

关于波利雅峰

庄 圻 泰

(北京大学数学系)

摘 要

本文主要结果可叙述如下:

设函数 $f(x)$ 于 $x \geq x_0$ 连续, 设 $U(x)$ 于 $x \geq x_0$ 为正、连续、增函数, 并且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \infty.$$

则按照

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{U(x)} = 0 \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{U(x)} = 0,$$

函数 $f(x)$ 分别有一个关于 $U(x)$ 的上波利雅峰序列或有一个关于 $U(x)$ 的下波利雅峰序列 (参阅定义 3).

引 言

波利雅峰的概念起源于 G. Pólya 的一个关于序列的定理^[1]. S. M. Shah^[2] 首先得到关于一个连续变数的函数与 Pólya 定理相应的定理, 后又由 A. Edrei 与 W. H. J. Fuchs 独立地得到^[3]. A. Edrei 给出了波利雅峰的序列的定义并证明了它的存在性^[4; a, b]. 波利雅峰的概念在近代的亚纯函数的理论中起着重要的作用. 本文的目的是阐明波利雅峰的概念与型函数的概念的密切联系, 并给出关于波利雅峰的几个已知定理的一些推广.

一、关于型函数的两个定理

定义 1. 设函数 $f(x)$ 于 $x \geq a$ 有定义. 我们说 $f(x)$ 于 $x \geq a$ 为分段连续可微, 如果存在一个序列 $x_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 满足

$$x_0 = a, \quad x_n < x_{n+1} (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty,$$

并且对于每一值 n , 在区间 $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ 上 $f(x)$ 恒等于一个在此区间上为连续可微的函数 $g_n(x)$.

定义 2. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 为定义于 $x \geq a$ 的函数, 我们说 $g(x)$ 上连系于 $f(x)$, 如果存在一数 $A (A \geq a)$ 及一趋于 ∞ 的序列 $x_n (x_n \geq a) (n = 1, 2, \dots)$, 使

$$f(x) \leq g(x) (x \geq A), \quad f(x_n) = g(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

定理 1. 设 $f(x)$ 于 $x \geq x_0$ 为连续的函数, 并且 $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. 又设 $\eta(x)$ 于 $x \geq x_0$ 为正

的、连续的函数, 并且 $\int_{x_0}^{\infty} \eta(x) dx$ 发散. 则存在一函数 $F(x)$ 满足下列条件:

- 1) $F(x)$ 于 $x \geq x_0$ 为单调、分段连续可微并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$.
- 2) $|F'(x)| < \eta(x) \quad (x \geq x_0)$.
- 3) $F(x)$ 上连系于 $f(x)$.

证. 考虑函数

$$y = \varphi(x) = \int_{x_0}^x \eta(u) du \quad (x \geq x_0)$$

及其反函数 $x = \phi(y) \quad (y \geq 0)$. 易知函数 $g(y) = f\{\phi(y)\} \quad (y \geq 0)$ 满足文献 [5; b] 的定理 4 的假设条件. 故存在一函数 $G(y)$ 满足此定理的结论中的前两个条件及关于 $g(y)$ 的第三个条件. 易知函数 $F(x) = G\{\varphi(x)\} \quad (x \geq x_0)$ 即满足定理 1 中三个条件.

定理 2. 设函数 $f(x)$, $\gamma(t)$, $\delta(y)$ 及 $\varphi(y)$ 分别满足下列条件:

$f(x)$ 于 $x \geq x_0 \quad (x_0 > 0)$ 为连续并且 $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

$\gamma(t)$ 于 $t \geq t_0 \quad (t_0 > 0)$ 为正、连续、非增, 并且 $\int_{t_0}^{\infty} \gamma(t) dt$ 收敛.

$\delta(y)$ 于 $y \geq y_0 \quad (y_0 > 0)$ 为正、连续、非增, 并且 $\int_{y_0}^{\infty} \delta(y) dy$ 发散.

$\varphi(y)$ 于 $y \geq y_0$ 为连续、增, 并且 $\varphi(y_0) = x_0, \lim_{y \rightarrow \infty} \varphi(y) = \infty$.

则存在一函数 $F(x)$ 满足下列条件:

1) $F(x)$ 于 $x \geq x_0$ 为连续、非减并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$.

2) $F(x) \geq t_0 \quad (x \geq x_0)$.

3) $F\{\varphi[\phi(x) + \gamma(F(x))]\} - F(x) < \delta\{\phi(x)\} \quad (x \geq x_0)$, 其中 $\phi(x) \quad (x \geq x_0)$ 为 $\varphi(y)$ 的反函数.

4) $F(x)$ 上连系于 $f(x)$.

证. 定义函数 $f_1(y) \quad (y \geq 0)$, $\gamma_1(t) \quad (t \geq 0)$ 及 $\delta_1(y) \quad (y \geq 0)$ 如下:

$$f_1(y) = f(x_0) \quad (0 \leq y < y_0), \quad f_1(y) = f\{\varphi(y)\} \quad (y \geq y_0),$$

$$\gamma_1(t) = \gamma(t_0) \quad (0 \leq t < t_0), \quad \gamma_1(t) = \gamma(t) \quad (t \geq t_0),$$

$$\delta_1(y) = \delta(y_0) \quad (0 \leq y < y_0), \quad \delta_1(y) = \delta(y) \quad (y \geq y_0).$$

显然 $f_1(y)$, $\gamma_1(t)$, $\delta_1(y)$ 分别满足文献 [5; b] 的定理 3 的假设条件. 故存在一函数 $F_1(y) \quad (y \geq 0)$ 满足此定理关于 $\gamma_1(t)$, $\delta_1(y)$ 和 $f_1(y)$ 的条件的结论. 取一适当的值 $y_1 > 0$, 使

$$F_1(y) > t_0 \quad (y \geq y_1)$$

然后定义一函数 $F_1^*(y) \quad (y \geq 0)$ 如下:

$$F_1^*(y) = F_1(y_1) \quad (0 \leq y < y_1), \quad F_1^*(y) = F_1(y) \quad (y \geq y_1),$$

并设

$$F(x) = F_1^*\{\phi(x)\} \quad (x \geq x_0).$$

则易知 $F(x)$ 满足定理 2 的 1), 2), 4). 再注意由不等式

$$F_1(y + \gamma_1[F_1(y)]) - F_1(y) < \delta_1(y) \quad (y \geq 0), \quad (1)$$

可以推出

$$F_1^*(y + \gamma_1[F_1^*(y)]) - F_1^*(y) < \delta_1(y) \quad (y \geq 0). \quad (2)$$

事实上, 若 $y \geq y_1$, 则 (2) 式即为 (1) 式. 现设 $0 \leq y < y_1$, 并分别两种情形: 若

$$y + \gamma_1[F_1(y_1)] < y_1,$$

则 (2) 式的左边为零. 若

$$y + \gamma_1[F_1(y_1)] \geq y_1,$$

则 (2) 式的左边为

$$F_1(y + \gamma_1[F_1(y_1)]) - F_1(y_1) \leq F_1(y_1 + \gamma_1[F_1(y_1)]) - F_1(y_1) < \delta_1(y_1) \leq \delta_1(y).$$

我们有

$$\begin{aligned} F\{\varphi[\phi(x) + \gamma(F(x))]\} &= F_1^*\{\phi(x) + \gamma(F(x))\} \\ &= F_1^*\{\phi(x) + \gamma_1[F_1^*(\phi(x))]\} < F_1^*\{\phi(x)\} + \delta_1\{\phi(x)\} \\ &= F(x) + \delta\{\phi(x)\} \quad (x \geq x_0). \end{aligned}$$

二、定理 1 的几个推论

定义 3. 设函数 $f(x)$ 及 $U(x)$ 定义于 $x \geq a$, 其中 $U(x)$ 于 $x \geq a$ 为增并且无界. 我们称一个序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 为 $f(x)$ 的一个关于 $U(x)$ 的上波利雅峰序列, 如果

$$x_n > a (n = 1, 2, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty,$$

并且存在三个序列 $x'_n, x''_n, \varepsilon_n (n = 1, 2, \dots)$ 满足下列条件:

- 1) $a < x'_n < x_n < x''_n, \quad \varepsilon_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$
- 2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x'_n, U(x_n) - U(x'_n)$ 及 $U(x''_n) - U(x_n)$ 均趋于 ∞ 并且 ε_n 趋于 0.
- 3) 对于每一值 n , 有

$$f(x) \leq f(x_n) + \varepsilon_n \quad (x'_n < x < x''_n). \quad (3)$$

类似地可以给出序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 为 $f(x)$ 的一个关于 $U(x)$ 的下波利雅峰序列的定义, 不同处只是将 (3) 式换为

$$f(x) \geq f(x_n) - \varepsilon_n \quad (x'_n < x < x''_n).$$

定理 3. 设 $f(x)$ 于 $x \geq x_0 (x_0 > 0)$ 为连续函数, 并且

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

则 $f(x)$ 有一个关于 x 的上波利雅峰序列.

证. 取一值 $a > \max(1, x_0)$, 并定义函数 $\eta_0(x) (x \geq x_0)$ 如下:

$$\eta_0(x) = \frac{1}{a \log a} \quad (x_0 \leq x < a), \quad \eta_0(x) = \frac{1}{x \log x} \quad (x \geq a).$$

根据定理 1 存在一函数 $G(x)$ 满足下列条件:

- 1) $G(x)$ 于 $x \geq x_0$ 为分段连续可微, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = 0$.
- 2) $|G'(x)| < \eta_0(x) \quad (x \geq x_0).$
- 3) 存在一值 $X > x_0$ 及一趋于 ∞ 的序列 $x_n (x_n > 2X) (n = 1, 2, \dots)$, 使

$$f(x) \leq xG(x) \quad (x \geq X), \quad f(x_n) = x_n G(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

我们有

$$(xG(x))' = xG'(x) + G(x), \quad |(xG(x))'| < \frac{1}{\log x} + |G(x)| \quad (x \geq a),$$

故有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (xG(x))' = 0.$$

令

$$m_n = \sup_{\frac{x_n}{2} \leq x \leq \frac{3x_n}{2}} |(xG(x))'|,$$

$$p_n = \max\left(\frac{2}{x_n}, \sqrt{m_n}\right),$$

则

$$\frac{x_n}{2} \leq x_n - \frac{1}{p_n} < x_n < x_n + \frac{1}{p_n} \leq \frac{3x_n}{2}.$$

故当

$$x_n - \frac{1}{p_n} < x < x_n + \frac{1}{p_n}$$

时,有

$$f(x) - f(x_n) \leq xG(x) - x_nG(x_n) \leq \frac{m_n}{p_n} \leq \sqrt{m_n}.$$

由于

$$m_n \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = 0,$$

故序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 为函数 $f(x)$ 的一个关于 x 的上波利雅峰序列.

系理 1. 设 $f(x)$ 于 $x \geq x_0$ 为连续函数, 设 $U(x)$ 于 $x \geq x_0$ 为正、连续、增函数, 并且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \infty.$$

如果

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{U(x)} = 0, \quad (4)$$

则 $f(x)$ 有一个关于 $U(x)$ 的上波利雅峰序列.

证. 设 $V(y)$ ($y \geq y_0, y_0 = U(x_0)$) 为 $U(x)$ 的反函数, 并令

$$g(y) = f\{V(y)\} \quad (y \geq y_0),$$

则

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} \frac{g(y)}{y} = 0.$$

故根据定理 3, $g(y)$ 有一个关于 y 的上波利雅峰序列 $y_n (n = 1, 2, \dots)$, 使

$$y_n > y_0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty,$$

并且存在三个序列 $y'_n, y''_n, \varepsilon_n (n = 1, 2, \dots)$ 满足下列条件:

$$1) \quad y_0 < y'_n < y_n < y''_n, \quad \varepsilon_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $y'_n, y_n - y'_n$ 及 $y''_n - y_n$ 均趋于 ∞ 并且 ε_n 趋于 0.

3) 对于每一值 n , 有

$$g(y) \leq g(y_n) + \varepsilon_n \quad (y'_n < y < y''_n).$$

令

$$x_n = V(y_n), \quad x'_n = V(y'_n), \quad x''_n = V(y''_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

易知序列 $x_n, x'_n, x''_n, \varepsilon_n (n = 1, 2, \dots)$ 对于函数 $f(x)$ 及 $U(x)$ 满足定义 3 的有关条件, 故序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 即为 $f(x)$ 的一个关于 $U(x)$ 的上波利雅峰序列.

如果在系理 1 中将 (4) 式换为

$$l = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{U(x)}$$

为有穷, 则

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - lU(x)}{U(x)} = 0.$$

故根据系理 1, 函数 $f(x) - lU(x)$ 有一个关于 $U(x)$ 的上波利雅峰序列.

特别有

系理 2. 设 $f(x)$ 于 $x \geq x_0 (x_0 > 1)$ 为正、连续的函数, 并且

$$\rho = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\log f(x)}{\log x}$$

为有穷, 则函数 $\log f(x) - \rho \log x$ 有一个关于 $\log x$ 的上波利雅峰序列.

系理 3. 设 $f(x)$ 为一函数于 $x \geq x_0$ 为连续. 设 $U(x)$ 于 $x \geq x_0$ 为正、连续、增函数, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \infty$. 如果

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{U(x)} = 0, \quad (5)$$

则 $f(x)$ 有一个关于 $U(x)$ 的下波利雅峰序列.

证. 我们有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{-f(x)}{U(x)} = 0.$$

故根据系理 1, 函数 $-f(x)$ 有一个关于 $U(x)$ 的上波利雅峰序列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$. 易知此序列即为 $f(x)$ 的一个关于 $U(x)$ 的下波利雅峰序列.

如果在系理 3 中将条件 (5) 换为

$$l' = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{U(x)}$$

为有穷, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - l'U(x)}{U(x)} = 0.$$

故根据系理 3, 函数 $f(x) - l'U(x)$ 有一个关于 $U(x)$ 的下波利雅峰序列.

特别有

系理 4. 设 $f(x)$ 于 $x \geq x_0 (x_0 > 1)$ 为正、连续的函数, 并且

$$\rho' = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log f(x)}{\log x}$$

为有穷. 则函数 $\log f(x) - \rho' \log x$ 有一个关于 $\log x$ 的下波利雅峰序列.

三、定理 2 的几个推论

定理 4. 设 $f(x)$, $\gamma(t)$, $\delta(y)$ 及 $\varphi(y)$ 为分别满足定理 2 中条件的函数. 设 $\phi(x)$ 为 $\varphi(y)$ 的反函数, 则存在一值 $A (A \geq x_0)$ 及一趋于 ∞ 的序列 $x_n (x_n > A) (n = 1, 2, \dots)$, 使

$$f(x_n) \geq t_0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty,$$

并且对于每一值 n , 有

$$f(x) < f(x_n) + \delta\{\phi(x_n)\} \quad (A \leq x \leq X_n),$$

其中

$$X_n = \varphi[\phi(x_n) + \gamma(f(x_n))] > x_n.$$

证. 根据定理 2, 存在一函数 $F(x)$ 满足定理 2 中四个条件. 故存在一值 $A \geq x_0$ 及一趋于 ∞ 的序列 $x_n (x_n > A) (n = 1, 2, \dots)$, 使

$$f(x) \leq F(x) \quad (x \geq A), \quad f(x_n) = F(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

考虑一值 n 并设 $A \leq x \leq X_n$. 则

$$f(x) \leq F(x) \leq F(X_n) < F(x_n) + \delta\{\phi(x_n)\} = f(x_n) + \delta\{\phi(x_n)\}.$$

如果我们假定函数 $\varphi(y)$ 于 $y > y_0$ 有一个正的并且非减的导数 $\varphi'(y)$, 则可得 $X_n - x_n$ 的一个下界如下:

$$\begin{aligned} X_n - x_n &= \varphi[\phi(x_n) + \gamma(f(x_n))] - \varphi[\phi(x_n)] \\ &= \gamma\{f(x_n)\} \varphi'(\xi_n) \geq \gamma\{f(x_n)\} \varphi'[\phi(x_n)] = \frac{\gamma\{f(x_n)\}}{\phi'(x_n)}. \end{aligned}$$

系理 5. 设 $f(x)$, $\gamma(t)$, $\delta(y)$ 及 $\varphi(y)$ 为分别满足定理 2 中条件的函数. 设 $\phi(x)$ 为 $\varphi(y)$ 的反函数. 设 $U(x)$ 于 $x \geq x'_0 (x'_0 \geq x_0)$ 为正、连续、增函数, 并且

$$U(x'_0) = x_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \infty.$$

设 $V(\xi) (\xi \geq \xi_0, \xi_0 = x_0)$ 为 $U(x)$ 的反函数. 则存在一值 $A (A \geq x'_0)$ 及一趋于 ∞ 的序列

$$x_n (x_n > A) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

使

$$f(x_n) \geq t_0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

并且对于每一值 n 有

$$f(x) < f(x_n) + \delta\{\phi[U(x_n)]\} \quad (A \leq x \leq X'_n),$$

其中

$$X'_n = V\{\varphi[\phi(U(x_n)) + \gamma(f(x_n))]\} > x_n.$$

证. 考虑函数 $g(\xi) = f\{V(\xi)\} (\xi \geq \xi_0)$. 根据定理 4 存在一值 $a (a \geq \xi_0)$ 及一趋于 ∞ 的序列 $\xi_n (\xi_n > a) (n = 1, 2, \dots)$, 使

$$g(\xi_n) \geq t_0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(\xi_n) = \infty,$$

并且对于每一值 n , 有

$$g(\xi) < g(\xi_n) + \delta\{\phi(\xi_n)\} \quad (a \leq \xi \leq \xi_n),$$

其中

$$\xi_n = \varphi[\phi(\xi_n) + \gamma(g(\xi_n))] > \xi_n.$$

令

$$A = V(a) \geq x'_0, \quad x_n = V(\xi_n) > A \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则

$$\begin{aligned} x_n &> A \quad (n = 1, 2, \dots), & \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \infty, \\ f(x_n) &\geq t_0 \quad (n = 1, 2, \dots), & \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \infty. \end{aligned}$$

考虑一值 n , 并设 $A \leq x \leq X'_n$, 则

$$\begin{aligned} a = U(A) &\leq U(x) \leq U(X'_n) = \varphi[\phi(U(x_n)) + \gamma(f(x_n))] \\ &= \varphi[\phi(\xi_n) + \gamma(g(\xi_n))] = \xi_n, \end{aligned}$$

故有

$$f(x) = g\{U(x)\} < g(\xi_n) + \delta\{\phi(\xi_n)\} = f(x_n) + \delta\{\phi(U(x_n))\}.$$

如果函数 $\varphi(y)$ 于 $y > y_0$ 有一个正的并且非减的导数 $\varphi'(y)$, 则有

$$\begin{aligned} U(X'_n) - U(x_n) &= \varphi[\phi(U(x_n)) + \gamma(f(x_n))] - \varphi[\phi(U(x_n))] \\ &= \gamma(f(x_n))\varphi'(\zeta_n) \geq \gamma(f(x_n))\varphi'[\phi(U(x_n))] \\ &= \frac{\gamma(f(x_n))}{\phi'(U(x_n))}. \end{aligned}$$

四、Edrei 的一个定理的推广

定理 5. 设 $f(x)$ 于 $x \geq a$ 为连续函数, 设 $U(x)$ 为一函数定义于 $x \geq a$. 假定下列条件满足:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \infty, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

2) 函数 $f(x) + U(x)$ 于 $x \geq a$ 为非减.

则对于任意的数 $A > a$ 及 $d > 0$, 存在二值 x_0 及 x'_0 , 使

$$A < x_0 < x'_0, \quad U(x'_0) - U(x_0) > d,$$

并且

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (a \leq x \leq x'_0).$$

证. 首先注意函数 $f(x) + U(x)$ 的非减性, 对于任意二值 x_1, x_2 , 使 $a \leq x_1 < x_2$ 有

$$f(x_1) - f(x_2) \leq U(x_2) - U(x_1). \quad (6)$$

取一数 $m > \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, 则存在一值 $x_1 > A$, 使

$$f(x) \leq f(x_1) \quad (a \leq x \leq x_1), \quad f(x_1) > m + d.$$

然后可得一值 $x'_0 > x_1$, 使 $f(x'_0) < m$. 函数 $f(x)$ 于 $x_1 \leq x \leq x'_0$ 有一最大值, 故有一值 x_0 , 使

$$x_1 \leq x_0 < x'_0, \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (x_1 \leq x \leq x'_0),$$

则

$$A < x_0 < x'_0, \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (a \leq x \leq x'_0).$$

并由(6)式,有

$$U(x'_0) - U(x_0) \geq f(x_0) - f(x'_0) > (m+d) - m = d.$$

系理 6. 设函数 $f(x)$ 及 $U(x)$ 于 $x \geq a$ 满足定理 5 中条件. 如果 $U(x)$ 于 $x \geq a$ 为连续、增函数, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \infty$, 则 $f(x)$ 有一个关于 $U(x)$ 的上波利雅峰序列.

证. 取二序列 $A_n > a, d_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty.$$

根据定理 5, 对于每一值 n 存在二值 x_n 及 x''_n 满足

$$A_n < x_n < x''_n, \quad U(x''_n) - U(x_n) > d_n,$$

并且

$$f(x) \leq f(x_n) \quad (a \leq x \leq x''_n).$$

然后存在一值 x'_n , 满足

$$a < x'_n < x_n, \quad U(x'_n) = \frac{1}{2} \{U(a) + U(x_n)\}.$$

由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $U(x'_n) \rightarrow \infty$, 故 $x'_n \rightarrow \infty$; 并有

$$U(x_n) - U(x'_n) = \frac{1}{2} \{U(x_n) - U(a)\} \rightarrow \infty.$$

故序列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 为 $f(x)$ 的一个关于 $U(x)$ 的上波利雅峰序列.

系理 7. 设 $f(x)$ 于 $x \geq x_0$ ($x_0 > 1$) 为正、连续、非减的函数, 并且

$$\rho' = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log f(x)}{\log x} < \rho = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\log f(x)}{\log x},$$

则对于每一个满足条件 $\rho' \leq \lambda < \rho$ 的数 λ , 函数 $\log f(x) - \lambda \log x$ 有一个关于 $\log x$ 的上波利雅峰序列.

证. 先设 $\rho' < \lambda < \rho$. 令 $g(x) = \log f(x) - \lambda \log x$, 则显然有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty.$$

另外取一正数 $\mu > \lambda$, 则 $g(x) + \mu \log x$ 于 $x \geq x_0$ 为增. 故根据系理 6, $g(x)$ 有一个关于 $\mu \log x$ 的上波利雅峰序列, 即关于 $\log x$ 的上波利雅峰序列.

现在设 $\lambda = \rho'$, 显然只需证明: 任与一数 $X > x_0$ 及一数 $0 < \varepsilon < 1$, 使 $\rho' + \varepsilon < \rho$, 可得三个值 ξ_i ($i = 1, 2, 3$), 使

$$X < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3, \quad \log \xi_{i+1} - \log \xi_i \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (i = 1, 2),$$

并且

$$\log f(x) - \rho' \log x < \log f(\xi_2) - \rho' \log \xi_2 + \sqrt{\varepsilon} \quad (\xi_1 < x < \xi_3).$$

根据已证明的事实, 函数 $\log f(x) - (\rho' + \varepsilon) \log x$ 有一个关于 $\log x$ 的上波利雅峰序列. 故可得三值 ξ', ξ, ξ'' , 使

$$X < \xi' < \xi < \xi'', \quad \log \xi - \log \xi' > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \log \xi'' - \log \xi > \frac{1}{\varepsilon},$$

并且

$$\log f(x) - (\rho' + \varepsilon) \log x \leq \log f(\xi) - (\rho' + \varepsilon) \log \xi \quad (\xi' < x < \xi'')^1,$$

即

$$\log f(x) - \rho' \log x \leq \log f(\xi) - \rho' \log \xi + \varepsilon(\log x - \log \xi) \quad (\xi' < x < \xi'').$$

设 ξ_* 使

$$\xi < \xi_* < \xi'', \quad \log \xi_* - \log \xi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

则 $\xi_1 = \xi', \xi_2 = \xi, \xi_3 = \xi_*$, 即满足要求的条件.

定理 5 尚可推广如下:

定理 6. 设 $f(x)$ 及 $u(x)$ 于 $x \geq a$ 为连续函数. 设 $U(x)$ 为一函数定义于 $x \geq a$. 假定下列条件满足:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) + u(x)\} < \infty, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

$$2) u(x) \geq 0 \quad (x \geq a).$$

$$3) \text{函数 } f(x) + U(x) \text{ 于 } x \geq a \text{ 为非减.}$$

则对于任意的数 $A > a$ 及 $d > 0$, 存在二值 x_0 及 x'_0 , 使

$$A < x_0 < x'_0, \quad U(x'_0) - U(x_0) > d + u(x'_0),$$

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (a \leq x \leq x'_0).$$

这个定理的证明方法与定理 5 相同, 只是要取 $m > \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) + u(x)\}$ 并且取 $x'_0 > x_1$, 使 $f(x'_0) + u(x'_0) < m$.

作为定理 6 的一个推论, 让我们证明下列 Edrei 的定理^[4; c]:

设函数 $G(x)$ 于 $x \geq x_0 (x_0 > 1)$ 为正、连续并且非减. 设 σ 及 τ 为二数使 $0 < \sigma < \tau$. 假定

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{x^\tau} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{x^\sigma} = 0.$$

则对于任意的数 $A > x_0$, 存在一值 $X > A$, 使

$$\frac{G(x)}{x^\tau} \leq \frac{G(X)}{X^\tau} \quad (x_0 \leq x \leq X^{\tau/\sigma}).$$

证. 令 $g(x) = \log G(x) - \tau \log x$, 则有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \{g(x) + (\tau - \sigma) \log x\} = -\infty,$$

并且 $g(x) + \tau \log x$ 于 $x \geq x_0$ 为非减. 故根据定理 6, 存在二值 X 及 X' , 使

$$A < X < X', \quad \tau(\log X' - \log X) > (\tau - \sigma) \log X',$$

$$g(x) \leq g(X) \quad (x_0 \leq x \leq X').$$

故有

$$X' > X^{\tau/\sigma}, \quad \frac{G(x)}{x^\tau} \leq \frac{G(X)}{X^\tau} \quad (x_0 \leq x \leq X').$$

1) 根据定理 6 的证明.

以上几个定理是关于上波利雅峰。类似地也有关于下波利雅峰的以下几个定理。

系理 8. 设 $f(x)$ 及 $u(x)$ 于 $x \geq a$ 为连续函数。设 $U(x)$ 为一函数定义于 $x \geq a$ 。假定下列条件满足:

$$1) \varlimsup_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - u(x)\} > -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

$$2) u(x) \geq 0 \quad (x \geq a).$$

$$3) \text{函数 } f(x) - U(x) \text{ 于 } x \geq a \text{ 为非增.}$$

则对于任意的数 $A > a$ 及 $d > 0$, 存在二值 x_0 及 x'_0 , 使

$$A < x_0 < x'_0, \quad U(x'_0) - U(x_0) > d + u(x'_0), \quad (7)$$

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (a \leq x \leq x'_0). \quad (8)$$

证。函数 $-f(x)$, $u(x)$ 及 $U(x)$ 满足定理 6 中条件, 故存在二值 x_0 及 x'_0 满足条件 (7) 式及

$$-f(x) \leq -f(x_0) \quad (a \leq x \leq x'_0).$$

所以 x_0 及 x'_0 也满足条件 (8) 式。

系理 9. 设函数 $f(x)$, $u(x)$ 及 $U(x)$ 于 $x \geq a$ 满足系理 8 中条件。如果函数 $U(x)$ 于 $x \geq a$ 为连续、增, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \infty$, 则 $f(x)$ 有一个关于 $U(x)$ 的下波利雅峰序列。

系理 10. 设 $f(x)$ 于 $x \geq x_0$ ($x_0 > 1$) 为正、连续函数, 使

$$\rho' = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log f(x)}{\log x} < \rho = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\log f(x)}{\log x},$$

并且存在一数 m , 使函数 $f(x)/x^m$ 于 $x \geq x_0$ 为非增, 则对于每一个满足条件 $\rho' < \lambda \leq \rho$ 的数 λ , 函数 $\log f(x) - \lambda \log x$ 有一个关于 $\log x$ 的下波利雅峰序列。

证。先设 $\rho' < \lambda < \rho$, 并令 $g(x) = \log f(x) - \lambda \log x$, $u(x) = 0$, 及

$$U(x) = (k - \lambda) \log x,$$

其中 $k > \max(m, \lambda)$, 则 $g(x)$, $u(x)$ 及 $U(x)$ 满足系理 9 中条件, 故 $g(x)$ 有一个关于 $(k - \lambda) \log x$ 的下波利雅峰序列, 即关于 $\log x$ 的下波利雅峰序列。

现在设 $\lambda = \rho$ 。考虑一数 $X > x_0$ 及一数 $0 < \varepsilon < 1$, 使 $\rho' < \rho - \varepsilon$ 。利用系理 7 的最后一部分的证明方法, 可以证明存在三个值 ξ_i ($i = 1, 2, 3$) 使

$$X < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3, \quad \log \xi_{i+1} - \log \xi_i \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (i = 1, 2),$$

并且

$$\log f(x) - \rho \log x > \log f(\xi_2) - \rho \log \xi_2 - \sqrt{\varepsilon} \quad (\xi_1 < x < \xi_3).$$

参 考 文 献

- [1] Pólya, G. & Szegő, G., *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, 1964, 1, 18.
- [2] Shah, S. M., a) *J. London Math. Soc.*, **15**(1940), 23—31; b) *J. Indian Math. Soc. N. S.*, **5**(1941), 179—188.
- [3] Edrei, A. & Fuchs, W. H. J., *Duke Math. J.*, **27**(1960), 233—249.
- [4] Edrei, A., a) *J. Analyse Math.*, **14**(1965), 79—107; b) *Trans. Amer. Math. Soc.*, **140**(1969), 309—332; c) *Duke Math. J.*, **31**(1964), 1—21.
- [5] Chuang Chi-tai, a) *Ann. Éc. Norm.*, **64**(1947), 179—196; b) *Scientia Sinica*, **10**(1961), 171—181.