相的压力. 下面将推导由体积分数和压力P_{α}表示的质量守恒方程. 由(4)式得

$$\frac{\mathrm{d}\rho^{\alpha}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(n^{\alpha}\rho_{\alpha})}{\mathrm{d}t}=n^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\rho_{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\rho_{\alpha}\frac{\mathrm{d}n^{\alpha}}{\mathrm{d}t}=n^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\rho_{\alpha}}{\mathrm{d}P_{\alpha}}\frac{\mathrm{d}P_{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\rho_{\alpha}\frac{\mathrm{d}n^{\alpha}}{\mathrm{d}t}.$$

把(20)式代入上式, 得

$$\frac{\mathrm{d}\rho^{\alpha}}{\mathrm{d}t}=\frac{n^{\alpha}\rho_{\alpha}}{K_{\alpha}}\frac{\mathrm{d}P_{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\rho_{\alpha}\frac{\mathrm{d}n^{\alpha}}{\mathrm{d}t}.$$

把上式代入(19)式后, 得到用体积分数表示的质量守恒方程为

$$\frac{n^{\alpha}}{K_{\alpha}}\frac{\mathrm{d}P_{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}n^{\alpha}}{\mathrm{d}t}+n^{\alpha}\mathrm{div}v_s=-\frac{1}{\rho_{\alpha}}\mathrm{div}(\rho^{\alpha}\overline{v}_{\alpha}),\ (\alpha=s,w,a). \tag{21}$$

把(4)式代入上式右端, 得

$$\frac{n^{\alpha}}{K_{\alpha}}\frac{\mathrm{d}P_{\alpha}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}n^{\alpha}}{\mathrm{d}t}+n^{\alpha}\mathrm{div}v_s=-\frac{1}{\rho_{\alpha}}\mathrm{div}(n^{\alpha}\rho_{\alpha}\overline{v}_{\alpha})=-n^{\alpha}\mathrm{div}\overline{v}_{\alpha}-\frac{\overline{v}_{\alpha}}{\rho_{\alpha}}\cdot\mathrm{grad}(n^{\alpha}\rho_{\alpha})=-n^{\alpha}\mathrm{div}\overline{v}_{\alpha},$$

$$\frac{n^{\beta}}{K_{\beta}}\frac{\mathrm{d}P_{\beta}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}n^{\beta}}{\mathrm{d}t}+n^{\beta}\mathrm{div}v_s=-n^{\beta}\mathrm{div}\overline{v}_{\beta},\quad(\beta=w,a). \tag{22}$$

设B^{α}为孔隙的体积分数, 它分为两部分: B^{w}为孔隙由液体占居的体积分数, B^{a}为孔隙由气体占居的体积分数. $B^{w}+B^{a}=1$, $B^{w}=S_r$, $B^{a}=(1-S_r)$.

$$n^{\beta}=B^{\beta}(1-n^{s}),\qquad(\beta=w,a), \tag{23}$$

令(21)式中$\alpha=s$, 并把$\dfrac{\mathrm{d}n^{s}}{\mathrm{d}t}$解出后, 代入对(23)式求导后的方程中, 得

$$\frac{\mathrm{d}n^{\beta}}{\mathrm{d}t}=(1-n^{s})\frac{\mathrm{d}B^{\beta}}{\mathrm{d}t}-B^{\beta}\frac{\mathrm{d}n^{s}}{\mathrm{d}t}=(1-n^{s})\frac{\mathrm{d}B^{\beta}}{\mathrm{d}t}+B^{\beta}\left[\frac{n^{s}}{K_s}\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}t}+n^{s}\mathrm{div}v_s\right],\quad(\beta=w,a).$$

把上式代入 (22) 式中, 令$\beta=w,a$, 整理得

$$\frac{n^{\beta}}{K_{\beta}}\frac{\mathrm{d}P_{\beta}}{\mathrm{d}t}+B^{\beta}\frac{n^{s}}{K_s}\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}t}+(1-n^{s})\frac{\mathrm{d}n^{\beta}}{\mathrm{d}t}+(B^{\beta}n^{s}+n^{\beta})\mathrm{div}v_s=-n^{\beta}\mathrm{div}\overline{v}_{\beta},\ (\beta=w,a). \tag{24}$$

下面将推导以土骨架的速度v_s为参照系的三相非饱和土的总变形功W的表达式. 总的能量平衡方程采用(15)式, (15)式右端第一项为总的变形功W, 由(16)式第 4 个方程有

$$\begin{aligned}W&=\sum\mathrm{tr}(\sigma^{\alpha}:D^{\alpha})=\sum\mathrm{tr}(\sigma^{\alpha}:\mathrm{sym}(\mathrm{grad}v_{\alpha}))=\sum\mathrm{tr}(\sigma^{\alpha}:\mathrm{grad}v_{\alpha})\\&=\mathrm{tr}(\sigma^{s}:\mathrm{grad}v_s)+\mathrm{tr}(\sigma^{w}:\mathrm{grad}v_w)+\mathrm{tr}(\sigma^{a}:\mathrm{grad}v_a)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{tr}[(\sigma-\sigma^w-\sigma^a):\mathrm{grad}v_s]+\mathrm{tr}(\sigma^w:\mathrm{grad}v_w)+\mathrm{tr}(\sigma^a:\mathrm{grad}v_a)\\
&= \mathrm{tr}(\sigma:\mathrm{grad}v_s)+\mathrm{tr}[\sigma^w:\mathrm{grad}(v_w-v_s)]+\mathrm{tr}[\sigma^a:\mathrm{grad}(v_a-v_s)]\\
&= \mathrm{tr}(\sigma:\mathrm{grad}v_s)+\mathrm{tr}(\sigma^w:\mathrm{grad}\overline{v}_w)+\mathrm{tr}(\sigma^a:\mathrm{grad}\overline{v}_a).
\end{aligned} \tag{25}
$$

对于液相和气相, 应力 σ^α ($\alpha=w,a$)与相应的流体压力的关系为

$$\sigma^\alpha = n^\alpha P_\alpha \underline{\boldsymbol{\delta}},\ (\ \alpha=w,a\ ), \tag{26}$$

其中 $\underline{\boldsymbol{\delta}}$ 为单位张量, 用矩阵可表示为 $\underline{\boldsymbol{\delta}}=[\delta_{ij}]$; P_α 为标量, 表示孔隙流体压力, 按照土力学的习惯此处假定以压为正(如果按通常固体力学以拉为正, 则需在(26)式右端加一负号). 把(26)式代入(25)式右端, 得

$$W=\mathrm{tr}(\sigma:\mathrm{grad}v_s)+n^w P_w \mathrm{tr}(\underline{\boldsymbol{\delta}}:\mathrm{grad}\overline{v}_w)+n^a P_a \mathrm{tr}(\underline{\boldsymbol{\delta}}:\mathrm{grad}\overline{v}_a)\ , \tag{27}$$

$$\mathrm{tr}(\underline{\boldsymbol{\delta}}:\mathrm{grad}\overline{v}_\alpha)=\mathrm{div}\overline{v}_\alpha\ ,\quad (\ \alpha=l,a\ ). \tag{28}$$

把(28)式代入(27)式, 得

$$W=\mathrm{tr}(\sigma:\mathrm{grad}v_s)+n^w P_w \mathrm{div}\overline{v}_w+n^a P_a \mathrm{div}\overline{v}_a\ . \tag{29}$$

把(24)式代入(29)式, 得

$$
\begin{aligned}
W &= \mathrm{tr}(\sigma:\mathrm{grad}v_s)-P_w\left[\frac{n^w}{K_w}\frac{dP_w}{dt}+B^w\frac{n^s}{K_s}\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}t}+(1-n^s)\frac{\mathrm{d}B^w}{\mathrm{d}t}+(B^w n^s+n^w)\mathrm{div}v_s\right]\\
&\quad -P_a\left[\frac{n^a}{K_a}\frac{\mathrm{d}P_a}{\mathrm{d}t}+B^a\frac{n^s}{K_s}\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}t}+(1-n^s)\frac{\mathrm{d}B^a}{\mathrm{d}t}+(B^a n^s+n^a)\mathrm{div}v_s\right]\\
&= \left[\mathrm{tr}(\sigma:\mathrm{grad}v_s)-P_w(B^w n^s+n^w)\mathrm{div}v_s-P_a(B^a n^s+n^a)\mathrm{div}v_s]-[P_w(1-n^s)\frac{\mathrm{d}B^w}{\mathrm{d}t}+P_a(1-n^s)\frac{\mathrm{d}B^a}{\mathrm{d}t}\right]\\
&\quad -\left[P_w\frac{n^w}{K_w}\frac{\mathrm{d}P_w}{\mathrm{d}t}+(P_wB^w+P_aB^a)\frac{n^s}{K_s}\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}t}+P_a\frac{n^a}{K_a}\frac{\mathrm{d}P_a}{\mathrm{d}t}\right]\\
&= \mathrm{tr}\{\{\sigma-[S_rP_w+(1-S_r)P_a]\underline{\boldsymbol{\delta}}\}:\mathrm{grad}v_s\}-\left[P_w n\frac{\mathrm{d}B^w}{\mathrm{d}t}+P_a n\frac{\mathrm{d}B^a}{\mathrm{d}t}\right]\\
&\quad -\left[P_w\frac{n^w}{K_w}\frac{\mathrm{d}P_w}{\mathrm{d}t}+(P_wB^w+P_aB^a)\frac{n^s}{K_s}\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}t}+P_a\frac{n^a}{K_a}\frac{\mathrm{d}P_a}{\mathrm{d}t}\right].
\end{aligned} \tag{30}
$$

令(30)式右端第一个括号中的应力项和第二个括号分别为

$$\sigma'=\sigma-[S_rP_w+(1-S_r)P_a]\underline{\boldsymbol{\delta}}\ , \tag{31}$$

$$-\left[P_w n\frac{\mathrm{d}B^w}{\mathrm{d}t}+P_a n\frac{\mathrm{d}B^a}{\mathrm{d}t}\right]=sn\frac{\mathrm{d}S_r}{\mathrm{d}t}\ . \tag{32}$$

(30)式右端第1个括号的功是由应力 σ' 与土骨架应变速率之积, 它表征了使土骨架产生变形的驱动应力 σ' 的作用(从热力学角度)产生的功, 也有人称之为平均土骨架应力(average soil skeleton stress), 通常认为它是由土骨架承担并沿着土骨架而传递的应力. 第2个括号中

$s=P_a-P_w$ 为非饱和土中的基质吸力，它是广义驱动应力，而液相体积分数 $n^w=nS_r$ 是与之相对应的广义流；第 2 个括号代表了由基质吸力作用而产生的功. (30)式第 3 个括号代表各相(包括固体、气体与液体)压力变化所做的功；当液体和固体假设为不可压缩时, (30)式第 3 个括号变为

$$-\left[\frac{P_a}{K_a}n(1-S_r)\frac{\mathrm{d}P_a}{\mathrm{d}t}\right],$$

上式表示了气体压力变化所做的功.

2.2　非饱和土等温过程的能量平衡方程和功的表达式

本节从整体能量平衡方程(15)式出发，忽略温度变化的影响，得到非饱和土等温过程能量平衡方程. 根据非饱和土第2条假定，$\hat{\rho}_\alpha$，$\hat{P}_\alpha$ 和 $\hat{e}_\alpha$ 均为零. 则(16)式第1个方程变为

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=\sum\frac{\rho^\alpha}{\rho}\frac{D^\alpha\varepsilon^\alpha}{Dt}.$$

忽略辐射和外部热供的能量供应项，即令(16)式第 2 个方程中 r^α 为零. (15)式变为

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=W-\mathrm{div}\boldsymbol{q}. \tag{33}$$

由热力学第二定律有[17]

$$T\dot{\eta}+\mathrm{div}q-\frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{grad}T\geqslant 0, \tag{34}$$

其中 η 为整体混合物的特殊熵，T 为绝对温度($T\geqslant 0$). 令(34)式前两项之和为机械耗散 D, 即

$$D=T\dot{\eta}+\mathrm{div}\boldsymbol{q}\ . \tag{35}$$

(34)式第 3 项 $-\frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{grad}T$ 为热耗散. 热耗散总是非负的(热流总是沿着温度梯度反方向流动), 并且与机械耗散相比(针对土力学或非饱和土力学而言), 它通常是较小的量. 所以也可以认为 $D\geqslant 0$. 因此有

$$D=T\dot{\eta}+\mathrm{div}\boldsymbol{q}\geqslant 0, \tag{36}$$

$$-\frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{grad}T\geqslant 0. \tag{37}$$

(36)和(37)式这两个不等式是比热力学第二定律更加严格的条件, 但已经被广泛接受[17]. 由(36)式解出div$\boldsymbol{q}$, 再代入(33)式得

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=W-D+T\dot{\eta}. \tag{38}$$

假定密度不随时间变化, 则(38)式就可以写成

$$\frac{\mathrm{d}(\rho\varepsilon)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=W-D+T\dot{\eta}, \tag{38'}$$

其中 $\rho\varepsilon=U$，U 表示单位体积的内能. 根据热力学势函数之间的变换关系, 单位体积的

Helmholtz 自由能 A 就可表示为

$$A = U - T\eta . \tag{39}$$

对(39)式求物质导数，得

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} - \left(T\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \eta\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \right).$$

当把非饱和土的变化过程视为等温过程时(即温度不变)，上式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + T\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}.$$

把(38')式代入上式，得

$$W = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + D. \tag{40}$$

(40)式表明，非饱和土等温过程总整体变形功等于整体 Helmholtz 自由能 A 的全导数与整体的耗散势函数之和.

3　非饱和土中有效应力的讨论

有效应力原理的提出促使土力学(主要指饱和土力学)发生了巨大的变化. 但有效应力原理在非饱和土中的应用到目前为止也没有得到很好的解决. 如前所述，无论是单应力变量的有效应力或双应力变量理论都难以描述非饱和土复杂的性质和行为. 总结前人的研究结果，我们认为: 非饱和土的性质不可能像饱和土那样由单应力变量的有效应力唯一确定. 实际上非饱和土的性质不但受各相应力的影响，而且还受到例如饱和度、气相压力变化等其他因素的影响. 从热力学原理出发，当忽略热的影响时，孔隙介质理论中的能量平衡方程(热力学第一定律)中的变形功是处理广义力与广义变形关系的理论基础. 因此，应当以三相非饱和土的总变形功(30)式为基础，建立相应的有效应力.

Dean等人[7]讨论并给出了基于功的假定(work hypothesis)而定义的有效应力，即以固体骨架应变在功上相对偶的广义应力定义为非饱和土的有效应力. 基于这种有效应力定义的原则，考察能量守恒方程(15)式中总变形功(30)式可知，与土骨架位移在功上对偶的应力为 σ'，即(31)式，它就是本文建议的非饱和土的有效应力. 由(31)式可知，有效应力不但与各相应力有关，还与孔隙中各相孔隙的体积分数(或饱和度相关)相关. 这种有效应力与单相介质中Cauchy应力是不同的，它是混合物中各相应力的一种组合应力. 本文建议的有效应力，包括材料孔隙的体积分数，也就是说这种有效应力依赖于各相材料的体积性质，而这是不同于单相介质的情况，单相介质中假定应力变量与材料的性质无关. 但从混合物理论的观点看这种相关却是很自然的(因为它反映了孔隙介质内部微观结构和组分的变化对应力的影响). 另外从(30)式可知: 变形功(或机械功)除了包括有效应力外，还有基质吸力和气相压力变化的影响，而这些广义力都会对各种广义变形产生影响. 在这种意义上，本文建议的有效应力，就不能像饱和土中的有效应力那样去理解，即土的变形是由单应力变量的有效应力唯一确定的. 也不能由目前流行的非饱和土中双应力变量理论唯一确定的非饱和土的变形，这是因为即使净应力(net stress)、基质吸力和孔隙比相同，但两个具有不同饱和度土样的力学行为以及土颗粒之间的相

互作用力(即所谓的有效应力)却可以不同[6].

本文建议的有效应力，见(31)式，与Bishop[2]提出的有效原理相似，其不同之处仅在于本文用S_r代替了Bishop的材料参数χ. 本文建议的有效应力中S_r和$(1-S_r)$的物理意义为平均的孔隙水压力和孔隙气压力是以它们相应的孔隙的体积分数作为权重系数；因此这一有效应力是总应力减去以各自的体积分数作为权重系数的孔隙水压和孔隙气压的一种综合作用. 也就是说，在总应力中减去分别以各自的体积分数作为不同的权重的具有中性应力性质的流体压力的影响和作用. 所以把这三种应力组合为一种有效应力，并且认为这种有效应力是沿着土骨架传递的. 当饱和度S_r=1 时, (31)式就从非饱和土的有效应力变为饱和土的有效应力，即

$$\sigma' = \sigma - [S_r P_w + (1 - S_r) P_a]\underline{\delta} = \sigma - [P_w]\underline{\delta}.$$

变形功(30)式中除了有效应力以及与其对偶的土骨架变形所产生的功以外，还有基质吸力和气体压力作用所产生的功. 这两个应力的影响在建立本构模型时应给于适当的考虑. 事实上，我们得到的总变形功(30)式与Houlsby[12]给出的非饱和土总变形功的表达式基本相同. 但与之相比，本文的理论基础是多相孔隙介质理论，其前提与假设是明确的. 本文给出的功的形式还满足Houlsby[7]的建议，即正确的描述非饱和土的物理现象应包括与土骨架变形和饱和度在功上相对偶的广义力项.

值得指出的是，本文建立的有效应力与Wheeler[6]以及其他一些研究者建议并使用的有效应力相同. 但Wheeler或其他一些研究者是基于经验和直觉采用了这种有效应力的形式，它只是一种半理论、半经验的公式. 而本文建议的有效应力是建立在孔隙介质理论基础之上经推演而得到的，它具有坚实的理论基础.

4　相分离原理在非饱和土中适用性的讨论

Passman[13]提出相分离原理作为建立本构方程时应该满足的原理(确定本构方程的4个原理之一[13]). 该原理把状态函数分为两类: 第一类α相的状态函数(例如: σ^α, ε^α, A^α 和 q^α 等，它们在α相独立存在时也仅是α相材料本身的状态函数)仅依赖于α相的独立状态变量. 第二类增长的α相状态函数(例如: 前述的不同相之间的相互作用项 $\hat{\rho}^\alpha$, $\hat{P}^\alpha$ 和 $\hat{\varepsilon}^\alpha$ 等)依赖于所有(相)的独立状态变量. 相分离原理的主要用途是当利用第一类α相的状态函数建立本构方程时其状态函数仅依赖于α相的独立状态变量，而与其他相的独立状态变量无关. 这样做可以减少本构函数(本构方程)和参数的数量，并可以利用单相的实验或理论确定之.

等温过程非饱和土的变形功W (38)式中的Helmholtz自由能A代表了可恢复变形的影响，D则代表了能量耗散的影响. Helmholtz自由能不仅可以表示弹性变形，而且还可以表示由塑性变形引起的并在发生逆变形时可恢复的“储藏”的塑性功(stored plastic work)[18]. 因此，Helmholtz自由能A在弹塑性不耦合的情况下可以分解为[19]

$$A = A^e + A^p, \tag{41}$$

其中 A^e 是由弹性变形产生的自由能，即 $A^e = A(E)$，A^p 是由塑性变形产生的可恢复的自由能，即 $A^p = A(E_p)$，E_p 为塑性变形.

利用热力学框架建立非饱和土本构关系时需要给出自由能势函数. 而在建立自由能势函数的过程中首先面临如何选择独立状态变量的问题. 通常选择不同的独立状态变量, 会得到不同形式的本构方程. 而一旦选择了独立的状态变量, 自由能势函数就可以定义为这一组独立变量的函数. 而耗散势函数则取为独立状态变量与内变量合集的函数. 下面通过(30)式来讨论自由能势函数的独立状态变量及其具体形式. 为讨论方便, 假定固相和液相体积不可压缩, (30)式表示为

$$W=\sigma':\dot{E}_s+ns\dot{S}_r-(1-S_r)n\frac{P_a}{K_a}\dot{P}_a.$$

从上面的表达式可知, 与 $\dot{E}_s$ 相对应的广义应力是由(31)式决定的. 但(31)式中的应力为三相应力的组合结果, 而不仅仅是固相中的应力. 另外, 上式右端第二项的广义应力为基质吸力, 它是孔隙气压减去孔隙液压的结果, 而不是某一相的应力. 只有上式右端第三项代数式, 它仅与孔隙气相有关而与其他项无关, 因此, 气相的自由能 A_a 可以满足Passman[12]给出的相分离原理.

对于一般多相孔隙介质(线弹性体), 其各相自由能势函数可选为[20]

$$A^s=A^s(T,\rho^s,E_s),$$

$$A^f=A^f(T,\rho^f,E_f).$$

由相分离原理[12], 整体自由能函数有

$$\dot{A}=\sum\dot{A}_\alpha=\dot{A}_s+\dot{A}_w+\dot{A}_a.$$

而相分离原理要求 A_s 仅与固相的独立状态变量相关, 而与其他的相无关. 因此有

$$\sigma'=\rho^s\frac{\partial\dot{A}}{\partial E_s}=\rho^s\frac{\partial A_s}{\partial E_s}=\sigma^s.$$

上式结果说明 σ' 应由固相的应力变量确定, 而与其他相的应力无关. 但这一结果与(31)式给出的 σ' 由三相应力的组合相矛盾, 由此得出, 相分离原理不适合非饱和土这一多相孔隙介质的结论. 也就是说, 即使自由能势函数可以分解为 $A=A_s+A_w+A_a$, 其每一组的自由能势函数(除气相外)不仅依赖于本相的独立状态变量, 它还依赖于其他相的独立状态变量. 这种情况也被近些年非饱和土的试验结果所验证. 例如: 固相变形E_s不但受到固相的应力的影响, 它还受到基质吸力以及饱和度的影响[6], 而且基质吸力也是气相压力与液相压力差的结果, 而不是某一单相的压力; 饱和度也仅反映了液相与气相孔隙的体积分数. 也就是说, 非饱和土中α相的函数不但依赖于α相的独立状态变量, 而且还依赖于其他相的独立状态变量, 否则就需要增加某些限制或附加假定. 由此可以得出结论: 在建立非饱和土的本构方程过程中, 相分离原理不严格适用. 当然为了实用的目的使用相分离原理, 作为简化的近似处理, 也是允许的, 但这样做并不是精确的方法, 而是一种实用和近似的办法.

5 结语

本文基于混合物理论和热力学原理推导出总变形功W的一种表达式, 在此基础上提出了

非饱和土有效应力的表达式. 并指出非饱和土的物理力学性质复杂, 其影响因素较多, 其固体骨架的变形不可能像饱和土那样由单度量有效应力唯一的确定. 另外, 利用总变形功的表达式以及各相自由能 A^{α} 的关系式, 论证并得出了Passman[12]给出的相分离原理并不严格适用于非饱和土的结论. 这些研究和讨论对加深非饱和土中有效应力原理的认识, 以及将来进一步建立非饱和土的本构方程都会产生积极的作用.

参考文献

1 Aitchison G D, Donald I B. Some preliminary studies of unsaturated soils. In: Proc. 2nd Austr. -N. Zealand Conf Soil Mech. Found Eng. Wellington: Techinical Publications for the New Zealand Institution of Engineering, 1956. 192—199

2 Bishop A W. The principle of effective stress. Teknisk Ukeblad, 1959, 106(39): 859—863

3 Bishop A W, Blight G E. Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils. Geotechnique, 1963, 13(3): 177—197

4 Blight G E. A study of effective stress for volume change. In: Moisture Equilibrium and Moisture Changes in Soils beneath Covered Areas, Sydney: Butterworths, 1965. 259—269

5 Fredlund D G, Morgenstern N R. Stress state variables for unsaturated soils. J Geotech Eng, 1977, 103(GT5): 447—466

6 Wheeler S J, Sharma R J, Buisson M S R. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behavior in unsaturated soils. Geotechnique, 2003, 53(1): 41—54[DOI]

7 Dean E T, Houlsby. Editorial. Geotechnique, 2005, 55(5): 415—417[DOI]

8 李锡夔. 非饱和土中的有效应力. 大连理工学报, 1997, 37(4): 381—385

9 谢定义. 对非饱和土有效应力研究中若干基本观点的思辨. 岩土工程学报, 2006, 28(2): 170—173

10 De Boer R. Theory of Porous Media. Berlin: Springer-Verlag, 2000

11 Houlsby G T. The work input to a granular material. Geotechnique, 1979, 29(3): 354—358

12 Houlsby G T. The work input to an unsaturated granular material. Geotechnique, 1997, 47(1): 193—196

13 Passman S T, Nunziato J W, Walsh E K. A Theory of Multiphase Mixtures. In: Trusdell C, ed. Rational Thermodynamics. New York: Springer-Verlag, 1984. 286—325

14 De Boer R. Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory. Appl Mech Rev, 1996. 49(4): 201—262

15 Hansen A C. Reexamining some basic definitions of modern mixture theory. Int J Eng Sci, 1989, 27(12): 1531—1544[DOI]

16 Trusdell C. Thermodynamics of Diffusion. In: Trusdell C, ed. Rational Thermodynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 219—236

17 Houlsby G T, Puzrin A M. A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials. Int J Plasticity, 2000, 16: 1017—1047[DOI]

18 Collins I F. The concept of stored plastic work for frozen elastic energy in soil mechanics. Geotechnique, 2005, 5: 373—382

19 Collins I F. Kelly P A. A thermomechanical analysis of a family of soil models. Geotechnique, 2002, 7: 507—518

20 Wei C, Muraleetharan K K. A continuum theory of porous media saturated by multiphase immiscible fluids: Ⅰ. Linear poroelasticity. Int J Eng Sci, 2002, 40: 1807—1833[DOI]