中国科学: 数学 2010 年 第 40 卷 第 8 期: 813～826
www.springerlink.com math.scichina.com

n 维 Anti-de Sitter 空间中类空超曲面的类时 Gauss 像的奇点

刘海明*, 苗佳晶

牡丹江师范学院数学系, 牡丹江 157000
E-mail: haiming0626@126.com, jiajing0407@126.com

收稿日期: 2010-02-22; 接受日期: 2010-07-08; * 通信作者
牡丹江师范学院科技青年项目 (批准号: QY200904) 资助项目

摘要 本文利用奇点理论研究了 n 维 Anti-de Sitter 空间中的类空超曲面, 介绍了类空超曲面的局部微分几何, 定义了类时 Anti-de Sitter Gauss 像及 Anti-de Sitter 高度函数, 并进一步的利用 Anti-de Sitter 高度函数族和流形间的切触理论研究了类时 Anti-de Sitter Gauss 像的几何意义及类空超曲面的通有性. 最后研究了类空超曲面的 AdS-Monge 型.

关键词 n 维 Anti-de Sitter 空间 类空超曲面 Anti-de Sitter Gauss 像 Legendrian 奇点

MSC (2000) 主题分类 53A35, 58C25, 58C27

1 引言

Anti-de Sitter 空间 (简称 AdS 空间) 是具有负的常截面曲率的 Lorentzian 空间型, 是理论物理学中一个很重要的研究对象. 在相对论中, AdS 空间是 Einstein 方程的真空解之一. 奇点理论在几何学中的应用研究已有大量成果 [1−6], 并且事实证明, 在研究各种不同的空间中的子流形的几何性质的过程中, 无论从局部还是从整体的角度来看, 奇点理论都是研究不同空间中浸入子流形几何性质的一个强有力工具. 研究表明, 奇点与几何之间的自然联系反应了子流形与某些模型 (即合适变换群作用下的不变量) 之间的切触关系. 近年来, 应用奇点理论对各类空间型中子流形几何性质的研究得到了飞速发展, 特别是 Izumiya 教授和裴东河教授等做出了很多理想的结果. 但利用奇点理论对 Ads 空间中浸入子流形的几何性质的研究却很少. Izumiya 等人 [2] 研究了双曲 Gauss 映射的奇点; Kong 和 Pei[3,4] 研究了四维 Minkowski 空间中的类时超曲面的 de Sitter Gauss 映射的奇点; Chen[5,6] 利用 Legendrian 奇点理论研究了三维 Anti-de Sitter 空间中的类空曲面, 证明了广义半欧式空间中的伪球之间的 Legendrian 对偶定理. 该定理在利用奇点理论研究伪球中的子流形的外在微分几何性质中起着至关重要的作用. 本文在以上工作的基础上, 利用奇点理论对 n 维 Anti-de Sitter 空间中类空超曲面的类时 Gauss 像的奇点做了类似的研究. 论文的结果可以看作是文献 [5] 的推广, 以及文献 [2–6] 中的部分理论的应用.

论文第一节介绍了类空超曲面的局部微分几何, 定义了类时 Anti-de Sitter Gauss 像. 在第二、三节, 定义了 Anti-de Sitter 高度函数, 研究了 Anti-de Sitter 高度函数族的性质并利用其性质从切触几何的角度考察了 TAdS-Gauss 像的几何意义. 最后两节研究了类空超曲面的通有性及其 AdS-Monge 型.

引用格式: Liu H M, Miao J J. Singularities of timelike Anti-de Sitter Gauss images of spacelike hypersurfaces in Anti-de Sitter n-space (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40(8): 813–826

2 n 维 Anti-de Sitter 空间中的类空超曲面的局部微分几何

这一节中, 我们主要介绍 n 维 Anti-de Sitter 空间中的类空超曲面的局部微分几何.

设 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mid x_i \in \mathbb{R}\,(i = 1, 2, \dots, n+1)\}$ 为一 $n+1$ 维向量空间. 对 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中任意向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ 和 $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$, 定义 x 和 y 的伪数量积为

$$\langle x, y\rangle = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_{n+1}y_{n+1}.$$

称空间 $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是指标为 2 的 $n+1$ 维半欧氏空间, 简记为 $\mathbb{R}^{n+1}_2$. 对于非零向量 $x \in \mathbb{R}^{n+1}_2$, 当 $\langle x, x\rangle > 0$、$\langle x, x\rangle = 0$、$\langle x, x\rangle < 0$ 时, 分别称向量 x 为类空向量、null 向量、类时向量. 对于任意两个向量 $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}_2$, 如果 $\langle x, y\rangle = 0$, 那么称 x 与 y 是伪正交的. 向量 $x \in \mathbb{R}^{n+1}_2$ 的模定义为 $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x\rangle|}$. 对 $\mathbb{R}^{n+1}_2$ 中任一向量 n 和一常数 c, 定义以 n 为伪法向量的超平面为:

$$HP(n, c) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_2 \mid \langle x, n\rangle = c\}.$$

如果向量 n 分别是类时向量, 类空向量或者 null 向量, 那么分别称 $HP(n, c)$ 是 Lorentzian 超平面, 指标为 2 的半欧氏超平面和 null 超平面. 定义 n 维 Anti-de Sitter 空间为:

$$H^n_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_2 \mid \langle x, x\rangle = -1\};$$

定义指标为 2 的 n 维单位伪球为:

$$S^n_2 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_2 \mid \langle x, x\rangle = 1\};$$

定义顶点在 a 的闭 nullcone 为:

$$\Lambda_a = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_2 \mid \langle x - a, x - a\rangle = 0\}.$$

对任意向量 $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^{n+1}_2$, 定义它们的伪向量积 $X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n$ 为

$$X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n = \begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 & \cdots & e_{n+1} \\ x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n+1} \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n+1} \end{vmatrix},$$

其中 $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_2$ 的标准基底, $X_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{n+1}), i = 1, 2, \dots, n$. 容易验证

$$\langle X_i, X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n\rangle = \det(X_i, X_1, X_2, \dots, X_n) = 0.$$

因此, $X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n$ 与每一个 $X_i\,(i = 1, 2, \dots, n)$ 都是伪正交的. 有了前面的准备工作, 下面我们来介绍 n 维 Anti-de Sitter 空间中的类空超曲面的局部微分几何. 设 $X : U \longrightarrow H^n_1$ 是一个嵌入映射, 其中 $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 是一个开集, 则 $M = X(U)$ 在嵌入意义下与 U 等同. 如果对任意的 $u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U$, 每个 $X_{u_i}(i = 1, 2, \dots, n-1)$ 都是类空的, 那么称 X 是类空嵌入, 此时称曲面 $M = X(u)$ 是类空超曲面. 在本文中, 我们约定 $M = X(u)$ 是 H^n_1 中的类空超曲面. 定义一个单位向量

$$N(u) = \frac{X(u) \wedge X_{u_1} \wedge X_{u_2} \wedge \cdots \wedge X_{u_{n-1}}}{\|X(u) \wedge X_{u_1} \wedge X_{u_2} \wedge \cdots \wedge X_{u_{n-1}}\|}.$$

根据伪向量积的定义, 有 $\langle N(u), X_{u_i}\rangle \equiv \langle N(u), X\rangle \equiv 0$, 其中 $i=1,\dots,n-1$. 这表明 $X(u), N(u) \in N_pM$ 且相互伪正交. 其中 $u=(u_1,\dots,u_{n-1})$, $p=X(u)\in M$. 由于 $X(u)\in H^n_1$ 是类时向量, $X_{u_i}(i=1,\dots,n-1)$ 是类空向量, 所以 $N(u)$ 是类时向量且 $\langle N,N\rangle \equiv -1$. 类似于 Gauss 映射的定义, 我们可以定义映射

$$N: U \longrightarrow H^n_1, \quad u \mapsto N(u).$$

称 $N(u)$ 为类空超曲面 $M=X(U)$ 的类时 Anti-de Sitter Gauss 像, 简记为 TADS-Gauss 像. 利用 $\mathbb{R}^{n+1}_2$ 中的 Lorentz 超平面与 H^n_1 的交来定义 H^n_1 中的模型曲面 $AH(n,c)=H^n_1\cap HP(n,c)$. 如果 n 是类时向量, 则当 $\|n\|>|c|$ 时称 $AH(n,c)$ 为超 AdS- 双曲面. 特别地, 称 $AH(n,0)$ 为平坦的超 AdS- 双曲面.

下面, 我们研究 TADS-Gauss 像的性质和几何意义. 有下面命题.

命题 2.1 设 $X: U\longrightarrow H^n_1$ 为 n 维 Anti-de Sitter 空间中的类空超曲面. 如果 M 的类时 Anti-de Sitter Gauss 像 $N(u)$ 是常值, 那么类空超曲面 M 是平坦超 AdS- 双曲面的一部分.

证明 考察集合 $V=\{y\in\mathbb{R}^{n+1}_2 \mid \langle y,N\rangle=0\}$. 因为 M 的类时 Anti-de Sitter Gauss 像 $N(u)$ 是常值, 所以集合 $V=HP(N,0)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_2$ 中的 Lorentz 超平面, 又因为 $\langle X,N\rangle=0$ 且 $X(U)\subset H^n_1$, 所以 $X(U)\subset HP(N,0)=V$, 所以 $X(U)\subset V\cap H^n_1$.

计算易知 $N_{u_i}(i=1,\dots,n-1)$ 是类空超曲面 M 的切向量场. 利用这一性质, 我们可以定义线性变换 $W_p=-dN(u): T_pM\longrightarrow T_pM$, 称之为 $M=X(U)$ 在 $p=X(u)$ 点处的 Anti-de Sitter 形状算子. 用 $k_i(p)(i=1,\dots,n-1)$ 表示 W_p 的特征值. 定义 $M=X(U)$ 在 $p=X(u)$ 处的 Anti de Sitter Gauss-Kronecker 曲率 (简记为 AdS-G-K 曲率) 为

$$K_{\mathrm{AdS}}(u)=\det W_p=\prod_{i=1}^{n-1}k_i(p).$$

如果 $K_{\mathrm{AdS}}(u)=0$, 那么称点 $p=X(u)$ 是 $X: U\longrightarrow H^n_1$ 的 Anti-de Sitter 抛物点 (或 AdS- 抛物点). 如果 $p=X(u)$ 满足 $W_p=k(p)\mathrm{id}_{T_pM}$, 则称其为类空超曲面 M 的脐点. 如果 M 的所有点都是脐点, 则称 M 为全脐超曲面. 关于全脐超曲面, 我们有如下命题.

命题 2.2 如果 $M=X(U)$ 是全脐超曲面, 那么对 M 上任一点 p, Anti-de Sitter 形状算子 W_p 的特征值 $k(p)$ 为常数 k. 此时, 可对类空超曲面做如下分类:

(1) 若 $k\neq 0$, 则 M 是超 AdS- 双曲面 $HP(n,-1)\cap H^n_1$ 的一部分, 其中 $n=X+\frac{1}{k}N$ 是常值类时向量.

(2) 若 $k=0$, 则 M 是平坦的超 AdS- 双曲面 $HP(n,0)\cap H^n_1$ 的一部分, 其中 $n=N$ 是常值类时向量.

证明 利用 Anti-de Sitter 形状算子的定义, 有 $N_{u_i}=kX_{u_i}$ $(i=1,\dots,n-1)$. 计算得

$$N_{u_iu_j}=k_{u_j}X_{u_i}+kX_{u_iu_j}.$$

因为 $-N_{u_iu_j}=-N_{u_ju_i}$ 且 $kX_{u_iu_j}=kX_{u_ju_i}$, 所以 $k_{u_j}X_{u_i}=k_{u_i}X_{u_j}$. 又因为 $X_{u_1},\dots,X_{u_{n-1}}$ 线性无关, 所以 k 是常数.

首先考虑 $k\neq 0$ 的情形. 因为 $-N_{u_i}=kX_{u_i}$, 所以存在常向量 n 使得 $X=n-\frac{N}{k}$. 计算得

$$\langle n,n\rangle=\left\langle X+\frac{N}{k}, X+\frac{N}{k}\right\rangle=-1-\frac{1}{k^2}<0,\quad \langle X,n\rangle=\left\langle X, X+\frac{N}{k}\right\rangle=-1.$$

这表明 $M=X(U)\subset HP(n,-1)\cap H^n_1$.

若 $k=0$, 则 $N=n$. 根据命题 2.1 知, M 是平坦的超 AdS- 双曲面 $HP(n,0)\cap H_1^n$ 的一部分.

因为 $X_{u_1},\ldots,X_{u_{n-1}}$ 是类空向量, 所以对任意的 $u\in U$, 可以在类空超曲面 M 上定义 Riemannian 度量 $ds^2=\sum_{i,j=1}^{n-1}g_{ij}du_idu_j$ 和 Anti-de Sitter 第二类基本不变量 $h_{ij}(u)=\langle -N_{u_i}(u),X_{u_j}\rangle$, 其中 $g_{ij}(u)=\langle X_{u_i},X_{u_j}\rangle$. 这样, 可以得到下面的 Anti-de Sitter Weingarten 公式.

命题 2.3 设 $X:U\longrightarrow H_1^n$ 为 n 维 Anti-de Sitter 空间中的类空超曲面, $N(u)$ 是 M 的类时 Anti-de Sitter Gauss 像, 那么有下面的 Anti-de Sitter Weingarten 公式

$$N_{u_i}=-\sum_{j=1}^{n-1}h_i^jX_{u_j},$$

其中 $(h_i^j)=(h_{ik})(g^{kj})$, $(g^{kj})=(g_{kj})^{-1}$ 是 $n-1$ 阶可逆矩阵.

证明 因为对任意点 $u=(u_1,\cdots,u_{n-1})\in U$, 在局部上 $X,N,X_{u_1},\ldots,X_{u_{n-1}}$ 构成了 $T_p\mathbb{R}_2^{n+1}$ 的基底, 所以存在 α,β,λ_i^j 使得 $N_{u_i}=\alpha X+\beta N+\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_i^jX_{u_j}$. 因为 $\langle N,X\rangle=0,\langle N,X_{u_i}\rangle=0,\langle N,N\rangle=-1$, 所以

$$0=\langle N_{u_i},X\rangle=-\alpha,\quad 0=\langle N_{u_i},N\rangle=-\beta.$$

所以

$$N_{u_i}=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_i^jX_{u_j}.$$

利用定义得

$$-h_{ik}=\langle N_{u_i},X_{u_k}\rangle=\sum_{l=1}^{n-1}\lambda_i^lg_{lk}.$$

所以

$$-h_i^j=-\sum_{k=1}^{n-1}h_{ik}g^{kj}=\lambda_i^j.$$

作为上面命题的推论, 可以得到 Anti-de Sitter Gauss-Kronecker 曲率公式.

推论 2.4 在前一个命题的条件和记号下, 有

$$K_{\rm AdS}=\frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{\alpha\beta})}.$$

证明 利用 AdS-Weingarten 公式得 Anti-de Sitter 形状算子关于基底 $X_{u_1},\ldots,X_{u_{n-1}}$ 的表示矩阵为 $(h_i^j)=(h_{ik})(g^{kj})$. 所以

$$K_{\rm AdS}={\rm det}W_p=\det(h_i^j)=\det(h_{ik})(g^{kj})=\frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{\alpha\beta})}.$$

3 类空超曲面的类时高度函数及其性质

在这一部分, 我们在类空超曲面 M 上定义类时高度函数族并利用它的性质进一步研究类时 Anti-de Sitter Gauss 像的奇点.

定义 M 上的类时 Anti-de Sitter 高度函数族为

$$H:U\times H_1^n\longrightarrow\mathbb{R},\quad H(u,v)=\langle X(u),v\rangle,$$

记 $h_{v_0}(u)=H(u,v_0)$ 在点 u_0 处的 Hessian 矩阵为 $\mathrm{Hess}(h_{v_0})(u_0)$. 可以得到如下命题:

命题 3.1 设 $M=X(U)$ 是 H_1^n 中的类空超曲面, $H:U\times H_1^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 M 上的 AdS- 高度函数. 则有

(1) $H(u,v)=\frac{\partial H}{\partial u_i}(u,v)=0$ $(i=1,\dots,n-1)$ 当且仅当 $v=\pm N(u)$;

(2) 设 $v_0=N(u_0)$, 则 $\mathrm{detHess}(h_{v_0})(u_0)=0$ 当且仅当 $K_{\mathrm{AdS}}(u_0)=0$.

证明 (1) 因为可以将 $\{X,N,X_{u_1},\dots,X_{u_{n-1}}\}$ 看成向量空间 $T_p\mathbb{R}_2^{n+1}$ 的基底, 其中 $p=X(u)$, 所以存在实数 $\lambda,\eta,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ 使得 $v=\lambda X+\eta N+\alpha_1X_{u_1}+\cdots+\alpha_{n-1}X_{u_{n-1}}$. 因此 $H(u,v)=0$ 当且仅当 $\lambda=\langle X(u),v\rangle=0$. 因为 $0=\frac{\partial H}{\partial u_i}(u,v)=\langle X_{u_i},v\rangle=\sum_{j=1}^{n-1}g_{ij}\alpha_i$ 且 (g_{ij}) 是非退化的, 所以 $\alpha_i=0$ $(i=1,\dots,n-1)$, 这样 $v=\eta N$. 因为 $v\in H_1^n$, 所以 $\langle v,v\rangle=-1$. 计算易得 $\eta=\pm1$.

(2) 由定义, 得

$$\mathrm{Hess}(h_{v_0})(u_0)=(\langle X_{u_iu_j},N(u_0)\rangle)=(-\langle X_{u_i}(u_0),N_{u_j}(u_0)\rangle).$$

利用 AdS-Weingarten 公式, 得

$$-\langle X_{u_i},N_{u_j}\rangle=\sum_{\alpha=1}^{n-1}h_i^\alpha\langle X_{u_\alpha},X_{u_j}\rangle=\sum_{\alpha=1}^{n-1}h_i^\alpha g_{\alpha j}=h_{ij}.$$

因此

$$K_{\mathrm{AdS}}=\frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{\alpha\beta})}=\frac{\mathrm{detHess}(h_{v_0})(u_0)}{\det(g_{\alpha\beta})(u_0)}.$$

这样, $\mathrm{detHess}(h_{v_0})(u_0)=0$ 当且仅当 $K_{\mathrm{AdS}}(u_0)=0$.

利用上面的命题, 我们可以讨论 AdS- 高度函数的奇点与类时 Anti-de Sitter Gauss 像的奇点之间的关系. 容易得到下面的推论.

推论 3.2 设 $H:U\times H_1^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 是类空超曲面 M 的 AdS- 高度函数且 N 是 TAdS-Gauss 像, $p=X(u)$. 则下面条件是等价的:

(1) 存在 $v\in H_1^n$, 使得 $p\in M$ 是 AdS- 高度函数 h_v 的退化奇点;

(2) 存在 $v\in H_1^n$, 使得 $p\in M$ 是 TAdS-Gauss 像 N 的奇点;

(3) $K_{\mathrm{AdS}}(u)=0$.

证明 利用定义知条件 (2) 和 (3) 是等价的. 由上面命题的结论 (2) 知条件 (1) 和 (3) 等价.

下面我们利用 Legendrian 奇点理论, 从生成族的角度把 TAdS-Gauss 像解释为 Legendrian 映射. 为此, 我们需要介绍一些 Legendrian 奇点理论的基本概念和结论.

设 $F:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ 为一函数芽. 如果映射

$$\Delta^*F=\left(F,\frac{\partial F}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial q_k}\right):(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k,0)$$

是非奇异的, 则称 F 是 Morse 族, 其中 $(q,x)=(q_1,\dots,q_k,x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)$. 此时, 存在一个光滑的 $(n-1)$- 维子流形,

$$\Sigma_*(F)=\left\{(q,x)\in(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\mid F(q,x)=\frac{\partial F}{\partial q_1}=\cdots=\frac{\partial F}{\partial q_k}=0\right\}.$$

定义映射芽 $\Phi_F:(\Sigma_*(F),0)\longrightarrow PT^*\mathbb{R}^n$ 为

$$\Phi_F(q,x)=\left(x,\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(q,x):\cdots:\frac{\partial F}{\partial x_n}(q,x)\right]\right).$$

则 Φ_F 是 Legendrian 浸入芽. 这样有 Arnold[1] 和 Zakalyukin[7] 的重要定理成立.

定理 3.3[1,7] $PT^*\mathbb{R}^n$ 中的所有 Legendrian 子流形均可按上述方法构造.

我们称 F 是 $\Phi_F(\Sigma_*F)$ 的生成族. 与之相对应的波前集为

$$W(\Phi_F)=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists\, q\in\mathbb{R}^k \text{ 使得 } F(q,x)=\frac{\partial F}{\partial q_1}=\cdots=\frac{\partial F}{\partial q_k}=0\right\}.$$

有时也记 $D_F=W(\Phi_F)$, 并称其为 F 的判别式集. 定义映射

$$\mathcal{L}:U\longrightarrow\Delta,\quad \mathcal{L}(u)=(X(u),N(u)),$$

其中 $\Delta=\{(v,w)\mid\langle v,w\rangle=0\}\subset H_1^n\times H_1^n$. 因为 $\langle X(u),N(u)\rangle=\langle dX(u),N(u)\rangle=0$, 所以 $\mathcal{L}$ 是 Legendrian 浸入. 设 $X(u)=(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$, $N(u)=(v_1,v_2,\dots,v_{n+1})$. 定义映射

$$\mathcal{N}:U\longrightarrow PT^*(H_1^n),\quad \mathcal{N}(u)=(N(u),[(x_1v_2-x_2v_1):(-x_1v_3+x_3v_1):\cdots:(-x_1v_{n+1}+x_{n+1}v_1)]).$$

应用上面的理论, 有如下定理.

定理 3.4 AdS- 高度函数 $H:U\times H_1^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 是超曲面 $(h_v)^{-1}(0)_{v\in H_1^n}$ 的 Morse 族.

证明 对任意的 $v=(v_1,v_2,\dots,v_{n+1})\in H_1^n$, 有 $v_1\neq 0$ 或 $v_2\neq 0$. 不失一般性, 假设 $v_1>0$, 那么 $v_1=\sqrt{1+v_3^2+\cdots+v_{n+1}^2-v_2^2}$. 因此

$$H(u,v)=-x_1(u)\sqrt{1+v_3^2+\cdots+v_{n+1}^2-v_2^2}-x_2(u)v_2+x_3(u)v_3+\cdots+x_{n+1}(u)v_{n+1},$$

其中 $X(u)=(x_1(u),x_2(u),\dots,x_{n+1}(u))$. 我们只需证明映射

$$\Delta^*H=\left(H,\frac{\partial H}{\partial u_1},\dots,\frac{\partial H}{\partial u_{n-1}}\right)$$

在任一点处都是非奇异的. 由于 Δ^*H 的 Jacobian 矩阵为 $(A\,B)$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}\langle X_{u_1},v\rangle & \langle X_{u_2},v\rangle & \cdots & \langle X_{u_{n-1}},v\rangle\\ \langle X_{u_1u_1},v\rangle & \langle X_{u_1u_2},v\rangle & \cdots & \langle X_{u_1u_{n-1}},v\rangle\\ \langle X_{u_2u_1},v\rangle & \langle X_{u_2u_2},v\rangle & \cdots & \langle X_{u_2u_{n-1}},v\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle X_{u_{n-1}u_1},v\rangle & \langle X_{u_{n-1}u_2},v\rangle & \cdots & \langle X_{u_{n-1}u_{n-1}},v\rangle\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}x_1\frac{v_2}{v_1}-x_2 & -x_1\frac{v_3}{v_1}+x_3 & \cdots & -x_1\frac{v_{n+1}}{v_1}+x_{n+1}\\ x_{1u_1}\frac{v_2}{v_1}-x_{2u_1} & -x_{1u_1}\frac{v_3}{v_1}+x_{3u_1} & \cdots & -x_{1u_1}\frac{v_{n+1}}{v_1}+x_{(n+1)u_1}\\ x_{1u_2}\frac{v_2}{v_1}-x_{2u_2} & -x_{1u_2}\frac{v_3}{v_1}+x_{3u_2} & \cdots & -x_{1u_2}\frac{v_{n+1}}{v_1}+x_{(n+1)u_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{1u_{n-1}}\frac{v_2}{v_1}-x_{2u_{n-1}} & -x_{1u_{n-1}}\frac{v_3}{v_1}+x_{3u_{n-1}} & \cdots & -x_{1u_{n-1}}\frac{v_{n+1}}{v_1}+x_{(n+1)u_{n-1}}\end{pmatrix}.$$

我们只需证明方阵 B 的行列式在 $(u,v)\in\Delta^*H^{-1}(0)$ 处不等于 0.

此时 $v=N(u)$, 记 $b_i=(x_i,x_{iu_1},\dots,x_{iu_{n-1}})^T$, 其中 $i=1,2,\dots,n+1$. 则

$$\det B=-\frac{v_1}{v_1}\det(b_2,b_3,\dots,b_{n+1})+\frac{v_2}{v_1}\det(b_1,b_3,\cdots,b_{n+1})+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{v_{n+1}}{v_1}\det(b_1,b_2,\dots,b_n).$$

另一方面,

$$X \wedge X_{u_1} \wedge X_{u_2} \wedge \cdots \wedge X_{u_{n-1}} = (-\det(b_2, b_3, \ldots, b_{n+1}), \det(b_1, b_3, \ldots, b_{n+1}), \det(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}),$$
$$\ldots, (-1)^{n+2}\det(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)).$$

所以

$$\begin{aligned}\det B &= \left\langle \left(-\frac{v_1}{v_1}, -\frac{v_2}{v_1}, \ldots, -\frac{v_{n+1}}{v_1} \right), (X \wedge X_{u_1} \wedge \cdots \wedge X_{u_{n-1}}) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{v_1}\langle N, \|X \wedge X_{u_1} \wedge \cdots \wedge X_{u_{n-1}}\| N\rangle \\ &= \frac{\|X \wedge X_{u_1} \wedge \cdots \wedge X_{u_{n-1}}\|}{v_1} \neq 0.\end{aligned}$$

下面简要介绍一下有关切触理论的基本概念和结论, 具体内容请参考文献 [8]. 设 $\pi : PT^*M \longrightarrow M$ 是 n 维流形 M 上的射影余切丛. 可将该纤维丛看成空间 PT^*M 上具有典型切触结构 K 的 Legendrian 纤维丛. 考虑切丛映射 $\tau : TPT^*M \longrightarrow PT^*M$ 和 π 的微分映射 $d\pi : TPT^*M \longrightarrow TM$. 对任意 $X \in TPT^*M$, 存在一个元素 $\alpha \in T^*M$ 使得 $\tau(X) = [\alpha]$. 对某一元素 $V \in T_xM$, $\alpha(V) = 0$ 与代表元 $[\alpha]$ 的选取无关. 因此, 可以在 PT^*M 上定义典型的切触结构

$$K = \{X \in TPT^*M \mid \tau(X)(d\pi(X)) = 0\}.$$

对流形 M 上任一点的一个坐标邻域 $(U, (x_1, \ldots, x_n))$, 有平凡化

$$PT^*U \cong U \times P(\mathbb{R}^{n-1})^*.$$

称 $((x_1, \cdots, x_n), [\xi_1 : \cdots : \xi_n])$ 是 PT^*U 的齐次坐标, 其中 $[\xi_1 : \cdots : \xi_n]$ 是对偶射影空间 $P(\mathbb{R}^{n-1})^*$ 的齐次坐标. 易知 $X \in K_{(x,\xi)}$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^n \mu_i\xi_i = 0$, 其中 $d\pi(X) = \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. 如果浸入映射 $i : L \longrightarrow PT^*M$ 对于 $q \in L$ 满足条件 $\dim L = n - 1$ 且 $di_q(T_qL) \subset K_{i(q)}$, 那么称其为 Legendrian 浸入, 称 $\pi \circ i$ 为 Legendrian 映射, $\pi \circ i$ 的象 $W(i)$ 为 i 的波前集, i (或 i 的象) 为 $W(i)$ 的提升.

Chen[5,6] 证明了广义半欧式空间中的伪球之间的 Legendrian 对偶定理, 该定理在利用奇点理论研究伪球中的子流形的外在微分几何性质中起着至关重要的作用. 下面我们来介绍这些结论, 并利用它们证明 H 是 $\mathcal{L}(U) \subset \Delta$ 的生成族. 考虑下面的二重纤维丛

$$\begin{aligned}&(1)\ H_1^n \times H_1^n \supset \Delta = \{(v, \omega) \mid \langle v, \omega\rangle = 0\};\\ &(2)\ \pi_1 : \Delta \longrightarrow H_1^n, \pi_2 : \Delta \longrightarrow H_1^n;\\ &(3)\ \theta_1 = \langle dv, \omega\rangle\ |_\Delta, \theta_2 = \langle v, d\omega\rangle\ |_\Delta\ .\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\pi_1(v, \omega) = v, \pi_2(v, \omega) = \omega;\\ &\langle dv, \omega\rangle = -\omega_1 dv_1 - \omega_2 dv_2 + \sum_{i=3}^{n+1} \omega_i dv_i;\\ &\langle v, d\omega\rangle = -v_1 d\omega_1 - v_2 d\omega_2 + \sum_{i=3}^{n+1} v_i d\omega_i.\end{aligned}$$

文献 [5, 6] 中的重要定理为

定理 3.5[5,6] 每个 $(\Delta, \theta_i)(i=1,2)$ 是切触流形且每个 $\pi_i\,(i=1,2)$ 都是 Legendrian 纤维丛.

利用上面定理, 可以证明如下命题

命题 3.6 对任意的类空超曲面 $X: U \longrightarrow H_1^n$, AdS- 高度函数 $H: U \times H_1^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 Legendrian 嵌入 $\mathcal{L}$ 的生成族.

证明 考察坐标域 $W_1^+ = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}) \in H_1^n \mid \omega_1 > 0\}$ 和定理 3.5 证明中的切触态射 $\Phi: \Delta(W_1^+) \longrightarrow PT^*H_1^n \mid W_1^+$. 因为 AdS- 高度函数 H 是 Morse 族, 因此有 Legendrian 浸入

$$\mathcal{L}_H: \Sigma_*(H) \mid (U \times W_1^+) \longrightarrow PT^*H_1^n \mid W_1^+, \mathcal{L}_H(u,v) = \left(\omega, \left[\frac{\partial H}{\partial \omega_2} : \frac{\partial H}{\partial \omega_3} : \cdots : \frac{\partial H}{\partial \omega_{n+1}}\right]\right).$$

利用命题 2.1, 得

$$\Sigma_*(H) = \{(u, N(u)) \in U \times H_1^n \mid u \in U\}.$$

因为 $\omega = N(u)$ 且 $\omega_1 = \sqrt{-\omega_2^2 + \omega_3^2 + \cdots + \omega_{n+1}^2 + 1}$, 所以

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_2}(u, N(u)) = -x_2(u) + x_1(u)\frac{v_2}{v_1},$$
$$\frac{\partial H}{\partial \omega_i}(u, N(u)) = x_i(u) - x_1(u)\frac{v_i}{v_1},$$

其中 $i = 3, \dots, n+1$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, $N = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$. 所以

$$\mathcal{L}_H(u, N(u)) = (N(u), [x_1v_2 - x_2v_1 : -x_1v_3 + x_3v_1 : \cdots : -x_1v_{n+1} + x_{n+1}v_1]) = \mathcal{N}(u).$$

所以在 W_1^+ 上, $\Phi \circ \mathcal{L}(u) = \mathcal{N}(u)$. 在其它坐标域上可类似进行证明. 所以 H 是 $\mathcal{L} \subset \Delta$ 的生成族.

上面命题说明 TAdS-Gauss 像 N 可以被看成 Legendrian 映射.

4 类空超曲面与平坦的超 AdS- 双曲面的切触

这一部分中, 我们将从切触几何的角度来考察 TAdS-Gauss 像的几何意义.

首先, 简要介绍一下流形之间的切触理论. 设 $X_i, Y_i, i = 1, 2$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的子流形并且满足条件 $\mathrm{dim}X_1 = \mathrm{dim}X_2$ 和 $\mathrm{dim}Y_1 = \mathrm{dim}Y_2$. 如果存在一个微分同胚芽 $\phi: (\mathbb{R}^n, y_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, y_2)$, 使得 $\phi(X_1) = X_2$ 和 $\phi(Y_1) = Y_2$, 那么称 X_1 和 Y_1 在 y_1 的切触型与 X_2 和 Y_2 在 y_2 的切触型相同, 记为 $\mathcal{K}(X_1, Y_1, y_1) = \mathcal{K}(X_2, Y_2, y_2)$. 可以将 $\mathbb{R}^n$ 替换为任意子流形. Montaldi[9] 利用奇点理论的术语对切触进行了如下刻画.

定理 4.1[9] 设 $X_i, Y_i, i = 1, 2$ 为空间 $\mathbb{R}^n$ 中的子流形并且满足条件 $\mathrm{dim}X_1 = \mathrm{dim}X_2$ 和 $\mathrm{dim}Y_1 = \mathrm{dim}Y_2$. 如果 $g_i: (X_i, x_i) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, y_i)$ 是浸入芽, $f_i: (\mathbb{R}^n, y_i) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ 是淹没芽且满足 $(Y_i, y_i) = (f_i^{-1}(0), y_i)$, 那么 $\mathcal{K}(X_1, Y_1, y_1) = \mathcal{K}(X_2, Y_2, y_2)$ 当且仅当 $f_1 \circ g_1$ 与 $f_2 \circ g_2$ 是 $\mathcal{K}$ 等价的.

有关 $\mathcal{K}$- 等价和 Legendrian 奇点理论的基本概念请参考文献 [1, 10].

考察函数 $\mathcal{H}: H_1^n \times H_1^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(u, v) = \langle u, v \rangle$. 对任意的 $v_0 \in H_1^n$, 记 $\mathfrak{H}_{v_0}(u) = \mathcal{H}(u, v_0)$, 则有平坦的超 AdS- 双曲面 $\mathfrak{H}_{v_0}^{-1}(0) = H_1^n \cap HP(v_0, 0) = AH(v_0, 0)$. 对任意的 $u_0 \in U$, 考虑类时向量 $v_0 = N(u_0)$, 则有

$$\mathfrak{H}_{v_0} \circ X(u_0) = \mathcal{H} \circ (X \times \mathrm{id}_{H_1^n})(u_0, v_0) = H(u_0, N(u_0)) = 0.$$

同时还有下面关系

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_{v_0}\circ X}{\partial u_i}(u_0)=\frac{\partial H}{\partial u_i}(u_0,N(u_0))=0,\quad i=1,\dots,n-1.$$

这表明平坦的超 AdS- 双曲面 $AH(v_0,0)$ 与类空超曲面 $M=X(U)$ 相切于点 $p=X(u_0)$.

此时, 称 $AH(v_0,0)$ 为 $M=X(U)$ 在点 $p=X(u_0)$(或 u_0) 处的切平坦的超 AdS- 双曲面, 表示为 $AH(X,u_0)$. 设 v_1,v_2 是类时向量. 如果 v_1 和 v_2 线性无关, 那么 $HP(v_1,0)$ 和 $HP(v_2,0)$ 相同. 因此平坦的超 AdS- 双曲面 $AH(v_1,0)=AH(v_2,0)$. 容易得到下面的引理.

引理 4.2 设 $X:U\longrightarrow H_1^n$ 是类空超曲面, 则 $N(u_1)=N(u_2)$ 当且仅当 $AH(X,u_1)=AH(X,u_2)$, 其中点 $u_1,u_2\in U$.

下面, 我们利用 Legendrian 奇点理论来研究类空超曲面 M 与平坦的超 AdS- 双曲面在 $p\in M$ 处的切触关系. 首先介绍 Legendrian 浸入芽之间的一种等价关系.

设 $i:(L,p)\longrightarrow(PT^*\mathbb{R}^n,p)$,$i':(L',p')\longrightarrow(PT^*\mathbb{R}^n,p')$ 为 Legendrian 浸入芽. 如果存在微分同胚芽 $H:(PT^*\mathbb{R}^n,p)\longrightarrow(PT^*\mathbb{R}^n,p')$ 使得 H 保持 π 的纤维且 $H(L)=L'$, 那么称 i 和 i' 是 Legendrian 等价的. 如果对给定芽的每一个表示映射, 在 Whitney C^∞ 拓扑意义下, 都存在 Legendrian 浸入空间的一个邻域和最初给定点的一个邻域, 使得对第一个邻域中的每一个 Legendrian 浸入在第二个邻域中都存在一点, 在此点处这个 Legendrian 浸入芽都与原来给定的 Legendrian 浸入芽是 Legendrian 等价的, 那么称 $PT^*\mathbb{R}^n$ 中的 Legendrian 浸入芽是 Legendrian 等价的.

因为 Legendrian 提升 $i:(L,p)\longrightarrow(PT^*\mathbb{R}^n,p)$ 是由波前集 $W(i)$ 的正则部分所唯一决定的, 因此, 有下面的关于 Legendrian 浸入芽的重要性质.

命题 4.3[11] 设 $i:(L,p)\longrightarrow(PT^*\mathbb{R}^n,p)$, $i':(L',p')\subset(PT^*\mathbb{R}^n,p')$ 是 Legendrian 浸入芽, 使得 $\pi\circ i$ 和 $\pi\circ i'$ 的相应的正则集是稠密的, 则 i 和 i' 是 Legendrian 等价的当且仅当波前集 $W(i)$ 和 $W(i')$ 是微分同胚的集合芽.

上面命题中的假设条件对 i 和 i' 而言具有一般性. 特别地, 当 i 和 i' 是 Legendrian 稳定时, 满足上面的条件. 记 $\mathcal{E}_n$ 为函数芽 $(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow\mathbb{R}$ 的局部环, 它的唯一极大理想记为 $\mathcal{M}_n=\{h\in\mathcal{E}_n\mid h(0)=0\}$. 设 $F,G:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ 是函数芽. 如果存在微分同胚芽 $\Psi:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)$,$\Psi(q,x)=(\psi_1(q,x),\psi_2(q,x))$, 使得 $\Psi^*(\langle F\rangle_{\mathcal{E}_{k+n}})=\langle G\rangle_{\mathcal{E}_{k+n}}$, 其中 $(q,x)\in(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)$, 那么称 F 和 G 是 P-$\mathcal{K}$ 等价的. 这里, $\Psi^*:\mathcal{E}_{k+n}\longrightarrow\mathcal{E}_{k+n}$ 是由 $\Psi^*(h)=h\circ\Psi$ 定义的拉回 $\mathbb{R}$- 代数同构. 设函数芽 $F:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$, 如果

$$\mathcal{E}_k=T_e(\mathcal{K})(f)+\left\langle\frac{\partial F}{\partial x_1}\bigg|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\bigg|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}}\right\rangle_{\mathbb{R}},$$

那么称 F 是 $f=F\,|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}}$ 的 $\mathcal{K}$- 通用形变, 其中

$$T_e(\mathcal{K})(f)=\left\langle\frac{\partial f}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial q_k},f\right\rangle_{\mathcal{E}_k}.$$

关于 $\mathcal{A}$- 等价, P-$\mathcal{K}$- 等价和 $\mathcal{K}$- 等价的定义请参考文献 [1–6]. Arnold[1] 理论的主要结果为

定理 4.4[1] 设 $F,G:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ 是 Morse 族, 则

(1) Φ_F 和 Φ_G 是 Legendrian 等价的当且仅当 F 和 G 是 P-$\mathcal{K}$- 等价的;

(2) Φ_F 是 Legendrian 稳定的当且仅当 F 是 $f=F\,|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}}$ 的 $\mathcal{K}$- 通用形变.

因为 F 和 G 是定义在同一个空间 $(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)$ 上的函数芽, 此时不需考虑稳定的 P-$\mathcal{K}$- 等价情形 [1]. 利用函数芽的 $\mathcal{K}$- 通用形变的唯一性及命题 4.3 和定理 4.4, 可以得到关于 Legendrian 稳定芽的分类. 对任意映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$, 定义 f 的局部环为 $Q(f)=\mathcal{E}_n/f^*(\mathcal{M}_p)\mathcal{E}_n$.

定理 4.5 设 $F,G:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ 是 Morse 族. 如果 Φ_F 和 Φ_G 是 Legendrian 稳定的, 则下列条件等价:

(1) $(W(\Phi_F),0)$ 和 $(W(\Phi_G),0)$ 是微分同胚芽;

(2) Φ_F 和 Φ_G 是 Legendrian 等价的;

(3) $Q(f)$ 和 $Q(g)$ 是同构的 $\mathbb{R}$- 代数, 其中 $f=F\mid_{\mathbb{R}^k\times\{0\}}$, $g=G\mid_{\mathbb{R}^k\times\{0\}}$.

下面, 我们将利用上面的定理和工具来研究类空超曲面与平坦的超 AdS- 双曲面之间的切触关系. 设 $N_i:(U,u_i)\longrightarrow(H_1^n,v_i)$ $(i=1,2)$ 是类空超曲面芽 $X_i:(U,u_i)\longrightarrow(H_1^n,X_i(u_i))$ 的 TAdS-Gauss 像. 如果存在微分同胚 $\phi:(U,u_1)\longrightarrow(U,u_2)$ 和 $\Phi:(H_1^n,v_1)\longrightarrow(H_1^n,v_2)$ 使得 $\Phi\circ N_1=N_2\circ\phi$, 那么称 N_1 和 N_2 是 $\mathcal{A}$- 等价的. 如果 N_i 的正则集在 (U,u_i), $(i=1,2)$ 中是稠密的. 利用命题 4.3, 得 N_1 和 N_2 是 $\mathcal{A}$- 等价的当且仅当所对应的 Legendrian 浸入芽 $\mathcal{L}^1:(U,u_1)\longrightarrow(\Delta,z_1)$ 和 $\mathcal{L}^2:(U,u_2)\longrightarrow(\Delta,z_2)$ 是 Legendrian 等价的. 根据定理 4.4,H_1 和 H_2 是 P-$\mathcal{K}$- 等价的. 其中, $H_i:(U\times H_1^n,(u_i,v_i))\longrightarrow\mathbb{R}$ 是与 $X_i(i=1,2)$, 对应的 AdS- 高度函数芽. 记 $h_{i,v_i}=H_i(u,v_i)$, 则有 $h_{i,v_i}(u)=\mathfrak{H}_{v_i}\circ X_i(u)$. 由定理 4.1 知,

$$\mathcal{K}(X_1(U),AH(X_1,u_1),v_1)=\mathcal{K}(X_2(U),AH(X_2,u_2),v_2)$$

当且仅当 h_{1,v_1} 和 h_{2,v_2} 是 $\mathcal{K}$- 等价的. 因此, 可将上面理论应用于我们的情形.

记 $Q(x,u_0)$ 是函数芽 $h_{v_0}:(U,u_0)\longrightarrow\mathbb{R}$, 的局部环, 其中 $v_0=N(u_0)$. 局部环的表达式为

$$Q(x,u_0)=\frac{C^\infty_{u_0}(U)}{\langle\langle X(u),N(u_0)\rangle\rangle_{C^\infty_{u_0}(U)}},$$

其中 $C^\infty_{u_0}(U)$ 是 u_0 处具有极大理想 $M_{u_0}(U)$ 的局部函数芽环. 这样, 我们可以得到下面的重要定理.

定理 4.6 设 $X_i:(U,u_i)\longrightarrow(H_1^n,X_i(u_i))$ $(i=1,2)$, 是类空超曲面芽, 使得对应的 Legendrian 嵌入芽 $\mathcal{L}^i:(U,u_i)\longrightarrow(\Delta,z_i)$ 是 Legendrian 稳定的, 则下列条件等价:

(1) TAdS-Gauss 像 N_1 和 N_2 是 $\mathcal{A}$- 等价的;

(2) H_1 和 H_2 是 P-$\mathcal{K}$- 等价的;

(3) h_{1,v_1} 和 h_{2,v_2} 是 $\mathcal{K}$- 等价的;

(4) $\mathcal{K}(X_1(U),AH(X_1,u_1),v_1)=\mathcal{K}(X_2(U),AH(X_2,u_2),v_2)$;

(5) $Q(X_1,u_1)$ 和 $Q(X_2,u_2)$ 是同构的 $\mathbb{R}$- 代数, 其中 $Q(X_i,u_i)=\frac{C^\infty_{u_i}}{\langle\langle X(u),N(u)\rangle\rangle_{C^\infty_{u_i}}}$.

证明 根据定理 4.1 及上面的讨论, 知条件 (3) 和 (4) 等价. 其它结论利用定理 4.5 易得.

对于类空超曲面芽 $X:(U,u_0)\longrightarrow(H_1^n,X(u_0))$. 称 $X^{-1}(AH(N(u_0),0),u_0)$ 是类空超曲面芽 X 的切平坦的超 AdS- 双曲面指标线芽. 有下面定理.

定理 4.7 设 $X_i:(U,u_i)\longrightarrow(H_1^n,X_i(u_i))\,(i=1,2)$, 是类空超曲面芽, 使得它们的 AdS- 抛物集作为 U 的子空间没有内点. 如果 TAdS-Gauss 像芽 N_1 和 N_2 是 $\mathcal{A}$- 等价的, 那么

$$\mathcal{K}(X_1(U),AH(X_1,u_1),v_1)=\mathcal{K}(X_2(U),AH(X_2,u_2),v_2).$$

此时, $X_1^{-1}(AH(N_1(u_1),0),u_1)$ 和 $X_2^{-1}(AH(N_2(u_2),0),u_2)$ 是微分同胚的集合芽.

证明 因为 AdS- 抛物集是 TAdS-Gauss 像的奇点集, 所以对应的 Legendrian 嵌入 $\mathcal{L}^i$ 满足定理4.3 的条件. 如果 TAdS-Gauss 像芽 N_1 和 N_2 是 $\mathcal{A}$- 等价的, 那么 $\mathcal{L}^1$ 和 $\mathcal{L}^2$ 是 Legendrian 等价的. 因此 H_1 和 H_2 是 P-$\mathcal{K}$- 等价的, h_{1v_1} 和 h_{2v_2} 是 $\mathcal{K}$- 等价的. 由定理 4.1, 这等价于

$$\mathcal{K}(X_1(U), AH(X_1, u_1), v_1) = \mathcal{K}(X_2(U), AH(X_2, u_2), v_2).$$

另一方面,

$$X_i^{-1}(AH(N_i(u_0), 0), u_0) = (h_{iv_i}^{-1}(0), u_0).$$

因为 $\mathcal{K}$- 等价保持零水平集, 所以集合芽 $X_1^{-1}(AH(N_1(u_1), 0), u_1)$ 和 $X_2^{-1}(AH(N_2(u_2), 0), u_2)$ 是微分同胚的.

根据上面定理, 切平坦的超 AdS- 双曲面指标线芽的微分同胚型是 X 的 TAdS-Gauss 像芽的 $\mathcal{A}$-不变量. 另外, 我们需要介绍奇点理论中函数芽的基本不变量, $\mathcal{K}$- 不变量. 我们知道函数芽的 $\mathcal{K}$- 余维就是一个数值 $\mathcal{K}$- 不变量. 记为

$$\mathrm{AdS} - \mathrm{ord}(X, u_0) = \dim \frac{C_{u_0}^\infty}{\langle h_{v_0}, \partial h_{v_0}/\partial u_i \rangle_{C_{u_0}^\infty}},$$

其中 $v_0 = N(u_0)$. 通常称 $\mathrm{AdS} - \mathrm{ord}(X, u_0)$ 为 h_{v_0} 的 $\mathcal{K}$- 余维. 这里, 我们称其为类空超曲面 M 与平坦的超 AdS- 双曲面在点 $X(u_0)$ 的切触阶数. 设 $v_0 = N(u_0)$, 定义函数芽的余秩为

$$\mathrm{AdS} - \mathrm{corank}(X, u_0) = (n-1) - \mathrm{rankHess}(h_{v_0})(u_0).$$

利用命题 3.1, 得 $X(u_0)$ 是 AdS– 抛物点当且仅当 AdS-corank$(X, u_0) \geqslant 1$. 如果函数芽 f : $(\mathbb{R}^n, a) \longrightarrow \mathbb{R}$ 与函数芽 $\pm u_1^2 \pm \cdots \pm u_{n-2}^2 + u_{n-1}^{k+1}$ 是 $\mathcal{K}$- 等价, 那么称 f 在 a 点有 A_k- 型奇点. 如果 $\mathrm{AdS} - \mathrm{corank}(X, u_0) = 1$, 那么 h_{v_0} 在 u_0 有 A_k- 型奇点具有一般性. 此时 $\mathrm{AdS} - \mathrm{ord}(X, u_0) = k$.

5 n 维 Anti-de Sitter 空间中的类空超曲面的通有性

这一部分主要讨论 n 维 Anti-de Sitter 空间中的类空超曲面的通有性, 用到的主要工具是一类横截性定理.

考察赋有 Whitney C^∞- 拓扑的类空嵌入空间 $\mathrm{Emb}_s(U, H_1^n)$ 和第四节中定义的函数芽 $\mathcal{H} : H_1^n \times H_1^n \longrightarrow \mathbb{R}$. 易知对任意 $u \in H_1^n$, $\mathcal{H}_u$ 是一个淹没芽, 其中 $\mathcal{H}_u(v) = \mathcal{H}(u, v)$. 对任意 $X \in \mathrm{Emb}_s(U, H_1^n)$, 有 $H = \mathcal{H} \circ (X \times \mathrm{id}_{H_1^n})$. 还可得到 l-jet 扩张 $j_l^l H : U \times H_1^n \longrightarrow J^l(U, \mathbb{R})$, $j_1^l H(u, v) = j^l h_v(u)$. 考虑平凡化 $J^l(U, \mathbb{R}) \equiv U \times \mathbb{R} \times J^l(n-1, 1)$. 对任意子流形 $Q \subset J^l(n-1, 1)$, 记 $\widetilde{Q} = U \times \{0\} \times Q$. 则作为 Wassermann[12] 中引理 6 的推论, 有下面命题.

命题 5.1 设 Q 是 $J^l(n-1, 1)$ 的子流形. 则集合

$$T_Q = \{X \in \mathrm{Emb}_s(U, H_1^n) \mid j_1^l H \pitchfork \widetilde{Q}\}$$

是 $\mathrm{Emb}_s(U, H_1^n)$ 的剩余集. 若 Q 是闭子集, 则 T_Q 是开集.

当 $n < 6$ 时, 利用关于稳定 Legendrian 奇点的分类结果和命题 5.1, 可得下面定理.

定理 5.2 存在开的稠密子集 $\mathcal{O} \subset \mathrm{Emb}_s(U, H_1^n)\,(n < 6)$, 使得对任意的 $X \in \mathcal{O}$, 对应的 Legendrian 嵌入芽 $\mathcal{L}$ 在每一点都是 Legendrian 稳定的.

6 n 维 Anti-de Sitter 空间中的类空超曲面的 AdS-Monge 型

在欧氏空间中, Monge 型是研究曲面的局部微分几何的重要工具. 在这一部分中, 类似地, 我们在 n 维 Anti-de Sitter 空间中介绍类空超曲面的 AdS-Monge 型, 并将利用 AdS-Monge 型研究类空超曲面的性质.

考虑函数 $f(u_1,\dots,u_{n-1})$, 满足条件 $f(0)=f_{u_i}(0)=0$. 定义 H_1^n 中的类空超曲面为

$$X_f(u_1,\dots,u_{n-1})=(\sqrt{1+u_1^2+\cdots+u_{n-1}^2-f^2(u_1,\dots,u_{n-1})},f(u_1,\dots,u_{n-1}),u_1,\dots,u_{n-1}).$$

计算得 $N(0)=(0,1,0,\dots,0)$. 称 X_f 为 Anti-de Sitter Monge 型或 AdS-Monge 型. 可以得到下面定理.

定理 6.1 局部上, H_1^n 中的类空超曲面都可以由 AdS-Monge 型来定义.

证明 设 $X:U\longrightarrow H_1^n$ 是类空超曲面. 考虑 H_1^n 中的 Lorentzian 变换. 不失一般性, 设 $p=X(0)=(1,0,\dots,0)$. 则有切空间 $T_p\mathbb{R}_2^{n+1}$ 的基底为 $X(0),N(0),X_{u_1}(0),\dots,X_{u_{n-1}}(0)$, 使得

$$T_pM=\langle X_{u_1}(0),\dots,X_{u_{n-1}}(0)\rangle_{\mathbb{R}}.$$

利用 Gram-Schmidt 正交化方法, 得到 $T_p\mathbb{R}_2^{n+1}$ 的伪正交基底 $\{X(0),N(0),e_1,\dots,e_{n-1}\}$, 使得

$$T_pM=\langle e_1,\dots,e_{n-1}\rangle_{\mathbb{R}}.$$

特别地, $\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ 是 T_pM 的正交基. 因为 $p=(1,0,\dots,0)$, 所以 T_pM 可以看作

$${}_0\mathbb{R}_1^n=\{(0,x_1,\dots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R}\}$$

的子空间. 利用 ${}_0\mathbb{R}_1^n$ 中的旋转变换, 可以令 $T_pM=\{(0,0,u_1,\dots,u_{n-1})\mid u_i\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}_2^{n+1}$, 则芽 (M,p) 可写成下面形式

$$(f_0(u_1,\dots,u_{n-1}),f(u_1,\dots,u_{n-1}),u_1,\dots,u_{n-1})$$

因为 $M\subset H_1^n$, 所以

$$f_0(u_1,\dots,u_{n-1})=\sqrt{1+u_1^2+\cdots+u_{n-1}^2-f^2(u_1,\dots,u_{n-1})}.$$

又因为 $T_pM=\{(0,0,u_1,\dots,u_{n-1})\mid u_i\in\mathbb{R}\}$, 所以 $f(0)=0,f_{u_i}(0)=0$.

对于类时向量 $v_0=(0,1,0,\dots,0)$, 考察平坦的超 AdS- 双曲面 $AH(v_0,0)$. 则 $AH(v_0,0)$ 的 AdS-Monge 为

$$a(u_1,\dots,u_{n-1})=(\sqrt{1+u_1^2+\cdots+u_{n-1}^2},0,u_1,\dots,u_{n-1})$$

易得 $\langle a(u),v_0\rangle=0$.

另一方面, $a(0)=(1,0,\dots,0)=p$ 且 $a_{u_i}(0)$ 等于 x_{i+2}- 轴, 其中 $i=1,\dots,n-1$. 这表明 $T_pM=T_p(a(u))$. 所以 $a(u)=AH(v_0,0)$ 是 $M=X_f(U)$ 在点 $p=X_f(0)$ 处的切平坦的超 AdS- 双曲面. 进一步, AdS-Monge 型芽 $(X_f,0)$ 的切平坦的超 AdS- 双曲面指标线为

$$X_f^{-1}(AH(v_0,0))=\{(u_1,\dots,u_{n-1})\mid f(u_1,\dots,u_{n-1})=0\}.$$

因为 X_f 在 v_0 处的高度函数为

$$h_{v_0}(u)=\langle X_f,v_0\rangle=f(u_1,\dots,u_{n-1}),$$

所以可以计算 h_{v_0} 的 Hessian 矩阵为 $\mathrm{Hess}(h_{v_0})(0)=\mathrm{Hess}(f)(0)$. 所以,

$$\mathrm{AdS}-\mathrm{corank}(X_f,0)=(n-1)-\mathrm{rankHess}(f)(0).$$

因为 $f(0)=f_{u_i}(0)=0$, 所以

$$f(u_1,\dots,u_{n-1})=\frac{1}{2}\overline{k}_1u_1^2+\cdots+\frac{1}{2}\overline{k}_{n-1}u_{n-1}^2+g(u_1,\dots,u_{n-1}),$$

其中 $g\in M_{n-1}^3$,$\overline{k}_1,\dots,\overline{k}_{n-1}$ 是 $(f_{u_iu_j}(0))$ 的特征值. 计算得 $X_{f_{u_iu_j}}(0)=(\delta_{ij},f_{u_iu_j}(0),0,\dots,0)$. 进一步得

$$h_{ij}(0)=\langle N(0),X_{f,u_iu_j}(0)\rangle=f_{u_iu_j}(0)=\delta_{ij}\overline{k}_i,\quad g_{ij}(0)=\langle X_{f,u_i},X_{f,u_j}\rangle=\delta_{ij}.$$

因此 $k_i(0)=\overline{k}_i$ 且

$$K_{Ads}(0)=\prod_{i=1}^{n-1}k_i(0)=\prod_{i=1}^{n-1}\overline{k}_i.$$

切平坦的超 AdS- 双曲面指标线定义为

$$\begin{aligned}X_f^{-1}(AH(v_0,0),0)&=\left\{(u_1,\dots,u_{n-1})\,\middle|\,\pm\frac{1}{2}\overline{k}_1u_1^2\pm\cdots\pm\frac{1}{2}\overline{k}_{n-1}u_{n-1}^2\pm g(u_1,\dots,u_{n-1})=0\right\}\\&=\{(u_1,\dots,u_{n-1})\mid\pm k_1(0)u_1^2\pm\cdots\pm k_{n-1}(0)u_{n-1}^2\pm 2g(u_1,\dots,u_{n-1})=0\}.\end{aligned}$$

致谢 作者对审稿专家所提出的建议和编辑部的热心帮助表示感谢, 向对奇点理论研究做出突出贡献的孙伟志教授、裴东河教授、陈亮博士及 Izumiya 教授等表示深深的敬意及感谢.

参考文献

1 Arnold V I, Gueseinzade S M, Varchenko A N. Singularities of Differentiable Maps, vol. I. Basel: Birkhäuser, 1986
2 Izumiya S, Pei D H, Sano T. Singularities of hyperbolic Gauss maps. Proc London Math Soc, 2003, 86: 485–512
3 Kong L L, Pei D H. Singularities of de Sitter Gauss map of timelike hypersurface in Minkowski 4-space. Sci China Ser A, 2008, 51: 241–249
4 孔令令, 裴东河. 四维 Minkowski 空间中类时超曲面的 de Sitter Gauss 映射的奇点分类. 中国科学 A 辑, 2007, 37: 751–758
5 Chen L. On spacelike surfaces in Anti-de Sitter 3-space from the contact viewpoint. Hokkaido Math J, 2009, 38: 701–720
6 Chen L, Izumiya S. A mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in semi-Euclidean space. Proc Japan Acad Ser A Math Sci, 2009, 85: 49–54
7 Zakalyukin V M. Lagrangian and Legendrian singularities. Funct Anal Appl, 1976 10: 23–31
8 Montaldi J A. On contact between submanifolds. Michigan Math J, 1986, 33: 81–85
9 Montaldi J A. On generic composites of maps. Bull London Math Soc, 1991, 23: 81–85
10 Martinet J. Singularities of Smooth Function and Maps. Cambridge: Cambridge University Press, 1982
11 Zakalyukin V M. Reconstructions of fronts and caustics depending one parameter and versality of mappings. Sov Math, 1984, 27: 2713–2735
12 Wassermann G. Stability of caustics. Math Ann, 1975, 210: 43–50
13 O'Neil B. Semi-Riemannian Geometry. New York: Academic Press, 1983
14 Bruce J W, Giblin P J. Curves and Singularities, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992
15 李兵, 李养成. 一阶拟线性偏微分方程组稳定几何的局部分类. 中国科学 A 辑, 2002, 32: 274–281
16 Izumiya S, Pei D H, Fuster M C R. Spacelike surfaces in Anti-de Sitter four-space from a contact viewpoint. Proc Steklov Inst Math, 2009, 267: 156–173

Singularities of timelike Anti-de Sitter Gauss images of spacelike hypersurfaces in Anti-de Sitter n-space

LIU HaiMing & MIAO JiaJing

Abstract We study spacelike hypersurfaces in Anti-de Sitter n-space as an application of singularity theory and we introduce the local differential geometry of spacelike hypersurfaces. We define the timelike Anti-de Sitter Gauss image and the Anti-de Sitter height function of spacelike hypersurfaces, which as a basic tool is used to investigate the geometric meanings of singularities of the timelike Anti-de Sitter Gauss image and the generic properties of spacelike hypersurfaces. At last, the AdS-Monge form is given.

Keywords: Anti-de Sitter n-space, spacelike hypersurfaces, AdS Gauss image, Legendrian singularities

MSC(2000): 53A35, 58C25, 58C27