中国科学（A 辑）
第 30 卷 第 12 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2000 年 12 月

# 一般力学中三类变量的广义变分原理*

梁立孚
（哈尔滨工程大学航天工程系，哈尔滨 150001）
胡海昌
（中国空间技术研究院空间飞行器总体设计部，北京 100086）

**摘要** 应用对合变换，将两类变量的广义变分原理的驻值条件变换为三类变量的基本方程. 按照广义力和广义位移之间的对应关系，将各基本方程乘上相应的虚量，代数相加，然后积分，进而建立了完整系统的三类变量的广义变分原理. 应用这种凑合法，建立了非完整系统的三类变量的广义变分原理. 作为例子，将一般力学中的三类变量的广义变分原理和两类变量的广义变分原理推广应用于弹性动力学中. 最后，讨论了有关的问题.

**关键词** 一般力学 非完整系统 完整系统 广义变分原理 凑合法

我国学者十分重视变形体力学中广义变分原理的研究. 文献[1]研究余能原理，从理论上和应用上为研究广义变分原理奠定了基础. 文献[2]建立了弹性力学和塑性力学的广义变分原理，为后来发展起来的混合有限元素法提供了理论依据，并获得重要的应用. 文献[3, 4]倡导 Lagrange 乘子法，为建立各个学科领域的广义变分原理提供了一个有效方法. 在这些开创性研究成果的指导和带动下，我国一大批学者在这一学科领域做出重要贡献. 近年来，我国学者努力将广义变分原理的研究推广到一般力学中去，文献[5, 6]便是这一方面的初步尝试. 文献[7]介绍了国外学者研究一般力学中的变分原理的情况，将我国学者对一般力学中的变分原理的研究引导到世界性研究的前沿. 文献[8]引入广义 D'Alembert-Lagrange 原理，应用凑合法建立了完整系统和非完整系统的第二类变分原理（即广义变分原理)，并且将之写成正则形式. 文献[9]应用对合变换推导出两类变量的 Hamilton 原理，应用 Lagrange 乘子法推导出完整系统和非完整系统的两类变量的有附加条件的广义变分原理和无附加条件的广义变分原理，推导了各类变分原理的驻值条件.

文献[9]指出："在一般力学中，是否存在三类变量的广义变分原理呢？如果存在，怎样将它们推导出来呢?"在本文中，我们将主要应用凑合法[2, 10]来解决这一问题.

本文应用对合变换[11]，将两类变量的广义变分原理的驻值条件变换为三类变量的基本方程. 按照广义力和广义位移之间的对应关系，将各基本方程乘上相应的虚量，代数相加，然后积分，进而建立了完整系统的三类变量的广义变分原理. 应用这种凑合法，建立了非完整系统的三类变量的广义变分原理. 作为例子，将一般力学中的三类变量的广义变分原理和两类变量的广义变分原理推广应用于弹性动力学中. 最后讨论了有关问题.

---

2000-05-28 收稿
* 国家自然科学基金(批准号：19872022)和国家教育委员会博士学科点专项科研基金(批准号:97021710)资助项目

# 1　三类变量的变分问题

在变分学中，基本上存在三级变量——自变量、可变函数和泛函．简单函数和泛函的区别在于：简单函数是自变量的函数，而泛函是可变函数的函数，独立自主地变化的可变函数称为自变函数．从不独立的可变函数也是自变函数的函数的角度看问题，不独立的可变函数也是泛函，我们可称其为子泛函．

在分析动力学中，可以选取参量 $x_k$（直角坐标）或 $q_s$（广义坐标）作为可变函数．此时，允许出现时间 $t$，但时间 $t$ 是自变量，不参加变分；也允许出现速度和广义速度，但速度 $\dot{x}_k$ 和广义速度 $\dot{q}_s$ 分别以 $x_k$ 和 $q_s$ 的导数的"身份"出现．这类问题称为一类变量的变分问题．在分析动力学中，也可以选取参量 $x_k$（直角坐标）和 $v_k$（速度）或者 $q_s$（广义坐标）和 $v_s^q$（广义速度）作为可变函数．此时，允许出现时间 $t$，但时间 $t$ 是自变量，不参加变分；也允许出现 $\dot{x}_k$ 和 $\dot{q}_s$，但它们分别是以 $x_k$ 和 $q_s$ 对时间的导数形式出现．这类问题称为两类变量的变分问题．在分析动力学中，还可以选取参量 $x_k$（直角坐标）、$v_k$（速度）和 $p_k$（动量）或者 $q_s$（广义坐标）、$v_s^q$（广义速度）和 $p_s^q$（广义动量）作为可变函数．此时，允许出现时间 $t$，但时间 $t$ 是自变量，不参加变分；也允许出现 $\dot{x}_k$ 和 $\dot{q}_s$，但它们分别是以 $x_k$ 和 $q_s$ 对时间的导数形式出现；还允许 $\dot{p}_k$ 和 $\dot{p}_s^q$ 等出现，但它们分别是以 $p_k$ 和 $p_s^q$ 等对时间的导数形式出现．这类问题称为三类变量的变分问题．以上一类变量、两类变量和三类变量的变分问题的描述，是为了叙述问题的方便而引入的．

# 2　三类变量的广义变分原理

## 2.1　由建立两类变量的广义变分原理得到的启示

一类变量的 Hamilton 原理的驻值条件为

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial V}{\partial q_s} = 0, \tag{1}$$

应用对合变换[11]，可将(1)式变换为两类变量的基本方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial q_s} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial v_s^q} - \dfrac{\partial V}{\partial q_s} = 0, & \text{(2a)} \\ \dot{q}_s - v_s^q = 0, & \text{(2b)} \end{cases}$$

由(2)式出发，我们可以应用凑合法[2, 10]来建立两类变量的广义变分原理．

按照广义力和广义位移之间的对应关系，将(2a)和(2b)式乘上相应的虚量，代数相加，然后积分，可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_s^q} - \frac{\partial V}{\partial q_s}\right)\delta q_s + (\dot{q}_s - v_s^q)\delta\frac{\partial T}{\partial v_s^q}\right]\mathrm{d}t = 0, \tag{3}$$

经分部积分，并按惯例在时域边界 $t = t_0$ 和 $t = t_1$ 处取 $\delta q_s = 0$，可将(3)式变换为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[T - V + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial v_s^q}(\dot{q}_s - v_s^q)\right]\mathrm{d}t = 0. \tag{4}$$

上式可以处理为一个泛函的驻值问题

$$\pi_2 = \int_{t_0}^{t_1}\left[T(q_s, v_s^q, t) - V(q_s, t) + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial v_s^q}(\dot{q}_s - v_s^q)\right]\mathrm{d}t, \tag{5}$$

这就是完整系统的两类变量的广义变分原理的泛函.

以上方法也可用来建立三类变量的广义变分原理.

**2.2 完整系统的三类变量的广义变分原理**

完整系统的两类变量的广义变分原理的驻值条件即为(2)式,应用对合变换,可将(2)式变换为三类变量的基本方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial q_s} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_s^q - \dfrac{\partial V}{\partial q_s} = 0, & \text{(6a)} \\ \dot{q}_s - v_s^q = 0, & \text{(6b)} \\ p_s^q - \dfrac{\partial T}{\partial v_s^q} = 0. & \text{(6c)} \end{cases}$$

按照广义力和广义位移之间的对应关系,将(6a)~(6c)式乘上相应的虚量,代数相加,然后积分,可得

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^{n} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_s^q - \frac{\partial V}{\partial q_s} \right) \delta q_s + (\dot{q}_s - v_s^q) \delta p_s^q - \left( p_s^q - \frac{\partial T}{\partial v_s^q} \right) \delta v_s^q \right] \mathrm{d}t = 0, \tag{7}$$

经分部积分,并按惯例在时域边界 $t = t_0$ 和 $t = t_1$ 处取 $\delta q_s = 0$,可将(7)式变换为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ T(q_s, v_s^q, t) - V(q_s, t) + \sum_{s=1}^{n} p_s^q (\dot{q}_s - v_s^q) \right] \mathrm{d}t = 0, \tag{8}$$

上式可以处理为一个泛函的驻值问题

$$\pi_3 = \int_{t_0}^{t_1} \left[ T(q_s, v_s^q, t) - V(q_s, t) + \sum_{s=1}^{n} p_s^q (\dot{q}_s - v_s^q) \right] \mathrm{d}t, \tag{9}$$

这就是完整系统的三类变量的广义变分原理的泛函.

**2.3 非完整系统的三类变量的广义变分原理**

设想对如上的完整系统附加上非完整约束条件

$$f_\beta(q_s, v_s^q, t) = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n,\ \beta = 1, 2, \cdots, g;\ n > g), \tag{10}$$

考虑到:在 Chetaev 模型中,由于 Chetaev 条件是以变分式的形式出现的,故不便推导出类似 $\pi_3$ 的广义变分原理的泛函. 但是,正如文献[9]所指出的那样,我们可以建立有附加条件的广义变分原理泛函. 非完整系统的两类变量的有附加条件的广义变分原理的驻值条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial q_s} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial T}{\partial v_s^q} - \dfrac{\partial V}{\partial q_s} + \displaystyle\sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \dfrac{\partial f_\beta}{\partial v_s^q} = 0, \\ \dot{q}_s - v_s^q = 0, \end{cases}$$

应用对合变换,可将上式变换为三类变量的基本方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial q_s} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_s^q - \dfrac{\partial V}{\partial q_s} + \displaystyle\sum_{\beta=1}^{g} \mu_\beta \dfrac{\partial f_\beta}{\partial v_s^q} = 0, & \text{(11a)} \\ \dot{q}_s - v_s^q = 0, & \text{(11b)} \\ p_s^q - \dfrac{\partial T}{\partial v_s^q} = 0. & \text{(11c)} \end{cases}$$

按照广义力和广义位移之间的对应关系,将(11a)~(11c)式乘上相应的虚量,代数相加,然后

积分，可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_s^q-\frac{\partial V}{\partial q_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial v_s^q}\right)\delta q_s+(\dot{q}_s-v_s^q)\delta p_s^q-\left(p_s^q-\frac{\partial T}{\partial v_s^q}\right)\delta v_s^q\right]\mathrm{d}t=0, \tag{12}$$

考虑到 Chetaev 条件

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial v_s^q}\delta q_s=0, \tag{13}$$

经分部积分，并按惯例在时域边界 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 处取 $\delta q_s=0$，可将(12)式变换为

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta\left[T(q_s,\ v_s^q,\ t)-V(q_s,\ t)+\sum_{s=1}^{n}p_s^q(\dot{q}_s-v_s^q)\right]\mathrm{d}t=0, \tag{14}$$

其附加条件为(10)式．这就是非完整系统的 Chetaev 模型中的三类变量的广义变分原理．

应用如上的方法，也可以建立 Vacco 模型中的三类变量的广义变分原理，限于篇幅，不赘述．

## 3　推广与应用

一般力学是基础力学，它的理论可以推广应用于弹性力学、塑性力学、流体力学、….　作为例子，我们来研究弹性动力学中的广义变分原理．由于这类问题的变量多、公式长，以下采用 Descartes 张量来书写．弹性动力学的三类变量基本方程为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i+\sigma_{ij,\ j}+\bar{F}_i=0, \tag{15a}$$

$$\sigma_{ij}n_j-\overline{P_i}=0\quad(\text{在 } S_\sigma \text{ 上}), \tag{15b}$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,\ j}-\frac{1}{2}u_{j,\ i}=0, \tag{15c}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0\quad(\text{在 } S_u \text{ 上}), \tag{15d}$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}=0, \tag{15e}$$

$$\dot{u}_i-v_i=0, \tag{15f}$$

$$p_i-\rho v_i=0, \tag{15g}$$

其中 $a_{ijkl}$为刚度系数四阶张量，$\sigma_{ij}$为应力二阶张量，$\varepsilon_{ij}$为应变二阶张量，$u_{i,\ j}$为位移导数二阶张量，$u_i$ 为位移一阶张量，$\bar{u}_i$ 为边界位移一阶张量，$\bar{F}_i$ 为体力一阶张量，$\bar{P}_i$ 为边界面力一阶张量，$n_j$ 为方向数一阶张量，$\dot{u}_i$ 为位移对时间的导数一阶张量，$v_i$ 为变形速度一阶张量，$p_i$ 为动量一阶张量，$\sigma_{ij,\ j}$为应力对空间坐标的导数一阶张量，$\rho$ 为密度零阶张量．

按照广义力和广义位移之间的对应关系，将(15a)～(15g)式乘上相应的虚量，代数相加，然后积分，可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_V\left[(p_i-\rho v_i)\delta v_i-(\dot{u}_i-v_i)\delta p_i-\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i+\sigma_{ij,\ j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\right.\right.$$

$$\left.-\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,\ j}-\frac{1}{2}u_{j,\ i}\right)\delta\sigma_{ij}-(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})\delta\varepsilon_{ij}\right]\mathrm{d}V$$

$$+\iint\limits_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{P}_i)\delta u_i\mathrm{d}S-\iint\limits_{S_u}u(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S\Big\}\mathrm{d}t=0. \tag{16}$$

经分部积分,按惯例在时域边界 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 处取 $\delta p_i=0$,并应用 Green 定理

$$\iiint\limits_V u_{i,\,j}\,\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V=\iint\limits_{S_\sigma+S_u}u_i\delta\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S-\iiint\limits_V u_i\delta\sigma_{ij,\,j}\mathrm{d}V, \tag{17}$$

可将(16)式变换为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\iiint\limits_V\Big[p_iv_i-\frac{1}{2}\rho v_iv_i+u_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i\Big]\mathrm{d}V$$
$$-\iiint\limits_V\Big[\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkl}\ \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+(\sigma_{ij,\,j}+\bar{F}_i)u_i\Big]\mathrm{d}V$$
$$+\iint\limits_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_u}\bar{u}_i\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S\Big\}\mathrm{d}t=0, \tag{18}$$

上式可以处理为一个泛函的驻值问题

$$\Gamma_3=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\iiint\limits_V\Big[p_iv_i-\frac{1}{2}\rho v_iv_i+u_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i\Big]\mathrm{d}V-\iiint\limits_V\Big[\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+(\sigma_{ij,\,j}+\bar{F}_i)u_i\Big]\mathrm{d}V$$
$$+\iint\limits_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{P}_i)u_i\,\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_u}\bar{u}_i\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S\Big\}\mathrm{d}t. \tag{19}$$

这就是弹性动力学的三类变量的广义变分原理. 它可归类于胡海昌-鹫津久一郎广义变分原理[2, 12].

弹性动力学的两类变量基本方程的一种表示形式为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho v_i+(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})_{,\,j}+\bar{F}_i=0, \tag{20a}$$
$$a_{ijkl}\,\varepsilon_{il}\,n_j-\bar{P}_i=0\quad(\text{在 }S_\sigma\text{ 上}), \tag{20b}$$
$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,\,i}=0, \tag{20c}$$
$$u_i-\bar{u}_i=0\quad(\text{在 }S_u\text{ 上}), \tag{20d}$$
$$\dot{u}_i-v_i=0. \tag{20e}$$

按照广义力和广义位移之间的对应关系, 将(20a)~(20e)式乘上相应的虚量,代数相加,然后积分,可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\iiint\limits_V\Big[-(\dot{u}_i-v_i)\delta\rho v_i-\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho v_i+(a_{ijkl}\ \varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\Big)\delta u_i$$
$$-\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,\,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\delta a_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}\Big]\mathrm{d}V$$
$$+\iint\limits_{S_\sigma}(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}n_j-\bar{P}_i)\delta u_i\mathrm{d}S-\iint\limits_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}n_j\mathrm{d}S\Big\}\mathrm{d}t=0, \tag{21}$$

经分部积分,按惯例在时域边界 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 处取 $\delta\rho v_i=0$, 并应用 Green 定理

$$\iiint\limits_V u_{i,\,j}\,\delta a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\mathrm{d}V=\iint\limits_{S_\sigma+S_u}u_i\delta a_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}n_j\mathrm{d}S-\iiint\limits_V u_i\delta(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})_{,\,j}\mathrm{d}V, \tag{22}$$

可将(21)式变换为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint\limits_V\left(\frac{1}{2}\rho v_i v_i+u_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho v_i\right)\mathrm{d}V-\iiint\limits_V\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl}+(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})_{,j}u_i+\bar{F}_i u_i\right]\mathrm{d}V\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{S_\sigma}(a_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}n_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_u}\bar{u}_i a_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}n_j\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t=0. \tag{23}$$

上式可以处理为一个泛函的驻值问题

$$\Gamma_2=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint\limits_V\left(\frac{1}{2}\rho v_i v_i+u_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho v_i\right)\mathrm{d}V-\iiint\limits_V\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl}+(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})_{,j}u_i+\bar{F}_i u_i\right]\mathrm{d}V\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{S_\sigma}(a_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}n_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_u}\bar{u}_i a_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}n_j\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}t, \tag{24}$$

这就是弹性动力学的两类变量的广义变分原理的泛函．它可归类于 Hellinger-Reissner 广义变分原理[13]．

# 4 讨论

在变形体力学中，广义变分原理在有限元素法和其他近似计算方法中得到广泛应用．本文作者认为，这类应用也可推广到一般力学中，这也是研究一般力学中的广义变分原理的意义之一．

本文研究了一般力学中的三类变量的广义变分原理．这里指出，本文和文献[9]建立的广义变分原理不是一般力学中的广义变分原理的全部，针对不同的应用背景，还可以建立多种不同的广义变分原理，限于篇幅，不赘述．

## 参　考　文　献


1 钱令希．余能原理．中国科学，1950，1(3)：449～456

2 胡海昌．论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理．物理学报，1954，10(3)：259～289

3 钱伟长．弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用．力学与实践，1979，1(1)：16～24

4 钱伟长．弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用．力学与实践，1979，1(2)：18～26

5 郭仲衡，高普云．关于经典非完整力学．力学学报，1990，22(2)：185～190

6 Liang L F. On a problem of analytical dynamics of nonholonomic systems. In: Zheng Zhemin. Applied Mechanics, Vol 1. Beijing: Pergamon Press, 1989. 65～69

7 Rumyantsev V V. 欧拉和力学的变分原理(梅凤翔译)．力学进展，1993，23(1)：86～105

8 朱如曾．非完整力学的第二类、第一类和中间类型变分原理．中国科学，A 辑，1999，29(1)：49～54

9 梁立孚．应用 Lagrange 乘子法推导一般力学中的广义变分原理．中国科学，A 辑，1999，29(12)：1 102～1 108

10 梁立孚，章梓茂．推导弹性力学变分原理的一种凑合法．哈尔滨船舶工程学院学报，1985，4：1～13

11 钱伟长．对合变换和薄板弯曲问题的多变量变分原理．应用数学和力学，1985，6(1)：25～46

12 Washizu K. On the variational principles of elasticity and plasticity. MIT, Technical Report NWS 25-18, 1955

13 Reissner E. On a variational theorem in elasticity. Journal of Mathematics and Physics, 1950, 29(2): 90～98