

非线性断裂理论基本问题的 精确分析解*

张良欣 范天佑

王文信

(北京理工大学材料科学研究中心, 北京 100081)

(海军勤务学院, 天津 300450)

摘要 用构造函数法对非线性断裂力学的基本问题——HRR 问题作了严格的分析, 给出了 H 问题与 RR 问题在数学上的等价性的证明, 用统一的方法构造其精确分析解, 证明了解的绝对一致收敛性和唯一性, 取前 3 项作为近似, 就得到优于 Hutchinson 数值解的结果, 同时第 1 次提供了 RR 问题应力分布的具体结果. 在 $N \rightarrow 1 (n \rightarrow 1)$ 情形, 此解还原为线性弹性解, 在 $N \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 情形, 此解还原为增量塑性理论中经典 Prandtl 场.

关键词 非线性 裂纹 构造函数法 分析解

本世纪 50 年代诞生的断裂力学, 最初是为了解决材料与结构的脆性破坏, 它在 60 年代取得重大的进展. 由于韧性-塑性材料的大量生产和使用, 对它们的破坏规律的研究, 很快突破了断裂力学最初的适用范围, 因而诞生了非线性断裂力学. 1968 年 Hutchinson^[1,2]和 Rice 与 Rosengren^[3]发表的硬化材料平面裂纹问题渐近分析的工作, 被称为 HRR 解. 这个解对于研究韧性-塑性材料中裂纹起始扩展问题的规律, 具有奠基性的作用, 因而被广泛引用, 它相当于非线性断裂力学关于裂纹起始扩展现象的基本问题. 受到当时分析工具的限制, Hutchinson, Rice 与 Rosengren 以及后来的许多研究者, 只给出了问题的数值解, 所用的方法为求解两点边值问题的 Runge-Kutta 法, 而对 HRR 问题更深层次的解析研究, 始见于文献[4]. 解析方法看起来是比较复杂, 但它能得到由数值方法所不能得到的极为重要的结果, 仅仅从这一点上考虑, 它必要性就不容置疑.

本文发展了针对 H 方程和 RR 方程这一类半线性方程的构造函数法, 证明了平面应变情形下 H 方程与 RR 方程的等价性, 用构造函数法得到 H 问题与 RR 问题的精确分析解, 证明了该解的绝对一致收敛性和唯一性, 取本文分析解的前 3 项作为近似, 得到比 Hutchinson 数值解更优的应力分布结果, 同时第 1 次得到 RR 问题的应力分布结果. 由本文分析解, 自然而然得到在 $N \rightarrow 1 (n \rightarrow 1)$ 时精确解, 即 Williams 解(见文献[5], p. 170), 而文献[1,2]不可能得到这一结果, 文献[3]指出, 他们的方法在 $N \rightarrow 1$ 时失效. 用本文的方法在 $N \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 时, 自然而然地得到 Prandtl 场, 而文献[1~3]不可能得到这一结果. Prandtl 场是增量塑性理论中

1997-03-28 收稿, 1997-08-25 收修改稿

* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目

最著名的经典结果之一, 本文却用全量塑性理论以解析的形式严格地推导出来, 同时再次显示的解析方法的有效性.

1 RR 问题

Rice 与 Rosengren^[3]对不可压缩、幂硬化材料中裂纹顶端的渐近场作了分析, 该分析仅适合平面应变情形. 材料的硬化律设为

$$\tau = \tau_0(\gamma/\gamma_0)^N, \text{ 当 } \gamma > \gamma_0, \quad (1.1)$$

式中 τ 记为有效剪应力, γ 为有效剪应变, N 为硬化指数, $0 < N < 1$, τ_0 与 γ_0 代表材料的屈服剪应力与屈服剪应变. 对于 von Mises 材料, $\sigma_0 = \sqrt{3}\tau_0$, 其中 σ_0 代表拉伸屈服应力.

Rice 与 Rosengren 建议在裂纹顶端附近 Airy 应力函数取成如下形式

$$U(r, \theta) = \frac{(1+N)^2}{2+N} r^{(2+N)/(1+N)} f(\theta), \quad (1.2)$$

其中 (r, θ) 代表从裂纹顶端量起的极坐标, $f(\theta)$ 是一未知的待定函数.

由物理方程(1.1)、平衡方程、变形几何方程和材料的不可压缩条件, 可以得到(1.2)式中的函数 $f(\theta)$ 满足如下方程, 称它为 RR 方程:

$$f^{(4)}(\theta) + (\alpha^2 + \beta^2)f''(\theta) + \alpha^2\beta^2 f(\theta) + T(\theta) = 0. \quad (1.3)$$

由于篇幅的限制, 其他熟知的方程这里均未列出, α, β 以及 $T(\theta)$ 将在下面介绍.

对 I 型裂纹问题(图 1), 对称性条件为

$$f'''(0) = f'(0) = 0, \quad (1.4)$$

裂纹面上不受应力作用的条件归结为

$$f(\pi) = f'(\pi) = 0. \quad (1.5)$$

鉴于问题的方程(1.3)和边界条件(1.4)、(1.5)是齐次的, 为确定起见, 增加一个归一化条件

$$f(0) = 1. \quad (1.6)$$

方程(1.3)中的系数 α, β 以及非线性项 $T(\theta)$ 分别为

$$\alpha^2 + \beta^2 = N(7N+3)/(1+N)^2, \quad (1.7)$$

$$\alpha^2\beta^2 = N^2(1+2N)(2+N)/(1+N)^4, \quad (1.8)$$

$$T(\theta) = (1-N)\{16N^2f''f^2/(1+N)^2 + 4N(1+2N)f'^2h/(1+N)^3 + 4h(f'f'')'/(1+N) + h'^2h/(1+N) + 2Nf'H'/(1+N)^2 + h'H'/(1+N) + (1-3N)H'^2h/[4N(1+N)H]\}/D(\theta), \quad (1.9)$$

在(1.9)式中采用了如下缩写记号

$$h(\theta) = (1+N)f'' + N(2+N)f/(1+N), \quad (1.10)$$

$$H(\theta) = h^2(\theta) + 4f'^2, \quad (1.11)$$

$$D(\theta) = h^2(\theta) + 4Nf^2. \quad (1.12)$$

求方程(1.3)在边界条件(1.4)~(1.6)式下的解, 简称为 RR 问题. 文献[3]用数值方法(Runge-Kutta 法)求解了问题(1.3)~(1.6)式, 但是没有公布过应力分布的结果, 该文献还指出, 在 $N \rightarrow 1$ 时他们的解失去意义. 自然在 $N \rightarrow 0$ 时, 他们也不可能求得相应的解.

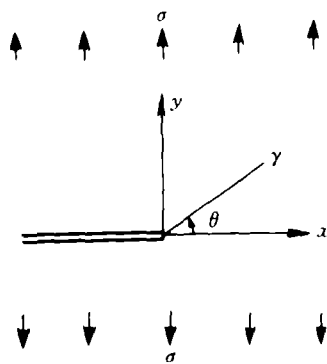


图 1 I 型裂纹问题

2 H 问题, H 方程与 RR 方程的等价性

Hutchinson^[1,2]考虑略去弹性变形后的下列本构定律

$$\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} = \frac{3}{2} \alpha \epsilon_0 \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) / \sigma_0, \quad (2.1)$$

其中 n 表示一维拉伸应力-应变关系 $\epsilon/\epsilon_0 = (\sigma/\sigma_0) + \alpha(\sigma/\sigma_0)^n$ 中的指数, 它也称为硬化指数, 并且 $1 < n < \infty$, α 称为硬化系数, σ_0 与 ϵ_0 分别记材料的拉伸屈服应力与屈服应变, σ_e 代表有效应力.

在裂纹顶端附近, Hutchinson 引进下列应力函数

$$\Psi(r, \theta) = Kr^{(1+2n)/(1+n)} \psi(\theta), \quad (2.2)$$

其中 K 是待定常数, (r, θ) 的意义与前面所说相同, $\psi(\theta)$ 是一与角度有关的函数, 待定.

由本构方程(2.1)以及平衡方程、变形几何关系等基本方程, 发现(2.2)式中的 $\psi(\theta)$ 满足如下关系, 这里仅讨论平面应变情形:

$$\begin{aligned} & [(\partial^2/\partial\theta^2) - n(s-2)\{n(s-2)+2\}][\bar{\sigma}_e^{n-1}\{s(2-s)\psi + \psi''\}] + \\ & 4(s-1)\{n(s-2)+1\}(\bar{\sigma}_e^{n-1}\psi')' = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

我们称此方程为 H 方程, 它满足下列边界条件

$$\psi'(0) = \psi'''(0) = 0, \quad (2.4)$$

$$\psi(\pi) = \psi'(\pi) = 0, \quad (2.5)$$

和归一化条件

$$\psi(0) = c, \quad (2.6)$$

其中 c 为一正的常数, 它由条件

$$(\bar{\sigma}_e(\theta))_{\max} = 1 \quad (2.6')$$

确定, 另外

$$\begin{aligned} s &= (2n+1)/(n+1), \\ \bar{\sigma}_e(\theta) &= \{(3/4)(\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\theta\theta})^2 + 3\bar{\sigma}_{r\theta}^2\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

方程(2.3)在边界条件(2.4)~(2.6)式下求解, 我们称它为 H 问题. Hutchinson^[1,2]以及其后的研究者, 对问题作了系统的数值分析, 使用的是 Runge-Kutta 法.

由于 RR 假设的应力函数(1.2)式与 H 假设的应力函数(2.2)式导致裂纹顶端前缘的应力和应变对于坐标 r 具有相同的奇异性, 因而这两个解被共同称为 HRR 解. 因为他们是用数值方法确定 $f(\theta)$ 与 $\psi(\theta)$ 的, 究竟它们之间具有什么关系, 一直不很清楚. 由于这两个函数对研究裂纹前缘的场变量关系密切, 对它们的性质作深入的研究是有意义的.

本文的研究表明, 不仅这两个解对于坐标 r 具有相同的结构, 而且 $f(\theta)$ 与 $\psi(\theta)$ 在本质上是等价的. 这一结果写成如下引理.

引理 1 方程(2.3)与(1.3)等价.

证 因为 $n = 1/N$, 所以

$$n(s-2)[n(s-2)+2] = -\frac{1+2N}{(1+N)^2},$$

$$s(2-s) = \frac{N(2+N)}{(1+N)^2},$$

$$(s-1)[n(s-2)+1] = \frac{N}{(1+N)^2}.$$

把这些式子代入(2.3)式得到

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{1+2N}{(1+N)^2} \right] \left\{ \bar{\sigma}_e^{(1-N)/N} \left[\frac{N(2+N)}{(1+N)^2} \psi + \psi'' \right] \right\} + \frac{4N}{(1+N)^2} \left[\bar{\sigma}_e^{(1-N)/N} \psi' \right]' = 0. \quad (2.8)$$

若 $f(\theta)$ 是 RR 问题的解, $\psi(\theta)$ 是 H 问题的解, 并且这两个解相似, 由(1.6)与(2.6)式则有

$$\left. \begin{aligned} \psi(\theta) &= cf(\theta), \\ \frac{N(2+N)}{(1+N)^2} \psi + \psi'' &= \frac{c}{1+N} h(\theta), \\ \sigma_e(\theta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c}{1+N} \sqrt{h^2(\theta) + 4[f'(\theta)]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

这里 $h(\theta)$ 由(1.10)式定义.

把(2.9)式中的第 1 与第 2 式代入(2.8)式, 得

$$\frac{(1-N)(1-2N)}{N^2} (\bar{\sigma}_e')^2 h + \frac{1-N}{N} \bar{\sigma}_e \bar{\sigma}_e'' h + \frac{2(1-N)}{N} \bar{\sigma}_e \bar{\sigma}_e' h' + \bar{\sigma}_e^2 h'' + \frac{1+2N}{(1+N)^2} \sigma_e^2 h + \frac{4N}{1+N} \left[\frac{1-N}{N} \bar{\sigma}_e f' + \bar{\sigma}_e^2 f'' \right]' = 0.$$

把(2.9)式中的第 3 式以及其导数 $\bar{\sigma}_e', \bar{\sigma}_e''$, 代入上面的方程得到

$$\begin{aligned} f^{(4)} + \frac{N(2+N)}{(1+N)^2} f'' + \frac{N}{h^2 + 4Nf'^2} \left\{ \frac{1}{(1+N)^2} \left[4Nf'' + \frac{1+2N}{1+N} h \right] [h'' + 4f'^2] + \right. \\ \left. \frac{4(1-N)}{(1+N)^2} f' [hh' + 4f'f''] + \frac{1-N}{N(1+N)} [3hh'^2 + 8h'f'f'' + 4h(f'^2 + f'f''')] \right\} + \\ \left. \frac{(1-N)(1-3N)}{N^2(1+N)} \frac{h}{h^2 + 4f'^2} [hh' + 4f'f'']^2 \right\}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

此式即文献[3]中的方程(15), 说明(2.3)式与它等价.

引理 2 方程(2.10)与(1.3)等价.

证 把(1.7)~(1.12)式代入(1.3)式, 经过简单的运算即可化成(2.10)式.

以上两引理表明 H 方程(2.3)与 RR 方程(1.3)等价.

3 用构造函数法求 HRR 问题的分析解

第 2 节证明了 H 方程与 RR 方程等价, 这两个问题的唯一差别仅在于边界条件(1.6)与(2.6)式不同. 如果我们能得到 RR 问题的分析解, 也就自然而然得到了 H 问题的分析解, 这样仅需要对这两个问题中的任何一个求解即可. 以下对 RR 问题求解. 从本质上讲, 这一求解过程见于文献[4], 现在作了简化与改进, 所得结果写成如下定理.

定理 1 RR 问题, 即两点边值问题(1.3)~(1.6)式的解是下列圆函数

$$f(\theta) = (1 - C)\cos(\alpha\theta) + C\cos(\beta\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} t_k [\cos_k(\alpha\theta) - \cos_k(\beta\theta)], \quad (3.1)$$

其中

$$\cos_k(x\theta) = \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{(\alpha^2 - \beta^2)x^{(2k+2)}} \left[\cos(x\theta) \sum_{p=0}^{k+1} \frac{(-1)^p (x\theta)^{2p}}{(2p)!} \right], \quad (3.2)$$

$$t_p = \frac{1}{(2p)!} \left. \frac{\partial^{2p} T(\theta)}{\partial \theta^{2p}} \right|_{\theta=0}, \quad (3.3)$$

另外解 $f(\theta)$ 也可以表示成

$$f(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p \theta^{2p}, \quad (3.4)$$

其中

$$f_0 = 1, \quad (3.5)$$

$$f_1 = -(1/2)[(1 - C)\alpha^2 + C\beta^2], \quad (3.6)$$

$$f_{p+2} = -\frac{(\alpha^2 + \beta^2)f_{p+1}}{A_{2p+4}^2} - \frac{\alpha^2 \beta^2 f_p}{A_{2p+2}^2} - \frac{t_p}{A_{2p-4}^2}. \quad (3.7)$$

$$A_m^p = m(m-1)(m-2)\cdots(m-p+1), \quad (3.8)$$

t_p 由(3.3)式给出, C 是一个常数, 由边界条件(1.5)确定.

这个定理的证明较长, 为此引进如下引理.

引理 3 Cauchy 问题(1.3)、(1.4)、(1.6)与(3.6)式的解是圆函数(3.1)式.

证 记 $f(\theta)$ 为 $x_1(\theta)$, 那么 Cauchy 问题(1.3)、(1.4)、(1.6)与(3.6)式与下列 Cauchy 问题等价:

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = x_3; \quad x'_3 = x_4; \quad x'_4 = \alpha^3 \beta^2 x_1 - (\alpha^2 + \beta^2)x_3 - T(x_1, x_2, x_3, x_4);$$

$$x_1(0) = 1; \quad x_2(0) = 0; \quad x_3 = 2f_1; \quad x_4(0) = 0.$$

由于 T 是 x_1, x_2, x_3 与 x_4 的解析函数, 根据常微分方程解的存在性与唯一性定理, 例如文献[5]p.1~11, 上述 Cauchy 问题在 $[0, 2\pi]$ 之间存在唯一的分析解如下:

$$x_1(\theta) = f(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p^* \theta^{2p}, \quad x_2(\theta) = f'(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} 2pf_p^* \theta^{2p-1},$$

$$x_3(\theta) = f''(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p}^2 f_p^* \theta^{2p-2}, \quad x_4(\theta) = f'''(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p}^3 f_p^* \theta^{2p-3},$$

其中系数 f_p^* 用构造函数法得出并且和由公式(3.5)~(3.7)给出的 f_p 相等. 这表明圆函数(3.1)式是 Cauchy 问题(1.3)、(1.4)、(1.6)和(3.6)式的解, 引理得证.

引理 4 圆函数(3.1)式在区间 $[0, 2\pi]$ 上绝对一致收敛.

证 记 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $x_0 = (1, 0, 2f_1, 0)^T$, $\varphi = (x_2, x_3, x_4, -\alpha^2 \beta^2 x, -(\alpha^2 - \beta^2)x - T)^T$, 那么 Picard 序列为

$$\lambda_0(\theta) = x_0,$$

$$\lambda_p(0) = x_0 + \int_0^{2\pi} \varphi(\theta, \lambda_{p-1}) d\theta, \quad p = 1, 2, \dots$$

由这个 Picard 序列, 不难证明函数(3.1)式在 $[0, 2\pi]$ 上绝对一致收敛. 证明的细节略去.

定理 1 的证 由引理 1 可知, 圆函数(3.1)式是 Cauchy 问题(1.3)、(1.4)、(1.6)和(3.6)式的解, 引用(1.7)、(1.8)和(3.2)式可以发现函数(3.1)式满足边界条件(1.5)式, 这表明它既满足方程(1.3)又满足全部边界条件, 所以它是 RR 问题(即问题(1.3)~(1.6)式)的解, 引理 2 还表明解在给定的区间上绝对一致收敛.

定理 2 函数(3.1)式是问题(1.3)~(1.6)式的唯一解.

这个定理的证明也比较长, 我们先证明两条引理.

引理 5 代数方程组(1.5)等价于方程 $W(f_1) = 0$, 其中

$$W(f_1) = \left(\frac{-\cos(\alpha\pi)}{\cos(\alpha\pi) - \cos(\beta\pi)} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} t_k \left(\frac{\cos_k(\alpha\pi) - \cos_k(\beta\pi)}{\cos(\alpha\pi) - \cos(\beta\pi)} \right).$$

证 这里的证明仅仅是一些初等的计算, 因而细节略去.

引理 6 代数方程 $W(f_1) = 0$ 只有一个根.

证 要求 $\{t_k\}$ 有界, 必须有 $|f_1| < 1$. 经过简单的分析, 可以表明 $W(f_1)$ 的值主要由

$$\left(\frac{\cos_1(\alpha\pi) - \cos_1(\beta\pi)}{\cos(\alpha\pi) - \cos(\beta\pi)} \right)$$

决定, 这样可以找到一个适宜的正数 $\epsilon > 0$, 使得

$$f_1^* = N(N+2)(\epsilon+1)/[2(1+N)],$$

从而使下式成立

$$\operatorname{sgn}[W(0)W(f_1^*)] < 0.$$

按照 Bolzano-Cauchy 定理(例如文献[6], 第 1 卷, p. 160), $W(f_1) = 0$ 至少存在一个根, 同时由于

$$W'(f_1) = \sum_{k=0}^{\infty} t'_k \left(\frac{\cos_k(\alpha\pi) - \cos_k(\beta\pi)}{\cos(\alpha\pi) - \cos(\beta\pi)} \right)$$

我们得到

$$\operatorname{sgn}[W(f_1)] = \text{constant}.$$

这表明 $W(f_1)$ 在 $(-1, 1)$ 上仅存在一个根. 引理得证.

定理 2 的证 根据引理 4 与引理 5 可以知道方程(1.5)只有一个根 f_1 , 并且前面由构造函数法证明了(3.1)式为问题(1.3)~(1.6)式的解, 这样它就是此问题的唯一的解.

此外, 若存在另一个解 $f_* \in C^2_{[\pi, \pi]}$, 那么按照 Weierstrass 定理, 例如文献[6], 第 3 卷, p.

599, 人们有 $f_*(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{*,k} \theta^{2k}$.

虽然 $f_*(0) = 2f_{*,1}$, 可以得到一个形如(3.1)式的解, 同时 $f_{*,1}$ 也是方程 $W(x) = 0$ 的根. 然而, 由于 $W(x) = 0$ 只能有一个根, 这样

$$f_1 = f_{*,1},$$

这表明 $f_*(\theta)$ 正是解(3.1)式. 定理得证.

由于 H 问题在本质上与 RR 问题等价, 它的分析解可以用完全一样的方法得到.

4 数值结果

以上构造出来的 RR 解(以及类似的 H 解), 从数学上讲是完全严格的, 但这种分析解是

不是令人信服, 还要看由它得到的具体结果是否正确, 实践表明, 回答是肯定的. 作为一个例子, 取 $N = 1/3$, 用 RR 问题的解(3.1)式作数值计算. 无量纲的应力分量为

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) &= f(\theta), \\ \bar{\sigma}_{rr}(\theta) &= (1+N)\left[f(\theta) + \frac{1+N}{2+N}f''(\theta)\right], \\ \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) &= -\frac{1+N}{2+N}f'(\theta),\end{aligned}\quad (4.1)$$

把(3.1)代入上式, 其计算结果由图 2 所示, 计算中仅取了(3.1)式的前 3 项.

由于 Rice 与 Rosengren 在文献[3]以及其后从未公布过应力分量的计算结果, 本文的结果无法同原作者的结果作直接对比.

对 H 问题, 无量纲的应力分量由以下公式给出

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) &= \frac{n(2n+1)}{(n+1)^2}\psi(\theta), \\ \bar{\sigma}_{rr}(\theta) &= \frac{2n+1}{n+1}\psi(\theta) + \psi''(\theta), \\ \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) &= -\frac{n}{n+1}\psi'(\theta).\end{aligned}\quad (4.2)$$

根据 H 问题与 RR 问题的等价性, 解 $\psi(\theta)$ 可以由解 $f(\theta)$ 得到, 把这样得到的 $\psi(\theta)$ 代入(4.2)式. 针对 $n=3$ 的情形, 仅取前 3 项, 所得结果绘于图 3, 读者不难看出, 本文的前 3 项近似比文献[1, 2]的数值解还精确.

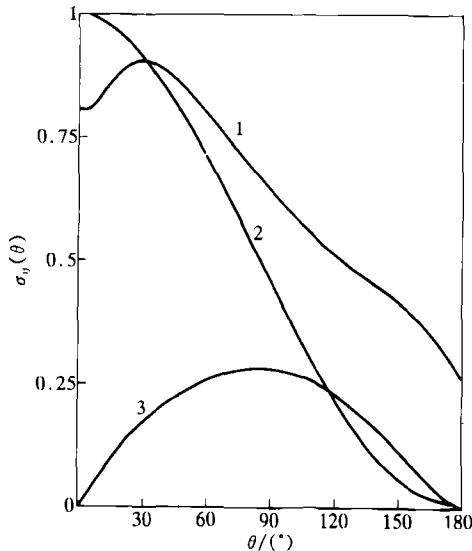


图 2 RR 问题的应力分布($N=1/3$)

1 为 $\bar{\sigma}_{rr}(\theta)$, 2 为 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta)$, 3 为 $\bar{\sigma}_{r\theta}(\theta)$

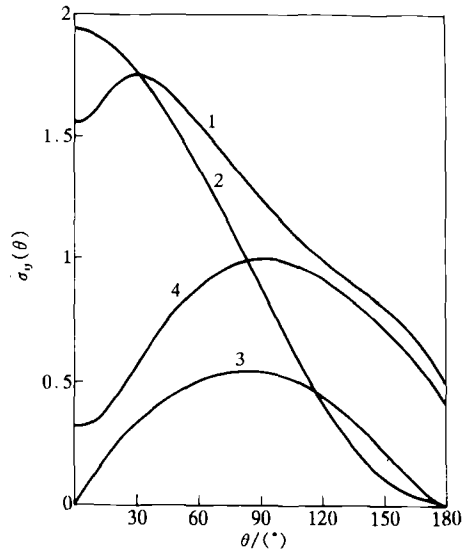


图 3 H 问题的应力分布($n=3$)

1 为 $\bar{\sigma}_{rr}(\theta)$, 2 为 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta)$, 3 为 $\bar{\sigma}_{r\theta}(\theta)$, 4 为 $\bar{\sigma}_{\phi\phi}(\theta)$

5 $N \rightarrow 1$ 与 $N \rightarrow 0$ 极限情形下的分析解

以上讨论是在 $0 < N < 1$ (或 $\infty > n > 1$) 限制下展开的. 原始的 HRR 解不可能概括 $N \rightarrow 1$

($n \rightarrow 1$) 和 $N \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 极限情形. 而本文的分析解却可以得到这两种情形下熟知的著名的解.

5.1 情形 $N \rightarrow 1$ ($n \rightarrow 1$)

定理 3 本文的解在 $N \rightarrow 1$ 时还原为 Williams 解.

证 在 $N \rightarrow 1$ 时, 本构方程退化成线性弹性应力-应变关系. 这种情形 $\alpha = 3/2, \beta = 1/2, t_k = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), 由方程(1.5), 得到 $C = 3/4$, 因而由(3.1)式得到

$$f(\theta) = \frac{1}{4} \cos \frac{3}{2} \theta + \frac{3}{4} \cos \frac{1}{2} \theta. \quad (5.1)$$

这正好是线性弹性裂纹问题的 Williams 解, Williams 解的详细推导见文献[7](p. 170). 由这个解, 自然得到线性弹性情形下裂纹问题的无量纲应力分量, 这里不再讨论.

5.2 情形 $N \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

定理 4 本文的解在 $N \rightarrow 0$ 时还原为增量塑性理论中的 Prandtl 解.

证 在 $N \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 时, 本构方程(1.1)退化成理想塑性的应力-应变关系, 这是全量塑性(Hencky)理论. 由(1.7)~(1.11)式, 与 $N \rightarrow 0$ 时, 我们有

$$\alpha_0 = \lim_{N \rightarrow 0} \alpha = 0, \beta_0 = \lim_{N \rightarrow 0} \beta = 0, \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \lim_{N \rightarrow 0} h = f'', H_0 = \lim_{N \rightarrow 0} H = f''^2 + 4f'^2, \\ D_0 &= \lim_{N \rightarrow 0} D = f''^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

另外, 由(2.7)式定义的有效应力 $\bar{\sigma}_e(\theta)$ 为

$$\sigma_e(\theta) = \left\{ \frac{3}{4} \left[-Nf - \frac{(1+N)^2}{2+N} f'' \right]^2 + 3 \left[-\frac{1+N}{2+N} f' \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (5.4)$$

$$\bar{\sigma}_{e0}(\theta) = \lim_{N \rightarrow 0} \bar{\sigma}_e(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{H_0}. \quad (5.5)$$

把(5.2)、(5.3)与(5.5)式代入方程(1.3)中得到

$$f^{(4)} + \left[4f''(f'f'')' + f'''^2 f'' + f'''(f''^2 + 4f'^2)' + \lim_{N \rightarrow 0} \frac{f'' H_0'^2}{4NH_0} \right] / f'' = 0.$$

上式经过整理变成

$$\frac{H_0''}{2} + \left(\frac{f'''}{f''} \right) H_0' + \lim_{N \rightarrow 0} \frac{H_0'^2}{4NH_0} = 0. \quad (5.6)$$

显然 $H_0(\theta) \equiv A$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 是方程(5.6)的一个解, 其中 A 为一待定常数. 事实上, 由于 $H_0(\theta) \equiv A, \bar{\sigma}_{e0}(\theta) = (\sqrt{3}/4) A^{1/2}$ 是常函数, 这里使用了关系(5.5)式. 这表明所研究的材料模型, 在现在的情形, 属于一种真正的理想塑性, 这样, 解 $H_0(\theta) \equiv A$ 是一个有意义的解.

由(5.3)式的第 4 式, 我们得到

$$f'^2 + 4f'^2 = A. \quad (5.7)$$

方程(5.7)的解为

$$\left. \begin{aligned} f_1(\theta) &= (\sqrt{A}/4) \cos(2\theta + B_1) + C_1, \\ f_2(\theta) &= (\sqrt{A}/2) \theta + D, \\ f_3(\theta) &= (-\sqrt{A}/4) \cos(2\theta + B_2) + C_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

这里 B_1, B_2, C_1, C_2, D 为积分常数, 待定.

由(5.8)式不难发现裂纹顶端附近的应力场由 3 个不同应力状态的塑性区组成:

第 1 区为一均匀应力区: $0 \leq \theta \leq \theta_1$, 应力函数 $f(\theta) = f_1(\theta)$;

第 2 区为一扇形区: $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, 应力函数 $f(\theta) = f_2(\theta)$;

第 3 区也是一个均匀应力区: $\theta_2 \leq \theta \leq \pi$, 应力函数 $f(\theta) = f_3(\theta)$;

其中 θ_1 与 θ_2 待定.

由归一化条件(1.6)式和边界条件(1.4)与(1.5)式发现 C_1 与 C_2 可以由 A 表示, $B_1 = B_2 = 0$, 这样应力函数 $f(\theta)$ 中仅含待定常数 A 与 D , 同时分区角度 θ_1 与 θ_2 待定. 它们将由分区的边界 $\theta = \theta_1$ 与 $\theta = \theta_2$ 处应力连续条件

$$\begin{aligned} [\bar{\sigma}_{rr}]_{\theta=\theta_1} &= [\bar{\sigma}_{\theta\theta}]_{\theta=\theta_1} = [\bar{\sigma}_{r\theta}]_{\theta=\theta_1} = 0, \\ [\bar{\sigma}_{rr}]_{\theta=\theta_2} &= [\bar{\sigma}_{\theta\theta}]_{\theta=\theta_2} = [\bar{\sigma}_{r\theta}]_{\theta=\theta_2} = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

确定, 其中 $[\]$ 表示物理量在跨过边界时发生的间断值. 经计算得到

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{3\pi}{4}, A = \left(\frac{4}{\pi+2}\right)^2, C_1 = \frac{\pi+1}{\pi+2}, C_2 = \frac{1}{\pi+2}, D = \frac{3\pi+2}{2(\pi+2)}. \quad (5.10)$$

把(5.10)式代入(5.8)式最终确定了无量纲应力函数

$$f(\theta) = \begin{cases} (1/(\pi+2))(\cos 2\theta - 1) + 1, & 0 \leq \theta \leq \pi/4, \\ -2/(\pi+2)\theta + (3\pi+2)/(2(\pi+2)), & \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4, \\ (1/(\pi+2))(1 - \cos 2\theta). & 3\pi/4 \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (5.11)$$

把(5.12)式代入(4.1)式得到无量纲应力分量, 把裂纹顶端前缘分成 3 个不同应力状态的局域, 即当 $0 \leq \theta \leq \pi/4$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}(\theta) &= (1/(\pi+2))(1 + \pi - \cos 2\theta), \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) &= (1/(\pi+2))(1 + \pi + \cos 2\theta), \\ \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) &= (1/(\pi+2))\sin 2\theta; \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

当 $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}(\theta) &= \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) = (1/(\pi+2))(1 + 3\pi/2 - 2\theta), \\ \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) &= 1/(\pi+2); \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

当 $3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}(\theta) &= (1/(\pi+2))(1 + \cos 2\theta), \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) &= (1/(\pi+2))(1 - \cos 2\theta), \\ \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) &= -(1/(\pi+2))\sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

显然, 在应力分量(5.13)~(5.15)式前乘上常数 $\sigma_0(\pi+2)/\sqrt{3}$ (σ_0 代表拉伸屈服极限)即精确地等于 Prandtl 场, 它是增量塑性力学中的著名的经典解, 定理证毕.

6 结论与讨论

本文构造出 RR 问题与 H 问题的角分布场的精确分析解. 并且仅仅取其前面的少数几项, 已经达到很高的精度, 这也表明这一分析解在应用上, 例如计算 J 积分, 很有用途.

从数学上严格地证明了 H 解与 RR 解的等价性. 它们之间存在的一些细小的差别是由于边界条件(1.6)与(2.6)不同而引起的, 给出了 H 解的 $\psi(\theta)$ 与 RR 解的 $f(\theta)$ 之间的相互转换关系, 得到统一处理.

原来的 HRR 数值解根本不可能处理 $N \rightarrow 1 (n \rightarrow 1)$ 和 $N \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 这两种极限情形. 而由本文的分析解却很自然地得到这两种极限情形下的精确解, 即还原为线性弹性裂纹问题的 Williams 解和完全塑性情形下的 Prandtl 解, 是对 HRR 理论的又一重大发展. 尤其用形变塑性(全量塑性)理论得到流动塑性(增量塑性)理论中著名的经典 Prandtl 场的解, 是很有意义的.

从数学上看, 方程(1.3)与(2.3)属于一类半线性微分方程. 半线性方程不仅在力学中, 在数学物理的其他分支中也出现. 目前这类方程在数学上尚无成熟的理论和解法, 因此开展这方面的研究工作也是很有意义的.

尽管构造这一分析解, 看起来比较复杂, 但它把对 HRR 理论的研究推进了一步. Runge-Kutta 法等数值方法在使用上比较初等, 但它不可能作出像本文构造法作出的新发现, 不可能在更深的层次上对理论作进一步的发掘. 这表明数值方法与解析方法只能互相补充, 而不能相互排斥. 近来孤立子理论的巨大发展, 再次显示了解析方法的重要性. 本文的构造函数法不仅用于求平面应变 HRR 问题的分析解取得了成功, 同时对平面应力情形也获得成功. 而且用于求解平面应力情形下幂硬化材料中裂纹稳态扩展这一非线性断裂力学难题也取得进展, 见文献[8]. 用它求得了线性硬化材料中裂纹稳态扩展问题的分析解.

参 考 文 献

- 1 Hutchinson J W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. J Mech Phys Solids, 1968, 16: 13~31
- 2 Hutchinson J W. Plane stress and strain fields at a crack tip. J Mech Phys Solids, 1968, 16: 337~347
- 3 Rice J R, Rosengren G F. Plane strain deformation near a crack in a power-law hardening material. J Mech Phys Solids, 1968, 16: 1~12
- 4 Wang W X, Fan T Y. Analytic solution of mode I crack in materials with nonlinear behaviour. Phil Mag Lett, 1994, 59: 215~222
- 5 张芷芬. 常微分方程的定性理论. 北京: 科学出版社, 1985
- 6 费赫金哥尔兹 Г М. 微积分学教程. 叶彦谦等译. 北京: 人民教育出版社, 1964
- 7 范天佑. 断裂力学基础. 南京: 江苏科学技术出版社, 1978
- 8 范天佑, 张良欣, Sutton M A. 硬化材料中平面应力裂纹的稳态扩展. 科学通报, 1997, 42(13): 1 211~1 215