

新的四元数解析信号相位定义

崔峰 曹学光 彭思龙

(中国科学院自动化研究所国家专用集成电路设计工程技术研究中心, 北京 100080)

摘要 解析信号的定义及瞬时频率、瞬时幅值的算法在信号处理的时频分析领域有着重要意义。四元数解析信号是1维解析信号的定义在2维上的合理延伸,但是现有的四元数解析信号的相位定义不适合分析2维信号的瞬时频率。为此根据四元数解析信号的自身特点提出了一种新颖的四元数解析信号相位定义,并应用两种2维信号分解工具验证了该定义的适用性。合成与自然纹理的试验结果表明,该相位定义更加符合信号的内在性质,更有利于对图像解析特征的提取与分类。

关键词 解析信号 四元数 经验模式分解(EMD) Gabor滤波器 纹理分析

中图法分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2006)02-0251-08

A New Phase Definition of Quaternionic Analytic Signal

CUI Feng, CAO Xue-guang, PENG Si-long

(National ASIC Design Engineering Center, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract The definition of analytic signal and the computation algorithm for instantaneous frequencies and instantaneous amplitudes have important significance in signal processing domain. The quaternionic analytic signal is an appropriate extension of 1D analytic signal to 2D case. Whereas, the existing phase definition of quaternionic analytic signal isn't fit for extracting instantaneous frequencies of images. According to the properties of quaternionic analytic signal, a novel phase definition of quaternionic analytic signal is proposed in this paper and two decomposition tools are utilized to test the effectiveness of the definition. The experimental results of synthetic and natural textures indicate that the new definition is more coincident with image intrinsic characters and advantageous for image analytic feature extraction and classification.

Keywords analytic signal, quaternion, empirical mode decomposition(EMD), Gabor filter, texture analysis

1 引言

时频分析^[1]是信号处理领域的重要工具,其目的是描述信号的幅值和频率含量如何随时间或空间演变,体现信号在空间局部或时间局部的幅值与频率成分的变化。解析信号也即复信号的定义是为了得到合理的实信号的瞬时频率与瞬时幅值。1维解析信号的定义早已成熟,目前有多种2维解析信号的定义,其中,四元数解析信号^[2-4]是1维解析信号定义在2维上的合理延伸,克服了以往各种2维解

析信号定义的不足。但是现有的四元数解析信号的相位定义是建立在单位四元数与3维空间转动的对应关系上的,不适合分析2维信号的瞬时频率。

为此,根据四元数解析信号的自身特点提出了一种新的四元数解析信号相位定义,该定义能够更合理地体现信号分量在水平与竖直两个正交方向上的瞬时相位,从而得到信号分量更合理的瞬时频率。该定义同时可以检测出信号分量的累加可分离度。在AM-FM(amplitude modulation-frequency modulation)模型中,实际信号是多分量^[5]的。至今已有许多时频分析方法可以将信号进行分解,如:短时傅里叶变换、

基金项目:国家自然科学基金项目(60272042,10171007)

收稿日期:2004-09-06;改回日期:2005-05-13

第一作者简介:崔峰(1977~),男。2005年于中国科学院自动化研究所获模式识别与智能系统专业工学博士学位。主要研究方向为图像处理、时频分析、并行算法等。E-mail: fengcui_cn@yahoo.com.cn

小波分解等。引入 2 维 EMD 分解 (EMD; empirical mode decomposition) 方法和四元数 Gabor 滤波器方法作为信号分解工具以验证本文相位定义的适用性。合成与自然纹理的试验结果表明本文的四元数解析信号相位定义符合信号的内在性质, 有更明确的分析意义, 适合提取 2 维图像信号的解析特征。

2 2 维解析信号的定义

2.1 多分量 AM-FM 图像表达

多分量 AM-FM 图像表达技术^[5]是将 2 维实信号图像表示为多个局部一致的复分量之和的实部。其中每一个复分量 $t(x)$ 具有如下形式:

$$t(x) = \lambda(x) \exp[i\varphi(x)] \\ = \lambda(x) (\cos \varphi(x) + i \sin \varphi(x)) \quad (1)$$

其中, $(x) = [x_1, x_2]^T$, $t: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}$, $\lambda: \mathbf{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, $\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $\lambda(x)$ 是该分量的幅值调制函数, $\varphi(x)$ 为该分量的瞬时相位函数, $\nabla \varphi(x)$ 是该分量的频率调制函数。

一个多分量的图像 $f(x)$ 可以表示为下式的实部 (K 为信号分量数目):

$$f(x) = \sum_{i=1}^K \lambda_i(x) \exp[i\varphi_i(x)] \quad (2)$$

给定一个初始相位后, 式(1)的单分量模型由 3 个量决定: 幅值调制函数 $\lambda(x)$, 竖直频率 $\varphi_{x_1}(x) = \partial \varphi(x) / \partial x_1$, 水平频率 $\varphi_{x_2}(x) = \partial \varphi(x) / \partial x_2$, 这些变量就是信号的解析特征。解析信号就是信号的 AM-FM 表达形式。时频分析的重点是对频率成份的分析。

2.2 Hilbert 变换与传统 2 维解析信号定义

2.2.1 1 维 Hilbert 变换与 1 维解析信号

信号的瞬时频率和瞬时幅值是通过解析信号求出的。对于 1 维实信号 $f(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 其解析信号 $f_A(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ 的实部是 $f(x)$, 虚部由 $f(x)$ 的 Hilbert 变换得到:

$$f_A(x) = f(x) + if_H(x) = |f_A(x)| \exp(i\phi(x)) \\ \xrightarrow{\text{FT}} F_A(u) = F(u)(1 + \text{sign}(u)) \quad (3)$$

其中, “ $\xrightarrow{\text{FT}}$ ” 表示右式 $F_A(u)$ 为左式 $f_A(x)$ 的 Fourier 变换。 $F(u)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 变换, $\text{sign}(u)$ 为符号函数,

$$\text{sign}(u) = \begin{cases} 1 & u > 0 \\ 0 & u = 0 \\ -1 & u < 0 \end{cases}$$

$f_H(x)$ 为 1 维信号的 Hilbert 变换 (其积分为柯西主值积分):

$$f_H(x) = f(x) * \frac{1}{\pi x} = \frac{1}{\pi} \text{V. p.} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (4)$$

其中, V. p. 是柯西主值 (Cauchy principal value)。对于 1 维实信号 $f(x)$, 其 $f_H(x)$ 的 Hilbert 变换为 $-f(x)$ 。由于实际信号成份的复杂性, 直接对原信号求取解析信号求得的瞬时频率和瞬时幅值往往难以符合实际情况^[6]。

2.2.2 2 维 Hilbert 变换与传统 2 维解析信号

对于 2 维实信号 $f(x): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, 传统上有两种 2 维 Hilbert 变换的定义^[3]:

总体 Hilbert 变换 $f_H(x)$:

$$f_H(x) = \frac{1}{\pi^2} \text{V. p.} \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{f(\xi)}{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (5)$$

方向 n 的部分 Hilbert 变换 $f_H^n(x)$:

$$f_H^n(x) \xrightarrow{\text{FT}} F_H^n(u) = -iF(u) \text{sign}(u^T \cdot n) \quad (6)$$

其中, $F(u)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 变换, $u = [u_1, u_2]^T$ 。

令 $f_H^1(x)$ 、 $f_H^2(x)$ 分别表示 x_1 、 x_2 坐标轴方向的部分 Hilbert 变换, 则有:

$$f_H^j(x) = \frac{1}{\pi} \text{V. p.} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(\xi)}{x_j - \xi_j} d\xi_j, j = 1, 2 \quad (7)$$

由这两种 2 维 Hilbert 变换的定义可得已有的 3 种 2 维解析信号的定义^[3], 分别为

总体解析信号 $f_{\text{tot}}(x)$:

$$f_{\text{tot}}(x) = f(x) + if_H(x) \xrightarrow{\text{FT}} \\ F_{\text{tot}}(u) = F(u)[1 - i \text{sign}(u_1) \text{sign}(u_2)] \quad (8)$$

方向 n 的部分解析信号 $f_{\text{part}}^n(x)$:

$$f_{\text{part}}^n(x) = f(x) + if_H^n(x) \xrightarrow{\text{FT}} \\ F_{\text{part}}^n(u) = \begin{cases} 2F(u) & (u^T \cdot n) > 0 \\ F(u) & (u^T \cdot n) = 0 \\ 0 & (u^T \cdot n) < 0 \end{cases} \quad (9)$$

具有单象限 Fourier 谱的解析信号 $f_{\text{so}_1}(x)$:

$$f_{\text{so}_1}(x) \xrightarrow{\text{FT}} F_{\text{so}_1}(u) = \\ F(u)(1 + \text{sign}(u_1))(1 + \text{sign}(u_2)) \quad (10)$$

以上各种 2 维解析信号均可由对应的 Fourier 变换形式求反 Fourier 变换得出, 解析信号的虚部即为原信号的各种 Hilbert 变换, 由这些解析信号可以

分别计算各自定义的瞬时幅值、瞬时频率。这些2维解析信号的定义各具特点,但是并不完全符合1维解析信号定义在2维上的拓展,近年来出现的四元数解析信号弥补了它们的不足^[2,3]。

2.3 四元数代数及四元数解析信号

四元数(Quaternion)代数是 Hamilton 于 1843 年提出的向量代数^[2,3],近年来被应用于高维信号处理。

2.3.1 四元数代数

称数集 H 为四元数集,若其满足:

$$H = \{a + ib + jc + kd \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\} \quad (11)$$

其中, i, j, k 为虚数单位。四元数 3 个虚数单位的乘法运算法则定义如下:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1, ij = -ji = k \\ jk &= -kj = i, ki = -ik = j \end{aligned} \quad (12)$$

易知四元数的乘法不符合交换律。四元数 $q = a + ib + jc + kd$ 的共轭 $\bar{q}$ 、模 $|q|$ 和倒数 q^{-1} 的定义分别为

$$\begin{cases} \bar{q} = a - ib - jc - kd \\ |q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\ q^{-1} = \bar{q}/|q|^2 \end{cases} \quad (13)$$

四元数域 H 中有 3 个卷乘 (Involution) 算子^[2,3]:

$$\alpha_i(q) = -iqi, \alpha_j(q) = -jqj, \alpha_k(q) = -kqk \quad (14)$$

由这些卷乘算子可以定义四元数域的 Hermite 对称^[2,3]。一个定义在 $\mathbf{R}^2 \rightarrow H$ 的函数 $f(x_1, x_2)$ 是四元数 Hermite 对称的,如果 $f(x_1, x_2)$ 满足:

$$\begin{cases} f(x_1, -x_2) = \alpha_i(f(x_1, x_2)) \\ f(-x_1, x_2) = \alpha_j(f(x_1, x_2)), (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \\ f(-x_1, -x_2) = \alpha_k(f(x_1, x_2)) \end{cases} \quad (15)$$

此外,当 μ 为虚数单位, Φ 为实数时,有:

$$e^{\mu\Phi} = \cos(\Phi) + \mu\sin(\Phi) \quad (16)$$

2.3.2 四元数解析信号

采用的 2 维实函数 $f(x_1, x_2)$ 的四元数 Fourier 变换 (QFT) $F^q(u_1, u_2): \mathbf{R}^2 \rightarrow H$ 和四元数 Fourier 反变换 (IQFT) 分别定义为

$$\begin{cases} F^q(u_1, u_2) = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-i2\pi u_1 x_1} f(x_1, x_2) e^{-j2\pi u_2 x_2} dx_1 dx_2 \\ f(x_1, x_2) = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{i2\pi u_1 x_1} F^q(u_1, u_2) e^{j2\pi u_2 x_2} du_1 du_2 \end{cases} \quad (17)$$

这里, i, j 不可交换, k 在乘积展开后出现。QFT 和 IQFT 均可通过分步的 Fourier 变换与反 Fourier 变换计算^[2]。Bulow 等人证明了 2 维实函数的 QFT 满足

四元数 Hermite 对称的定义,因此 2 维实函数的所有 QFT 信息可以由一个像限的 QFT 信息完全得出。此外,实信号的四元数 Fourier 频谱幅值图是关于两个坐标轴对称的。由此得出实信号 $f(x_1, x_2)$ 的四元数解析信号 $f_{\infty}^q(x_1, x_2): \mathbf{R}^2 \rightarrow H$ 的定义^[2,3]:

$$f_{\infty}^q(x_1, x_2) \xrightarrow{\text{OFT}} F^q(u_1, u_2)(1 + \text{sign}(u_1))(1 + \text{sign}(u_2)) \quad (18)$$

$f_{\infty}^q(x_1, x_2)$ 可由其 QFT 形式求 IQFT 得出。四元数解析信号较以往的 2 维解析信号的不同定义更加符合 1 维解析信号的定义在 2 维上的延伸^[2,3]。

实际上实信号的 $f_{\infty}^q(x)$ 可表示为如下形式^[2,3]:

$$f_{\infty}^q(x) = f(x) + if_H^1(x) + jf_H^2(x) + kf_H(x) \quad (19)$$

其中, $f_H^1(x)$ 、 $f_H^2(x)$ 分别为 $f(x_1, x_2)$ 在 x_1, x_2 坐标轴方向的部分 Hilbert 变换, $f_H(x)$ 为 $f(x_1, x_2)$ 的总体 Hilbert 变换。可见 $f_{\infty}^q(x)$ 综合了 $f(x)$ 、 $f_H^1(x)$ 、 $f_H^2(x)$ 和 $f_H(x)$ 的信息。

Bulow 等人根据 3 维空间转动与单位四元数的对应关系定义了新的四元数表达式^[2-4]:

$$q = |q| e^{i\phi} e^{k\psi} e^{j\theta} \quad (20)$$

其中, $(\phi, \theta, \psi) \in [-\pi, \pi) \times [-\pi/2, \pi/2) \times [-\pi/4, \pi/4]$ 为四元数 q 的相位矢量, $|q|$ 为四元数 q 的模。

对于 $q \in H$, 设 $\Phi(q) = \phi$, $\Theta(q) = \theta$, $\Psi(q) = \psi$ 。则 Bulow 等人定义的四元数 q 的相位计算方法如下:

(1) 单位化四元数 $q: \bar{q} = q/|q| = a + ib + jc + kd$;

(2) 求取四元数 q 的相位 ψ 分量值:

$$\psi = -\arcsin(2(bc - ad))/2 \quad (21)$$

(3) 如果 $\psi = \pm\pi/4$, 则令 $\theta = 0$, 计算 ϕ'

$$\phi' = \text{atan2}(2(-cd + ab), a^2 - b^2 - c^2 + d^2)/2 \quad (22)$$

这里 $\text{atan2}(y, x)$ 为求 y/x 的反正切函数^[2,3], 否则, 计算 ϕ' 和 θ :

$$\phi' = \text{atan2}(2(cd + ab), a^2 - b^2 + c^2 - d^2)/2 \quad (23)$$

$$\theta = \text{atan2}(2(bd + ac), a^2 + b^2 - c^2 - d^2)/2 \quad (24)$$

(4) 如果 $e^{i\phi'} e^{k\psi} e^{j\theta} = -\bar{q}$, 则令

$$\phi = (\phi' + \pi) \bmod 2\pi$$

否则 $\phi = \phi'$ 。

其中, $(m \bmod n = ((m + n/2) \bmod n) - n/2)$ 。

对于四元数解析信号 $f_{\infty}^q(x_1, x_2): \mathbf{R}^2 \rightarrow H$ 来说, 每一点的 $|q|$ 即为 $f_{\infty}^q(x_1, x_2)$ 的瞬时幅值, (ϕ, θ, ψ) 为瞬时相位矢量。

对于 2 维乘积型可分离实信号

$$f(x) = g(x_1)h(x_2)$$

Bülow 关于实信号的四元数解析信号的相位定义具有特殊的性质, ϕ 和 θ 表示了该信号 1 维可分离分量的竖直瞬时相位与水平瞬时相位, ψ 恒等于 0:

$$\begin{cases} \Phi(f_{so}^q(x_1, x_2)) = \text{atan2}(g_H(x_1), g(x_1)) \\ \Theta(f_{so}^q(x_1, x_2)) = \arctan(h_H(x_2)/h(x_2)) \\ \Psi(f_{so}^q(x_1, x_2)) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

其中, $g_H(x_1)$ 、 $h_H(x_2)$ 分别为 $g(x_1)$ 、 $h(x_2)$ 的 Hilbert 变换。

一般情况下, 四元数解析信号的相位 ψ 分量与原信号的局部内蕴结构相关, 在一定程度上表示原信号可分解为乘积型信号的度量。然而非乘积型可分离信号的四元数解析信号相位 ϕ 分量和 θ 分量都没有明显的分析意义^[2,3]。

3 新的四元数解析信号相位定义

前述的四元数解析信号相位定义与原信号的瞬时相位并没有直接联系。由多分量图像表达模型可以看出, 累加型信号比乘积型信号更符合一般信号处理的模型。经推导可发现, 对于累加型可分离信号 $f(x) = g(x_1) + h(x_2)$ 的四元数解析信号 $f_{so}^q(x_1, x_2)$, Bülow 定义的相位 ϕ 分量和 θ 分量均无法表示信号 1 维分离分量的竖直瞬时相位与水平瞬时相位, ψ 也不是一个常量, 因此原先的定义有很大的局限性, 需要进行改造。从实信号的四元数解析信号性质出发, 重新定义了四元数解析信号相位的 3 个分量值, 使之更适合图像解析特征的提取, 计算复杂度也大大降低。

对于 2 维实信号 $f(x)$ 的四元数解析信号 $f_{so}^q(x)$, 引入一种新的表达式:

$$f_{so}^q(x) = \lambda_1(x) \exp(i\phi(x)) + \lambda_2(x) \exp(j\theta(x)) + \lambda_3(x) \exp(k\psi(x)) \quad (26)$$

其中, $\lambda_1(x)$ 、 $\lambda_2(x)$ 、 $\lambda_3(x)$ 是值域为 $[0, \infty)$ 的瞬时幅值分量调制函数, $\phi(x)$ 、 $\theta(x)$ 、 $\psi(x)$ 是值域为 $[-\pi, \pi)$ 的瞬时相位调制函数。希望 $\phi(x)$ 、 $\theta(x)$ 能更广泛地反映原信号的竖直与水平方向的瞬时相位信息, $\psi(x)$ 表征原信号的某种可分离程度, 幅值分量调制函数能表达相应的幅值信息。这里将重点放在相位定义上。

设 $a(x)$ 、 $b(x)$ 、 $c(x)$ 、 $d(x)$ 为 2 维实函数, 可定义与式 (19) 等价的 $f_{so}^q(x)$ 的一般形式:

$$\begin{aligned} f_{so}^q(x) &= a(x) + ib(x) + jc(x) + kd(x) \\ &= f(x) + if_H^1(x) + jf_H^2(x) + kf_H(x) \end{aligned} \quad (27)$$

若直接由式 (26)、(27) 联立解方程组则无法得到确定的解, 但可根据四元数解析信号的特点结合 Hilbert 变换的性质进行如下解算:

(1) 对 $b(x)$ 求取 x_1 方向 $[1, 0]^T$ 的部分 Hilbert 变换 $b_H^1(x)$;

(2) 对 $c(x)$ 求取 x_2 方向 $[0, 1]^T$ 的部分 Hilbert 变换 $c_H^2(x)$;

(3) 取 $\lambda_1(x) \exp(i\phi(x)) = -b_H^1(x) + ib(x)$, 其中, $\phi(x) = \text{atan2}(b(x), -b_H^1(x))$

$$\lambda_1(x) = \sqrt{(b_H^1(x))^2 + (b(x))^2}$$

(4) 取 $\lambda_2(x) \exp(j\theta(x)) = -c_H^2(x) + jc(x)$, 其中, $\theta(x) = \text{atan2}(c(x), -c_H^2(x))$

$$\lambda_2(x) = \sqrt{(c_H^2(x))^2 + (c(x))^2}$$

(5) 取 $\lambda_3(x) \exp(k\psi(x)) = a(x) + b_H^1(x) + c_H^2(x) + kd(x)$, 其中, $\psi(x) = \text{atan2}(d(x), a(x) + b_H^1(x) + c_H^2(x))$, $\lambda_3(x) = \sqrt{(a(x) + b_H^1(x) + c_H^2(x))^2 + (d(x))^2}$ 。

可以从累加型可分离信号和乘积型可分离信号的角度分别说明该定义的性质。对于累加型可分离信号 $f(x) = g(x_1) + h(x_2)$, 由式 (19) 可得其

$$f_{so}^q(x) = g(x_1) + h(x_2) + ig_H(x_1) + jh_H(x_2) \quad (28)$$

由于 $g_H(x_1)$ 的 x_1 方向的部分 Hilbert 变换为 $-g(x_1)$, $h_H(x_2)$ 的 x_2 方向的部分 Hilbert 变换为 $-h(x_2)$, 所以该信号的四元数解析信号的各个相位分量值为

$$\begin{cases} \phi(x) = \text{atan2}(g_H(x_1), g(x_1)) \\ \theta(x) = \text{atan2}(h_H(x_2), h(x_2)) \\ \psi(x) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

因此新的定义完全符合累加型可分离信号的分析要求, 当信号是加性可分离时 $\psi(x) = 0$, $\phi(x)$ 和 $\theta(x)$ 分别表示了信号 1 维可分离分量的竖直相位与水平相位。对 $\phi(x)$ 沿竖直方向展开并求竖直方向的导数即得原信号竖直方向的瞬时频率, 对 $\theta(x)$ 沿水平方向展开并求水平方向的导数即得原信号水平方向的瞬时频率。

对于乘积型可分离信号 $f(x) = g(x_1)h(x_2)$, 同样可得其对应的四元数解析信号形式:

$$f_{so}^q(x) = g(x_1)h(x_2) + ig_H(x_1)h(x_2) +$$

$$jg(x_1)h_H(x_2) + kg_H(x_1)h_H(x_2) \quad (30)$$

其中, $g_H(x_1)h(x_2)$ 的 x_1 方向的部分 Hilbert 变换为 $-g(x_1)h(x_2)$, $g(x_1)h_H(x_2)$ 的 x_2 方向的部分 Hilbert 变换为 $-g(x_1)h(x_2)$, 所以该信号的四元数解析信号的各个相位分量为

$$\begin{cases} \phi(x) = \text{atan2}(g_H(x_1)h(x_2), g(x_1)h(x_2)) \\ \theta(x) = \text{atan2}(g(x_1)h_H(x_2), g(x_1)h(x_2)) \\ \psi(x) = \text{atan2}(g_H(x_1)h_H(x_2), -g(x_1)h(x_2)) \end{cases} \quad (31)$$

可见新的相位定义同样可以很好地反映乘积型可分离信号的竖直分量与水平分量的相位信息, 然而 $\psi(x)$ 并不是恒定值, 无法反映信号的可分离程度。但是考虑到实际信号以累加型的形式为多, 而本文的定义可以准确地反映累加型信号的相位和加性可分离度, 所以新的相位定义从总体上说比原定义更具有普遍意义且计算简单。同理可以推导出本文的幅值分量调制函数定义也具有较好的分析意义。

如前所述, 由于实际信号成分的复杂性, 直接对原信号求取解析信号而得的瞬时幅值和瞬时相位往往难以符合人们的直观感觉与真实情况。为了将 2 维信号分解为简单分量以利于四元数解析信号的时频分析, 采用了两种方法来验证本文的定义, 即 2 维 EMD 分解方法和四元数 Gabor 滤波器方法。

4 2 维可分离 EMD 分解与四元数解析信号分析

EMD 分解是完全数据驱动的, 可以自适应地将数据分解为多个 IMF (IMF: intrinsic mode function) 和残差趋势项的和, 其中各个 IMF 之间是近似正交的, 蕴含了数据局部的各层频率成分^[6]。现有的基于径向基函数插值的 2 维 EMD 分解方法^[7]由于计算代价大等原因并不适用于实际应用。

将 1 维 EMD 分解的方法引申到 2 维上, 利用 2 维可分离的筛过程在水平和竖直两个正交方向上提取图像的 2 维包络, 进而得到了信号的各层 IMF, 该方法具有简单快速的特点。记图像信号为 $f(x_1, x_2)$, $x_1 = 1, \dots, X_1, x_2 = 1, \dots, X_2$, 则 2 维可分离 EMD 分解算法简述如下:

(1) 初始化: $r_0(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$, $j = 1$;

(2) 筛选抽取第 j 个 IMF:

① 初始化: $h_0(x_1, x_2) = r_{j-1}(x_1, x_2)$, $i = 1$;

② 提取 $h_{i-1}(x_1, x_2)$ 的上包络、下包络和包络均值:

(a) 分别提取 $h_{i-1}(x_1, x_2)$ 每一行的局部极大值序列, 利用三次样条插值算法对 $h_{i-1}(x_1, x_2)$ 每行的局部极大值序列做 1 维插值, 排成信号的上包络中间值矩阵 $h_{\text{mid-upper}}(x_1, x_2)$, 同理利用 $h_{i-1}(x_1, x_2)$ 每行的局部极小值序列通过插值得到信号下包络中间值矩阵 $h_{\text{mid-lower}}(x_1, x_2)$;

(b) 求取上包络中间值和下包络中间值的平均:

$$m_{\text{mid}}(x_1, x_2) = (h_{\text{mid-upper}}(x_1, x_2) + h_{\text{mid-lower}}(x_1, x_2))/2;$$

(c) 分别提取 $m_{\text{mid}}(x_1, x_2)$ 每一列的局部极大值序列, 利用三次样条插值算法对 $m_{\text{mid}}(x_1, x_2)$ 每列的局部极大值序列做 1 维插值, 排成信号的上包络矩阵 $h_{\text{upper}}(x_1, x_2)$, 同理利用 $m_{\text{mid}}(x_1, x_2)$ 每列的局部极小值序列通过插值得到下包络矩阵 $h_{\text{lower}}(x_1, x_2)$;

(d) 求取上包络和下包络的平均值矩阵:

$$m_{i-1}(x_1, x_2) = (h_{\text{upper}}(x_1, x_2) + h_{\text{lower}}(x_1, x_2))/2$$

③ $h_i(x_1, x_2) = h_{i-1}(x_1, x_2) - m_{i-1}(x_1, x_2)$;

④ 计算终止条件 SD: 由于 2 维信号的长度一般小于 1 维信号, 所以在处理 2 维 EMD 分解时必须考虑减少边界效应的影响。取 $m_{i-1}(x_1, x_2)$ 的中间部分 $(x_1/2, x_2/2)$, 设该部分所含元素的绝对值的最大值为 Max_{mid} , 同理求得原图像的中间部分 $(x_1/2, x_2/2)$ 所含元素的绝对值的最大值 Max_{ima} , 计算

$$T = Max_{\text{mid}}/Max_{\text{ima}} \quad (32)$$

⑤ 如果 T 小于给定的门限值 ε (如 0.03), 则有 $\text{imf}_j(x_1, x_2) = h_{i-1}(x_1, x_2)$, 其中, $\text{imf}_j(x_1, x_2)$ 表示第 j 层 IMF。否则令 $i = i + 1$, 转到②;

(3) $r_j(x_1, x_2) = r_{j-1}(x_1, x_2) - \text{imf}_j(x_1, x_2)$;

(4) 若 $r_j(x_1, x_2)$ 的中间部分仍有不少于两个的极值点或者分解所得的 IMF 数目未达到要求, 则令 $j = j + 1$, 转到步骤 2;

(5) 最后得到 2 维信号的 EMD 分解表达式为

$$f(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^n \text{imf}_j(x_1, x_2) + r_n(x_1, x_2) \quad (33)$$

其中, n 代表分解层数, $r_n(x_1, x_2)$ 表示残差项。

先对累加型合成信号进行 2 维 EMD 分解。如图 1 所示, 该图像由不同频率的余弦分量构成 (本文取所有数据的采样间隔为 $0.006 \times \pi$, 大小为 200×200 像素):

$$f(x_1, x_2) = f_{\text{high}}(x_1, x_2) + f_{\text{middle}}(x_1, x_2) + f_{\text{low}}(x_1, x_2) \quad (34)$$

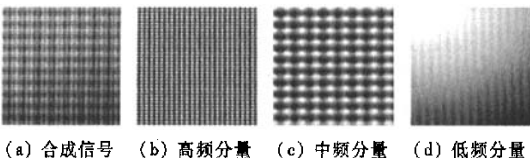


图 1 合成累加型信号与各频段分量

Fig. 1 Synthetic sum-type texture and its components

其中,
$$\begin{cases} f_{\text{high}}(x_1, x_2) = 40\cos(60x_1) + 40\cos(40x_2) \\ f_{\text{middle}}(x_1, x_2) = 50\cos(17x_1) + 30\cos(14x_2) \\ f_{\text{low}}(x_1, x_2) = 190\cos(0.3x_1) + 190\cos(0.2x_2) \end{cases}$$

图 2 是对信号进行 2 维 EMD 分解的结果,分解出了两个 IMF,可见试验结果与理想数据非常接近。对实验数据中的 IMF 分别计算四元数解析信号,再应用本文的相位定义求取瞬时频率和瞬时相位 ψ 分量值如图 3 所示(频率数据和相位分量数据都经

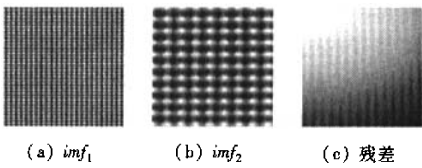


图 2 合成累加型信号 2 维 EMD 分解结果
Fig. 2 Experimental results of 2D separable EMD for synthetic sum-type texture

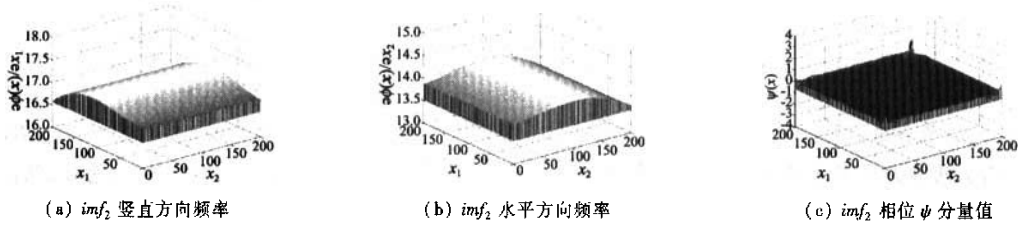


图 3 对图 2(b)应用本文相位定义的计算结果
Fig. 3 Experimental results of Fig. 2(b) computed by our phase definition

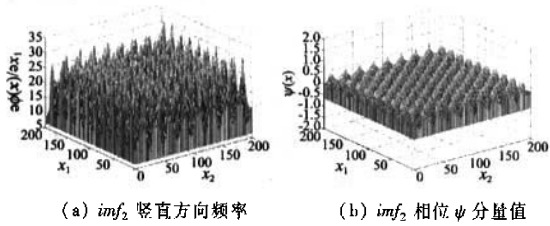


图 4 对图 2(b)应用原相位定义计算的竖直方向瞬时频率和相位 ψ 分量值
Fig. 4 Vertical instantaneous frequency and ψ component of fig. 2(b) computed by previous definition

对于自然纹理图像而言,一般分解出 2 至 3 个 IMF 就可以提供足够的特征信息。图 5 是对 Brodatz 标准纹理库^[8]中的 D106 纹理子图 EMD 分解两层的结果。可以看到, imf_1 蕴含了纹理的局部高频特征和主要结构信息, imf_2 蕴含了纹理的局部中频特

过中值滤波平滑处理,尺度为 5×5)。应用原四元数解析信号相位定义计算的 IMF 的竖直方向瞬时频率和相位 ψ 分量值的结果如图 4 所示。Hilbert 变换的边界效应会影响边缘附近的效果,当实验图像尺寸增大时边界效应会有所减弱。由实验结果证实本文的定义可以较精确地分析累加型信号的瞬时频率与可分离性,而原定义在分析累加型信号时是失败的。

征和较粗尺度结构信息,残差项蕴含了纹理的局部低频信息和整体趋势。EMD 分解对于信号局部频带信息的自适应划分为后续的处理提供了便利。由于自然纹理的频率成分非常复杂,所以只能进行定性分析。对原图像和 imf_1 分别应用本文定义求得瞬时水平频率和相位 ψ 分量值如图 6 所示。可见经 EMD 分解后,的确可以把原信号局部较一致的频率成分提取出来,IMF 的累加可分离性加强,更适合新定义的分析要求。

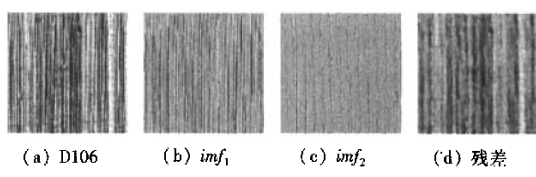


图 5 D106 纹理子图 EMD 分解结果
Fig. 5 EMD experimental results of D106

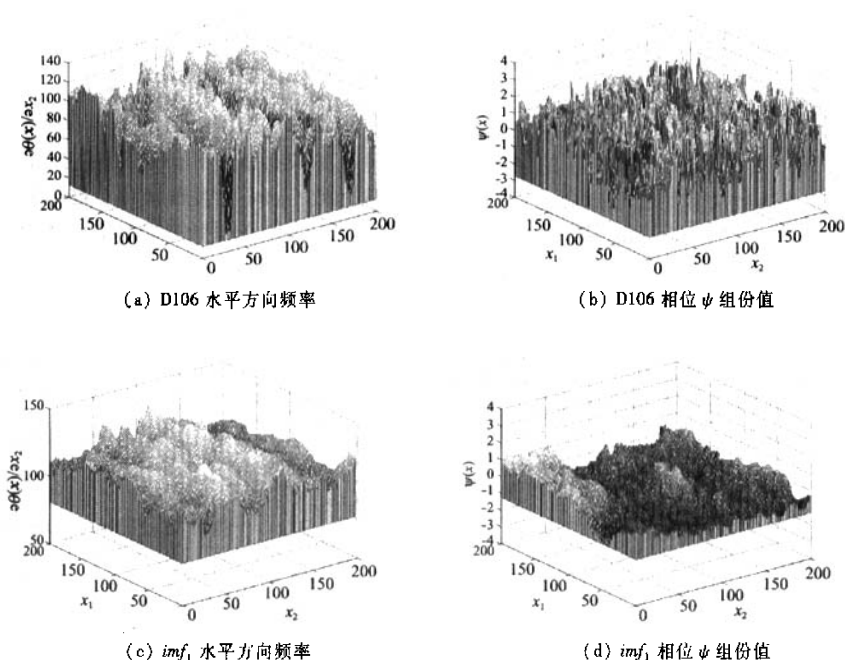


图6 对图5(a)和图5(b)应用本文相位定义的分析结果

Fig. 6 Experimental results of fig. 5(a) and fig. 5(b) computed by our phase definition

5 四元数 Gabor 滤波器与四元数解析信号分析

Gabor 滤波器是时频分析领域的重要工具,在纹理分析中有着广泛的应用^[4,9]。纹理具有准周期的统计特征,许多纹理主要由一些窄带的分量构成。针对纹理信号的特点,结合 Gabor 滤波器良好的空频分辨率和选择特性,与四元数解析信号定义对应,引入四元数域的 Gabor 滤波器(QGF)^[2,4]:

$$h^a(x_1, x_2) = g(x'_1, x'_2) \exp(i2\pi U_1 x_1) \exp(j2\pi U_2 x_2) \quad (35)$$

$$(x'_1, x'_2) = ((x_1 \cos(\alpha) + x_2 \sin(\alpha), -x_1 \sin(\alpha) + x_2 \cos(\alpha))) \quad (36)$$

$$g(x_1, x_2) = \frac{\varepsilon}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + (\varepsilon x_2)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (37)$$

其中, \$\varepsilon\$ 是 2 维 Gaussian 函数的高宽比, \$\sigma\$ 是尺度参数,虚单位 \$k\$ 在乘积展开后产生, \$\alpha\$ 为滤波器主轴沿 \$x_1\$ 坐标轴方向转动的角度, \$(U_1, U_2)\$ 是滤波器的中心频率,单位为 \$1/\text{图像宽度}\$。滤波器中心频率方向角 \$\beta = \arctan(U_2/U_1)\$。一般取 \$\alpha = \beta, \varepsilon = 1\$。QGF 的

四元数 Fourier 变换形式为

$$H^a(u_1, u_2) = \exp(-2\pi^2\sigma^2[(u'_1 - U'_1)^2 + (u'_2 - U'_2)^2/\varepsilon^2]) \quad (38)$$

其中, \$(u'_1, u'_2)\$、\$(U'_1, U'_2)\$ 为 \$(u_1, u_2)\$、\$(U_1, U_2)\$ 与式(36)相似的转动形式,转动角度也为 \$\alpha\$。可见 QGF 的 QFT 形式也是由参数调整尺度、位置与形状的 Gaussian 函数。

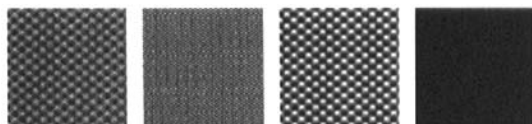
2 维实信号经 QGF 滤波的结果使得每一点成为由一个实部与 3 个虚部组成的四元数,滤波结果可以看作是原信号相应的频带有限的四元数解析信号(仅存在倍数上的差别)。因此对于待分析图像,可以将 QGF 的中心频率分别调整到信号的 QFT 频谱在第 1 象限的各频带的局部极值点,再把与各个滤波器对应的滤波结果作为原信号不同频带分量的四元数解析信号,进而应用本文的定义对信号进行时频分析。图像在分析前应进行零均值处理以消除直流分量的影响。取各个滤波器的尺度参数 \$\sigma = \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{\ln 2}{2}(U_1^2 + U_2^2)}\$^[9]。

应用 QGF 对 2 维乘积型合成信号进行分析。如图 7 所示,取 2 维乘积型信号为

$$f(x_1, x_2) = f_{\text{high}}(x_1, x_2) + f_{\text{middle}}(x_1, x_2) \quad (39)$$

$$\text{其中, } \begin{cases} f_{\text{high}}(x_1, x_2) = \cos(60x_1) \cos(40x_2) \\ f_{\text{middle}}(x_1, x_2) = \cos(17x_1) \cos(14x_2) \end{cases}$$

使用两组 QCF 的滤波结果的实部与相应的频率计算,结果如图 8 所示,可以看出应用本文的定义对乘积型信号的瞬时频率求取也有良好的试验结果。由于滤波器的边界效应使得计算结果在边界部分存在一定的误差。



(a) 合成信号 (b) 高频分量 (c) 中频分量 (d) QFT 频谱图

图 7 合成乘积型信号与各频段分量及信号 QFT 频谱图

Fig. 7 Synthetic product-type texture, its components and the QFT spectrum

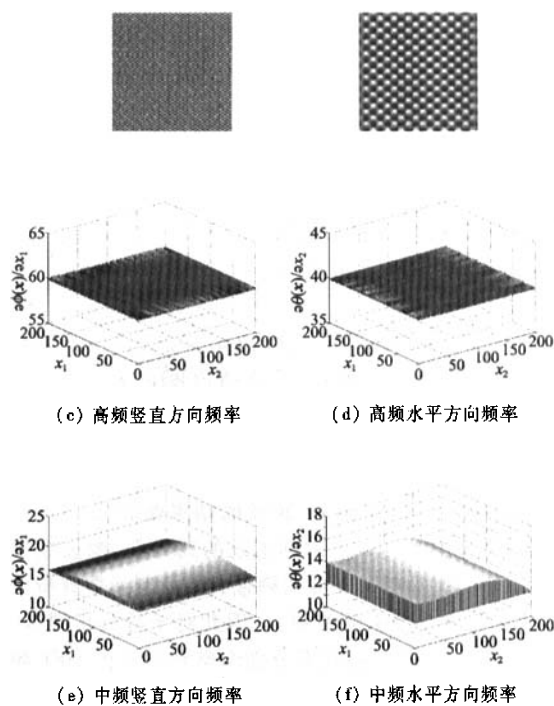


图 8 合成乘积型信号用本文定义的计算结果

Fig. 8 Experimental results of fig. 7(a) computed by our phase definition

6 结 论

根据四元数解析信号的自身特点提出了一种新的四元数解析信号相位定义,并引入 2 维 EMD 分解和四元数 Gabor 滤波器两种 2 维信号分解工具以验证本文定义在 2 维信号时频分析中的适用性。新定义具有更明确的分析意义,在提取原信号瞬时频率的同时还可以表达信号的累加可分离度。合成纹理与自然纹理的实验结果表明本文的四元数解析信号相位定义比原有的相位定义更符合信号的内在性质,在图像解析特征提取、图像检索、图像分割等方面拥有应用前景。

参考文献 (References)

- 1 Leon Cohen. Time-Frequency Analysis: Theory and Applications [M]. Upper Saddle River, NJ, USA; Prentice-Hall, 1995.
- 2 Bülow Th. Hypercomplex Spectral Signal Representations for the Processing and Analysis of Images [D]. Kiel, Germany; Christian Albrechts University, 1999.
- 3 Bülow Th, Sommer G. Hypercomplex signals—a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(11): 2844 ~ 2852.
- 4 Bülow Th, Sommer G. Quaternionic Gabor filters for local structure classification [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference of Image Processing [C], Brisbane, Australia, 1998: 808 ~ 810.
- 5 Havlicek J P, Harding D S, Bovik A C. The multicomponent AM-FM image representation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5(6): 1094 ~ 1100.
- 6 Huang N E, Shen Z, Long S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis [A]. In: Proceedings of Royal Society [C], London, 1998: 903 ~ 995.
- 7 Nunes J C, Bouaoune Y, Delechelle E, et al. Image analysis by bidimensional empirical mode decomposition [J]. Image and Vision Computing, 2003, 21(12): 1019 ~ 1026.
- 8 Brodatz P. Textures—A Photographic Album for Artists and Designers [DB]. New York: Dover Publications, 1966.
- 9 Bovik A C, Clark Marianna. Multichannel texture analysis using localized spatial filters [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(1): 55 ~ 73.