

数值求解对流占优问题的分步解析方法

吴 江 航 孙 毓 平

(北京大学力学系)

摘 要

本文提出了数值求解对流占优问题的一种无条件 L_2 稳定的分步解析方法.对于线性与非线性的对流占优问题,在数学上严格证明了分步解析方法的稳定性与收敛性,并给出了解的误差估计.

关键词: 对流占优问题,分步方法,反向特征线方法,有限分析法,最小最大值原理

一、引 言

大多数预测对流扩散问题的数值方法在对流占优的情况下表现都不那么令人满意,其中一些高精度方法,稳定性不好,解严重振荡;另一些方法则数值耗散大.众所周知,在对流占优的扩散过程中,由双曲算子决定的对流作用较之由抛物算子决定的扩散作用更为重要.如果对这些项显式处理,那么一阶导数项用中心差分近似则会使数值解振荡,甚至产生不稳定^[1]. Galerkin 有限元方法(GA-FEM)对对流项处理效果与中心差分对对流项进行处理的效果相同.按照差分理论,中心差分处理对流的结果是上下游效应不能区别对待,克服的方法是引入迎风差分格式.其结果是消除了数值振荡,但带来了数值耗散,它随 P_c (或 Re) 数的增加而增加,很容易使数值耗散超过真实的物理耗散.

70 年代末,人们通过对上游效应的考虑建立了一些迎风有限元方法(如 Petrov-Galerkin 有限元方法),其结果仍然是以引入数值粘性为条件而消除数值振荡的^[2-4].

迎风方法的一个改进是超迎风方法^[5]. 超迎风方法虽然降低了数值耗散,但它仍然会导致数值振荡. 70 年代末 Chen^[6,7] 等提出了一种与有限差分、有限元方法都不相同的有限分析方法. 有限分析方法有两个突出的优点:(1) 诸结点间代数关系式通过分析解获得,从而使有限分析格式可以通过有限分析系数自动反映上游对下游的作用;(2) 有限分析解满足极值原理,从而保证有限分析方法稳定、收敛. 然而,在离散小区域内通过局部分析解建立有限分析格式时,将对流项进行了线性化近似. 如此,当对流作用与扩散作用相比处于主导地位时,将导致数值耗散. 由于对流算子与扩散算子之间数学物理性质的不同,同时处理对流与扩散算子,在对流占优时,将会变得非常困难. 摆脱这一困境的最好方法看来只有应用分步方法^[8]将对流扩散方程分解成单纯的对流与扩散方程,然后对其中的每一方程分别采用适合它

们的最佳方法进行求解。在 80 年代初, 各种的 Euler-Lagrange 方法^[9-16]都是基于这种思想发展起来的。在这些方法中, 对流部分采用特征线方法进行计算, 对扩散部分用有限差分或有限元方法进行求解。这些方法虽较以前的方法有了很大改进, 如消除了数值振荡, 但是由于在计算扩散时用了有限差分或有限元方法, 各结点之间值只能通过插值近似表现出来。这样, 在用特征线方法计算对流时仍带来可数值粘性。为了消除这种附加的数值粘性, 本文提出了一种更为精细的分步解析方法: 用反向特征线方法来处理对流项, 用有限分析方法求解扩散方程, 与有限分析方法及 Euler-Lagrange 方法相比, 分步解析方法有下列两个优点: (1) 在处理对流项时未进行线性化与插值, 避免了数值粘性的引入; (2) 第二分步的有限分析系数是与函数结点值无关的常数, 这样使算法变得比较简单。本文除了给出数值求解对流扩散方程的分步解析格式以外, 在数学上对线性、非线性问题分步解析方法的稳定性与收敛性还进行了严格证明, 并给出了误差估计。

二、数值求解对流扩散方程的分步解析方法

考虑下列二维对流扩散方程构成的初边值问题:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = v \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + f, \quad (x, y) \in Q, t \in (0, T], \quad (1)$$

$$\phi(x, y, 0) = \varphi^0(x, y), (x, y) \in Q, \quad (2)$$

$$\phi(x, y, t) = \phi_r(x, y, t), (x, y) \in \partial Q, t \in (0, T]. \quad (3)$$

上述对流扩散方程可以用来模拟大气、海洋及江河的污染, 也可用以描述化工、冶金中的传热、传质问题。下面我们就利用分步方法来建立分步解析计算格式。

按照 Yanenko 提出的求解多变量问题的分步方法^[8], 可将初边值问题(1)–(3)式的求解化为依次求解下列问题:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + u \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + v \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in Q, t \in \left(n\Delta t, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right], \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \right) + f, \quad (x, y) \in Q, t \in \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t, (n+1)\Delta t \right]. \quad (5)$$

相应的初值条件为

$$\phi_1(x, y, n\Delta t) = \phi(x, y, n\Delta t), (x, y) \in Q, \quad (6)$$

$$\phi_2\left(x, y, \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta t\right) = \phi_1\left(x, y, \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta t\right), (x, y) \in Q, \quad (7)$$

$$\phi(x, y, (n+1)\Delta t) = \phi_2(x, y, (n+1)\Delta t), (x, y) \in Q, \quad (8)$$

其中 $n = 0, 1, \dots, N_T, N_T \Delta t = T, \Delta t$ 为时间步长。

经过分步处理后, 就可以通过求解方程(4)及(5)来建立分步解析格式。

1. 计算对流的特征线方法

(1) 方法 让我们先考虑更一般的情况

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = g, \quad t \in \left(n\Delta t, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right], \quad (9)$$

其中 (u, v) 及 g 为自变量 (x, y, t) 的已知函数。

在时间 $t = n\Delta t$ 到 $t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t$ 内求解方程(9)需要给出 f 在 $t = n\Delta t$ 上的初值以及边界 ∂Q 之某一部分 ∂Q^- 上的值, 在边界 ∂Q^- 上 $V \cdot n < 0$, n 为外法线单位矢量.

沿特征线

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2u, \\ \frac{dy}{dt} &= 2v, \end{aligned} \quad t \in \left(n\Delta t, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right]. \quad (10)$$

方程(9)可以写成

$$\frac{df}{dt} = g, \quad t \in \left(n\Delta t, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right]. \quad (11)$$

我们可以导出 $f^{n+\frac{1}{2}}$ 在离散网格上结点值的计算格式.

对如图(1)所示的任一网格结点 $p(x_p, y_p)$, 我们通过反向求解方程(10)来确定特征线 $\tilde{p}p$.

反向特征线方法可以做到非常准确(如用龙格-库塔方法), 并且对不规则网格也适用.

从 $t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t$ 到 $t = n\Delta t$ 积分方程(10), 并注意到沿特征线 $\tilde{p}p$

$$\begin{aligned} x\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) &= x_p, \\ y\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) &= y_p. \end{aligned} \quad (12)$$

可以得到 $\tilde{p}(\tilde{x}_p, \tilde{y}_p)$.

沿特征线 $\tilde{p}p$ 求解方程(11), 并注意到初始条件

$$f(n\Delta t) = f(\tilde{x}_p, \tilde{y}_p, n\Delta t), \quad (13)$$

可以得到 f 在 p 点上的值

$$f_p^{n+\frac{1}{2}} = f\left(x_p, y_p, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) = f(\tilde{x}_p, \tilde{y}_p, n\Delta t) + \int_{n\Delta t}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t} g dt. \quad (14)$$

当特征线 $\tilde{p}p$ 穿过边界时, 须考虑边界条件求解.

(2) 对流分步上的应用 在这一分步数值求解方程(4)就是显式离散下列方程:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + 2u^n \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + 2v^n \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in Q, \quad t \in \left(n\Delta t, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right]. \quad (15)$$

将上述公式(14)直接应用于求解方程(15)可得

$$\phi_{1p}^{n+\frac{1}{2}} = \phi_1(\tilde{x}_p, \tilde{y}_p, n\Delta t), \quad (16)$$

上述格式显式而又无条件 L_∞ 稳定.

2. 求解扩散的有限分析方法

在后半分步, 我们用子区域 D 内热传导问题的解析解建立计算格式.

考虑下列定解问题:

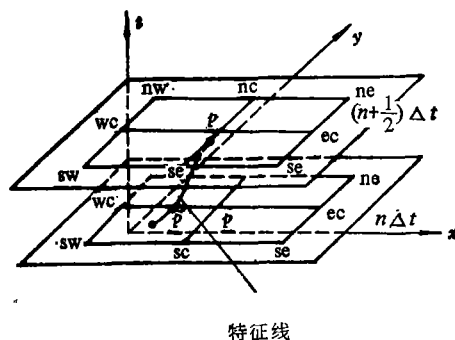


图1 分步解析格式的子区域网格

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \right) + f_p, \quad (x, y) \in D, \quad t \in \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t, (n+1)\Delta t \right], \quad (17)$$

$$\phi_2 \left(x, y, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) = \phi_1 \left(x, y, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right), \quad (x, y) \in D, \quad (18)$$

$$\phi_2(x, y, t) = \phi_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t \in \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t, (n+1)\Delta t \right], \quad (19)$$

其中 $D = \{(x, y): |x| < h, |y| < k\}$.

将初边值条件用分块线性函数近似, 如:

$$\begin{aligned} \phi_2 \left(x, y, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) &= \phi_{1p}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\phi_{1ec}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_{1p}^{n+\frac{1}{2}}}{h} x + \frac{\phi_{1nc}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_{1p}^{n+\frac{1}{2}}}{k} y \\ &+ \frac{\phi_{1p}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{1nc}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_{1ec}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_{1ec}^{n+\frac{1}{2}}}{h \cdot k} x \cdot y, \quad x \in [0, h], \quad y \in [0, k], \end{aligned} \quad (20)$$

.....

$$\begin{aligned} \phi_2(x, k, t) &= \phi_{1nc}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\phi_{1nc}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_{1nc}^{n+\frac{1}{2}}}{h} x + \frac{\phi_{2nc}^{n+1} - \phi_{1nc}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} t \\ &+ \frac{\phi_{2nc}^{n+1} + \phi_{1nc}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_{1nc}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_{2nc}^{n+1}}{h \cdot \Delta t/2} x \cdot t, \\ &x \in [0, h], \quad t \in [0, \Delta t/2], \end{aligned} \quad (21)$$

.....

应用分离变量方法求解(17)–(19)式, 可得

$$\phi_2(x, y, t) = F(x, y, t, k, h, \Delta t, f_p, \phi_{1p_i}^{n+\frac{1}{2}}, \phi_{2p_i}^{n+1}). \quad (22)$$

其中 $i = ne, nw, nc, se, sw, sc, ec, wc, p; j = ne, nw, nc, se, sw, sc, ec, wc$.

由上式立即可导出

$$\begin{aligned} \phi_{2p}^{n+1} &= C_{nc}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \phi_{1nc}^{n+\frac{1}{2}} + C_{nw}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \phi_{1nw}^{n+\frac{1}{2}} + C_{nc}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \phi_{1nc}^{n+\frac{1}{2}} + C_{sc}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \phi_{1sc}^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ C_{sw}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \phi_{1sw}^{n+\frac{1}{2}} + C_{sc}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \phi_{1sc}^{n+\frac{1}{2}} + C_{ec}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \phi_{1ec}^{n+\frac{1}{2}} + C_{wc}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \phi_{1wc}^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ C_{nc}^{n+1} \cdot \phi_{2nc}^{n+1} + C_{nw}^{n+1} \cdot \phi_{2nw}^{n+1} + C_{sc}^{n+1} \cdot \phi_{2sc}^{n+1} + C_{sw}^{n+1} \cdot \phi_{2sw}^{n+1} + C_{nc}^{n+1} \cdot \phi_{2nc}^{n+1} \\ &+ C_{sc}^{n+1} \cdot \phi_{2sc}^{n+1} + C_{ec}^{n+1} \cdot \phi_{2ec}^{n+1} + C_{wc}^{n+1} \cdot \phi_{2wc}^{n+1} + C_f \cdot f_p + C_p \cdot \phi_{1p}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中系数 $C_{nc}^{n+\frac{1}{2}}, \dots, C_{wc}^{n+1}, C_f, C_p$ 是与结点值 $\phi_{1p_i}^{n+\frac{1}{2}}, \phi_{2p_i}^{n+1}$ 无关的常数, 其表达式如下:

$$\begin{cases} C_{nc}^{n+\frac{1}{2}} = C_{nw}^{n+\frac{1}{2}} = C_{sc}^{n+\frac{1}{2}} = C_{sw}^{n+\frac{1}{2}} = E_0 - E_1, \\ C_{nc}^{n+\frac{1}{2}} = C_{sc}^{n+\frac{1}{2}} = E_2 - 2E_0, \quad C_{ec}^{n+\frac{1}{2}} = C_{wc}^{n+\frac{1}{2}} = E_3 - 2E_0, \\ C_{nc}^{n+1} = C_{nw}^{n+1} = C_{sc}^{n+1} = C_{sw}^{n+1} = E_1 - \frac{1}{4}, \\ C_{nc}^{n+1} = C_{sc}^{n+1} = \frac{1}{2} - E_2, \quad C_{ec}^{n+1} = C_{wc}^{n+1} = \frac{1}{2} - E_3, \quad C_p = 4E_0, \\ C_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{16 \cdot (1 - e^{-\nu(\lambda_{2m-1}^2 + \tilde{\lambda}_{2n-1}^2)\Delta t})}{(2m-1)(2n-1)\pi^2\nu(\lambda_{2m-1}^2 + \tilde{\lambda}_{2n-1}^2)}, \\ E_0 = \frac{16}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu\lambda_{2m-1}^2\Delta t}}{(2m-1)^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu\tilde{\lambda}_{2n-1}^2\Delta t}}{(2n-1)^2}, \\ E_1 = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{1 - e^{-\nu(\lambda_{2m-1}^2 + \tilde{\lambda}_{2n-1}^2)\Delta t}}{(2m-1)(2n-1)\nu\Delta t\pi^2(\lambda_{2m-1}^2 + \tilde{\lambda}_{2n-1}^2)} \end{cases} \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \cdot \left(\frac{2 \times (-1)^{m-1}}{(2m-1)\pi} + \frac{2 \times (-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} - 1 \right), \\ \tilde{\lambda}_{2m-1} &= \frac{2n-1}{2k} \pi, \\ E_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 16 (1 - e^{-v(\lambda_{2m-1}^2 + \tilde{\lambda}_{2n-1}^2)\Delta t})}{(2n-1)(2m-1)^2 \pi^3 v \Delta t (\lambda_{2m-1}^2 + \tilde{\lambda}_{2n-1}^2)}, \\ E_3 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} 16 (1 - e^{-v(\lambda_{2m-1}^2 + \tilde{\lambda}_{2n-1}^2)\Delta t})}{(2m-1)(2n-1)^2 \pi^3 v \Delta t (\lambda_{2m-1}^2 + \tilde{\lambda}_{2n-1}^2)}, \\ \lambda_{2m-1} &= \frac{2m-1}{2h} \pi. \end{aligned} \right.$$

三、分步解析方法的稳定性和收敛性

分步解析格式的稳定性、收敛性由分步解析系数确定,为此我们先研究一下分步解析格式系数所具有的性质。利用最大值最小值原理^[17]很容易证明:

定理 1. 分步解析系数满足

$$1. \quad C_{nc}^{n+\frac{1}{2}} + C_{nw}^{n+\frac{1}{2}} + \cdots + C_{cc}^{n+1} + C_{wc}^{n+1} + C_p = 1, \quad (25)$$

$$2. \quad 0 < (C_{nc}^{n+\frac{1}{2}}, \dots, C_{wc}^{n+1}, C_p) < 1, C_f > 0. \quad (26)$$

定理 2. 分步解析格式无条件 L_{∞} 稳定。

证。前半分步特征线方法所具有的误差显然满足

$$|\varepsilon_p^{n+\frac{1}{2}}| \leq |\varepsilon^n|_{\max},$$

即

$$|\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}|_{\max} \leq |\varepsilon^n|_{\max}, \quad (27)$$

后半分步格(23)式的误差方程为

$$\varepsilon_p^{n+1} = C_{nc}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_{nc}^{n+\frac{1}{2}} + \cdots + C_{wc}^{n+1} \cdot \varepsilon_{wc}^{n+1} + C_p \cdot \varepsilon_p^{n+\frac{1}{2}}. \quad (28)$$

由定理 1 可得

$$\begin{aligned} |\varepsilon_p^{n+1}| &\leq C_{nc}^{n+\frac{1}{2}} \cdot |\varepsilon_{nc}^{n+\frac{1}{2}}| + \cdots + C_{wc}^{n+1} \cdot |\varepsilon_{wc}^{n+1}| + C_p \cdot |\varepsilon_p^{n+\frac{1}{2}}| \\ &\leq (C_{nc}^{n+\frac{1}{2}} + \cdots + C_{wc}^{n+\frac{1}{2}} + C_p) \cdot |\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}|_{\max} \\ &\quad + (C_{nc}^{n+1} + \cdots + C_{wc}^{n+1}) \cdot |\varepsilon^{n+1}|_{\max}. \end{aligned} \quad (29)$$

由 p 点任意性知

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{n+1}|_{\max} &\leq (C_{nc}^{n+\frac{1}{2}} + \cdots + C_{wc}^{n+\frac{1}{2}} + C_p) \cdot |\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}|_{\max} \\ &\quad + (C_{nc}^{n+1} + \cdots + C_{wc}^{n+1}) \cdot |\varepsilon^{n+1}|_{\max}, \end{aligned}$$

即

$$|\varepsilon^{n+1}|_{\max} \leq |\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}|_{\max}. \quad (30)$$

从(27),(30)式可得

$$|\varepsilon^{n+1}|_{\max} \leq |\varepsilon^n|_{\max},$$

这即说明分步解析格式无条件 L_{∞} 稳定。

定理 3. 分步解析格式与微分方程(1)相容,截断误差满足

$$R_{ij} = O(\Delta t + h^2 + k^2). \quad (31)$$

证。分步过程与前半分步特征线方法引入的截断误差不超过 $O(\Delta t)$ 。

后半分步相应的微分方程(5)及有限分析格式(23)可以分别改写为

$$L\phi_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \right) = f, \quad (32)$$

$$L_{\Delta}\phi_{2p} = \frac{1}{C_f} [\phi_{2p}^{n+1} - C_{nc}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \phi_{inc}^{n+\frac{1}{2}} - \dots - C_{wc}^{n+1} \cdot \phi_{2wc}^{n+1}] = f_p. \quad (33)$$

设 $\phi_2(x, y, t)$ 和 $\phi_2^*(x, y, t)$ 分别满足

$$L\phi_2 = f, (x, y) \in D, t \in \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t, (n+1)\Delta t \right],$$

$$\phi_2|_{\partial D} = \phi_r(x, y, t), (x, y) \in \partial D, t \in \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t, (n+1)\Delta t \right],$$

$$\phi_2 \left(x, y, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) = \phi_1 \left(x, y, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right), (x, y) \in D,$$

$$L\phi_2^* = f, (x, y) \in D, t \in \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t, (n+1)\Delta t \right],$$

$$\phi_2^*|_{\partial D} = \phi_r^*(x, y, t), (x, y) \in \partial D, t \in \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t, (n+1)\Delta t \right]$$

$$\phi_2^* \left(x, y, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) = \phi_1^* \left(x, y, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right), (x, y) \in D,$$

其中 $\phi_2^*(x, y, t)$ 与 $\phi_1^* \left(x, y, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right)$ 是表示近似初边值条件的分块线性函数(20)与(21)式.

$$\begin{aligned} R_{ij}^{(1)} &= |L_{\Delta}\phi_{2p} - L\phi_{2p}| = |L_{\Delta}\phi_{2p} - L_{\Delta}\phi_{2p}^* + L_{\Delta}\phi_{2p}^* - L\phi_{2p}| \\ &= \frac{1}{C_f} |\phi_{2p}^{n+1} - \phi_{2p}^{*n+1}|, \end{aligned} \quad (34)$$

根据量级分析可知

$$R_{ij}^{(2)} \leq M_1 \Delta t + M_2 (h^2 + k^2). \quad (35)$$

将(23)式中的前半分步上的结点值用(16)式算出的结果来代替,可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Delta}\phi_p &= \frac{1}{C_f} [\phi_p^{n+1} - C_{nc}^{n+1} \cdot \phi_{nc}^{n+1} - \dots - C_{wc}^{n+1} \cdot \phi_{wc}^{n+1} - C_{nc}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \phi(\widetilde{x_p + k}, \\ &\quad \widetilde{y_p + k}, n\Delta t) - \dots - C_{wc}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \phi(\widetilde{x_p - h}, \widetilde{y_p}, n\Delta t) \\ &\quad - C_p \phi(\widetilde{x_p}, \widetilde{y_p}, n\Delta t)], \end{aligned} \quad (36)$$

引入算子符号

$$\mathcal{L}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = f. \quad (37)$$

于是

$$R_{ij} = \mathcal{L}_{\Delta}\phi_p - \mathcal{L}\phi_p \leq M(\Delta t + h^2 + k^2), \quad (38)$$

其中 M 为一个与 M_1, M_2 有关的常数.

线性对流扩散方程(1)的分步解析格式有下列比较原理^[27]:

定理 4. 若

$$1. \mathcal{L}_{\Delta}\phi_p^* \geq 0 (\leq 0), \quad (39)$$

$$2. \phi_{ij}^*|_{r_h} \geq 0 (\leq 0), \phi_{ij}^0 \geq 0 (\leq 0), \quad (40)$$

$$3. \phi_{ij}^* \approx \text{常数}, \quad (41)$$

则在内结点上 $\phi_{ij}^n \geq 0 (\leq 0)$. (42)

由定理 4 可以得出下列推论.

推论 1. 线性对流扩散方程(1)的分步解析解存在唯一.

定理 5. 对于线性对流扩散方程(1), 其相应的分步解析格式收敛, 且有误差估计

$$|\varepsilon_{ij}^n| \leq M(\Delta t + h^2 + k^2) \cdot T, \quad (43)$$

其中 M 与定理 3 中 M 一致, T 为计算时间.

证. 设 ε_{ij}^n 为误差, 则由定理 3 知

$$|\mathcal{L}_\Delta \varepsilon_{ij}^n| = R_{ij} \leq M(\Delta t + h^2 + k^2), \quad (44)$$

$$\varepsilon_{ij}^n|_{r_h} = \varepsilon_{ij}^0 = 0. \quad (45)$$

令

$$\varepsilon = M(\Delta t + h^2 + k^2)t,$$

则

$$\mathcal{L}_\Delta \varepsilon_{ij}^n \geq \pm \mathcal{L}_\Delta \varepsilon_{ij}^n,$$

$$\varepsilon_{ij}^n|_{r_h} \geq \varepsilon_{ij}^n|_{r_h} = \varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^0 = 0,$$

于是按比较定理 4 即有

$$|\varepsilon_{ij}^n| \leq \varepsilon_{ij}^n \leq M(\Delta t + h^2 + k^2)t,$$

即

$$|\varepsilon_{ij}^n| \leq M(\Delta t + h^2 + k^2) \cdot T.$$

上面的结论适合于线性问题. 对于非线性问题, 下面我们从另一途径来证明分步解析格式的收敛性, 进而给出解的误差估计.

定理 6. 若分步合适, 即分步后的对流问题适定, 则分步解析解存在唯一.

证. 由于分步后的对流问题适定, 从而用特征线方法求解的前半分步格(16)式给出唯一解, 后半分步格(23)式由于存在类似定理 4 的比较原理, 所以也给出唯一解, 如此分步解析解可知存在唯一.

定理 7. 对于适定的非线性对流扩散方程

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi = & \frac{\partial \phi}{\partial t} + u(x, y, t, \phi, \phi_x, \phi_y) \frac{\partial \phi}{\partial x} + v(x, y, t, \phi, \phi_x, \phi_y) \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ & - v \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = f \end{aligned}$$

构成的定解问题, 其中 $f(x, y, t)$, $u(x, y, t, \phi, q, r)$ 及 $v(x, y, t, \phi, q, r)$ 为连续可微多元函数. 那么, 如果分步合适, 则分步解析格式收敛, 且有误差估计

$$|\varepsilon_{ij}^n| \leq M_0(\Delta t + h^2 + k^2) \cdot T,$$

其中 M_0 为一确定常数, $T = n\Delta t$.

证. 设 $\tilde{\phi}_p$ 为由分步解析解扩展成的充分光滑函数, ϕ_p 为准确解, 于是有

$$\mathcal{L}_\Delta \tilde{\phi}_p = \mathcal{L} \tilde{\phi}_p + R_{ij} = f_p, \quad \mathcal{L} \phi_p = f_p,$$

逐知

$$\mathcal{L} \tilde{\phi}_p - \mathcal{L} \phi_p = -R_{ij}. \quad (46)$$

令

$$\begin{aligned} F(x, y, t, \phi, p, q, r, s, z) = & p + u(x, y, t, \phi, q, r)s \\ & + v(x, y, t, \phi, q, r)r - v(s + z), \end{aligned}$$

则 F 为其自变量的连续可微多元函数, 于是(46)式可改写成

$$\begin{aligned} F(x_p, y_p, t, \tilde{\phi}_p, \tilde{\phi}_{x_p}, \tilde{\phi}_{y_p}, \tilde{\phi}_{xx_p}, \tilde{\phi}_{yy_p}) \\ - F(x_p, y_p, t, \phi_p, \phi_{x_p}, \phi_{y_p}, \phi_{xx_p}, \phi_{yy_p}) = -R_{ij}. \end{aligned}$$

考虑到 $\varepsilon = \phi - \tilde{\phi}$, 于是应用中值定理可得

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}'\varepsilon)_p &= \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial \phi}\bigg|_0 \cdot \varepsilon_p + \frac{\partial F}{\partial q}\bigg|_0 \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial r}\bigg|_0 \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)_p - \nu(\Delta \varepsilon)_p \\ &= R_{ij}, \end{aligned}$$

其中 $\phi_0 = \tilde{\phi}_p + \theta(\phi_p - \tilde{\phi}_p)$, $\phi_{x_0} = \tilde{\phi}_{xp} + \theta(\phi_{xp} - \tilde{\phi}_{xp})$,
 $\phi_{y_0} = \tilde{\phi}_{yp} + \theta(\phi_{yp} - \tilde{\phi}_{yp})$, $\theta \in (0, 1)$.

如此得 $\mathcal{L}'\varepsilon = R = O(R_{ij})$, (47)

$$\varepsilon|_T = o(R_{ij}), \quad (48)$$

其中 $\mathcal{L}'$ 为一线性算子, 可写成

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'\varepsilon &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + A(x, y, t) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + B(x, y, t) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \\ &\quad + C(x, y, t) \cdot \varepsilon - \nu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (49)$$

A, B, C 皆为连续可微函数.

应用线性方程的估计立即可知

$$\|\varepsilon\|_{\max} \leq T \cdot (\|R\|_0 + \|\varepsilon\|_T),$$

逐有 $|\varepsilon_{ij}^*| \leq M_0(\Delta t + h^2 + k^2) \cdot T$, (50)

其中 M_0 为一个与定理 5 中类似的常数, T 为计算时间.

四、结 论

将对流扩散方程按不同性质的算子进行分步, 然后分别用解析方法建立的分步解析格式无条件 L_∞ 稳定, 对线性方程以及非线性方程, 分步解析格式收敛, 且有误差估计 (43) 和 (50) 式.

参 考 文 献

- [1] 吴江航, 韩庆书, 计算流体力学的理论、方法及应用, 科学出版社, 1988.
- [2] Christie, I. et al., *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, 10(1976), 1389—1396.
- [3] Heinrich, J. C. et al., *ibid.*, 11(1977), 131—143.
- [4] Heinrich, J. C. & Zienkiewicz, O. C., *ibid.*, 11(1977), 1831—1844.
- [5] Leonard, B. P., *Comp. Meth. in App. Mech. and Eng.*, 19(1979), 59—98.
- [6] Chen, C. J., Naseri-Neshat, H. & Ho, K. S., *Int. J. Numerical Heat Transfer*, 4(1981), 179—197.
- [7] Chen, C. J. & Chen, H. C., *Journal of Computational Physics*, 53(1984), 209—226.
- [8] Yanenko, N. N., *The Method of Fractional Steps*, English Translation (Ed. Holt, M.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1971.
- [9] Varoglu, E. & Finn, W. L., *Journal of Computational Physics*, 34(1980), 371—389.
- [10] Neuman, S. P., *Journal of Computational Physics*, 41(1981), 270—294.
- [11] Benqué, J. P., Labadie, G. & Ronat, J., *Proc. 4th. Int. Symp. on Finite Element Methods in Flow Problems*, Tokyo, 1982, 295—301.
- [12] Baptista, A. M., Adams, E. E. & Stolzenbach, K. D., *Tech. Rep.*, 296, Ralph M. Parsons Lab., MIT, USA, 1984.
- [13] Cheng, R. T., Casulli, V. & Milford, S., *Water Resources Research*, 28(1984), 944—957.
- [14] 吴江航, 计算物理, 2(1985), 205—213.
- [15] Wu Jianghang (吴江航) & Chen Kaiqi (陈凯麒), *Papers presented at the International Conference on Numerical and Hydraulic Modelling of Ports and Harbours*, Birmingham, England, 23—25 April 1985, BHRA, 101—109.
- [16] Wu, J. H. (吴江航), *Lecture Notes in Physics* 264, Springer-Verlag, 1986, 660—665.
- [17] Protter, M. H. & Weinberger, H. F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1984.