这正是 Shannon 采样定理.

例 2 多重结点样条函数空间.

考虑文献[5, 6]中给出的小波子空间 V_0, 其 Riesz 基为$\{\varphi_l(\cdot - k): l = 0, 1; k \in \mathbb{Z}\}$, 其中 φ_0, φ_1 分别是以(0, 0, 1, 1, 2)和(0, 1, 1, 2, 2)为结点的 2 重 B-样条函数[7]. 不难验证, 当 $a = \frac{1}{4}$时, $0.0791 I \leqslant T^*_{\varphi, \frac{1}{4}}(\omega) T_{\varphi, \frac{1}{4}}(\omega) \leqslant I$. 所以 V_0 上采样定理成立.

致谢 本工作为国家自然科学基金(批准号: 16971047)和高等学校数学研究与高等人才培养中心资助项目.

参 考 文 献

1 Walter G. A sampling theorem for wavelet subspaces. IEEE Trans Inform Theory, 1992, 38(2): 881~884
2 Janssen A. The Zak transform and sampling theorem for wavelet subspaces. IEEE Trans Signal Processing, 1993, 41: 3360~3364
3 孙文昌, 周性伟. 标架与采样定理. 中国科学, A 辑, 1998, 28(1): 36~41
4 龙瑞麟. 高维小波分析. 北京: 世界图书出版公司, 1995
5 Goodman T N, Lee S L. Wavelets of multiplicity r. Trans Amer Math Soc, 1994, 342(1): 307~324
6 Massopust P R, Ruch D K, van Fleet P J. On the support properties of scaling vectors. Appl Comp Harm Anal, 1996, 3(3): 229~238
7 de Boor C. A Practical Guide to Splines. New York: Springer-Verlag, 1978

(1998-07-15 收稿)

关于 ρ最优可测耦合若干应用的注记

张绍义
(北京师范大学数学系, 北京 100875; 湖北师范学院数学系, 黄石 435002)

摘要 利用 ρ最优可测耦合存在定理, ( ) 补充证明了 Dobrushin-Shosman 唯一性定理所需要的可测性; ( ) 无需任何条件证明了跳过程 ρ最优耦合算子的存在性.

关键词 **最优耦合 随机场 跳过程**

本文先介绍 ρ最优可测耦合的相关概念和结果, 然后给出这些结果的基本应用. 文中定理 1 去掉了文献[1]中相应的定理要求自旋空间是局部紧的限制, 从而使 Dobrushin-Shlosman 唯一性定理有了完整的证明. 定理 2 去掉文献[2]中相应定理所有的条件, 因此得到了跳过程 ρ最优耦合算子存在定理最完善的结果. 这些结果的改进主要依赖最近作者[3]得到的 ρ最优可测耦合存在性定理(定理 A).

设$(E, \rho, \mathscr{E})$是完备可分距离可测空间, $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{P}(E)$($\mathscr{E}$上的全体概率测度), μ 是乘积空间$(E \times E, \mathscr{E} \times \mathscr{E})$上的概率测度, 称 μ 是 μ_1 与 μ_2 的耦合. 如果满足边缘性 $\mu(A_1 \times E) = \mu_1(A_1)(A_1 \in \mathscr{E})$, $\mu(E \times A_2) = \mu_2(A_2)(A_2 \in \mathscr{E})$. 用 $K(\mu_1, \mu_2)$表示 μ_1 与 μ_2 的全体耦合. 定义 μ_1 与 μ_2 的 KRW 距离为: $W_\rho(\mu_1, \mu_2) = \inf\{\int \mu(dx, dy)\rho(x, y): \mu \in K(\mu_1, \mu_2)\}$. 又

设 $P_1(x_1, \mathrm{d}y_1)$, $P_2(x_2, \mathrm{d}y_2)$ 是 $(E, \rho, \mathscr{E})$ 上的概率核, $P(x_1, x_2; \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2)$ 是 $(E\times E, \mathscr{E}\times\mathscr{E})$ 上的概率核, 称 $P(x_1, x_2; \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2)$ 是 $P_1(x_1, \mathrm{d}y_1)$ 与 $P_2(x_2, \mathrm{d}y_2)$ 的可测耦合, 如果对所有的 $x_1, x_2\in E$, 满足 $P(x_1, x_2; \cdot)\in K(P_1(x_1, \cdot), P_2(x_2, \cdot))$. 称 $P_1(x_1, \mathrm{d}y_1)$ 与 $P_2(x_2, \mathrm{d}y_2)$ 的可测耦合 $\boldsymbol{P}(x_1, x_2; \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2)$ 为 ρ 最优可测耦合, 如果对所有的 $x_1, x_2\in E$ 满足:

$$\int \boldsymbol{P}(x_1, x_2; \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2)\rho(y_1, y_2) = W_\rho(P_1(x_1, \cdot), P_2(x_2, \cdot)).$$

定理 A[3] 设 $P_k(x_k, \mathrm{d}y_k)\ (k=1, 2)$ 是 $(E, \rho, \mathscr{E})$ 上的 2 个概率核, 则 $P_1(x_1, \mathrm{d}y_1)$ 与 $P_2(x_2, \mathrm{d}y_2)$ 的 ρ 最优可测耦合 $\boldsymbol{P}(x_1, x_2; \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2)$ 总是存在的.

定理 B[2] 设 $\{G_n(x, \mathrm{d}y): n\geqslant 1\}$ 是 $(E, \rho, \mathscr{E})$ 上的可测核序列, 如果对每个固定的 $x\in E$ 测度序列 $\{G_n(x, \cdot): n\geqslant 1\}$ 满足:

( ) $\sup\limits_{n\geqslant 1} G_n(x, E) < \infty$;

( ) $\{G_n(x, \cdot)\}$ 是胎紧的.

那么存在 $(E, \rho, \mathscr{E})$ 上的可测核 $G(x, \mathrm{d}y)$, 对每个固定的 x, 存在 $\{n(x)\}\subset\{n\}$ 使得

$$G_{n(x)}(x, \cdot) \xrightarrow{w} G(x, \cdot)\ (n(x)\to\infty),$$

此外 $\xrightarrow{w}$ 是指测度序列的弱收敛.

1 证明 Dobrushin-Shlosman 唯一性定理所需要的可测性

设位置集 $\mathbb{Z}^d$ 是 d 维欧氏空间的整点集, $s, t\in\mathbb{Z}^d$, 用 $|s-t|$ 表示通常的欧氏距离. 若 V 是 $\mathbb{Z}^d$ 的有限子集, 则记作 $V\subset\subset\mathbb{Z}^d$, 对每个 $V\subset\mathbb{Z}^d$, 记 $\mathrm{d}(t, V) := \inf\{|t-s|: s\in V\}$. 设 $\partial_r V = \{t\in V^c: \mathrm{d}(t, V)\leqslant r\}$. 设自旋空间 $(X, \rho, \mathscr{B})$ 是完备可分距离可测空间. 记 $E = X^{\mathbb{Z}^d}$, $\mathscr{E} = \mathscr{B}^{\mathbb{Z}^d}$. 对每个 $V\subset\mathbb{Z}^d$, 记 $E(V) = X^V$, $\mathscr{E}(V) = \mathscr{B}^V$. 设 $x\in E$, 用 x_V 表示 x 在 $E(V)$ 上的投影. 特别地记 $x_{\{t\}} = x_t$. 设 $\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$. 定义 $E(\Lambda)$ 上的距离为 $\rho_\Lambda(x^1, x^2) = \sum\limits_{t\in\Lambda}\rho(x_t^1, x_t^2)\ (x^1, x^2\in E(\Lambda))$.

定理 1[4] 给一个平移不变的 r 规范 $\{P_v: v\subset\subset\mathbb{Z}^d\}$ (参见文献[5]), 假设对某个 $\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$, 使得下列条件成立:

( ) 存在常数集 $\{k_t\geqslant 0: t\in\partial_r\Lambda\}$ 使得

$$W_{\rho_\Lambda}(P_\Lambda(x^1_{\partial_r\Lambda}, \cdot), x^2_{\partial_r\Lambda}, \cdot)\leqslant k_t\,\rho(x_t^1, x_t^2).$$

对一切 $t\in\partial_r\Lambda$, 一切 $x^1, x^2\in E$ 且满足 $x_s^1 = x_s^2\ (s\neq t)$.

( ) $\sum\limits_{t\in\partial_r\Lambda} k_t/|\Lambda| =: \gamma < 1$, 那么存在一个常数 $g_0 = g_0(\Lambda, r, \gamma) > 0$ 使得 $|\mathscr{R}(P, g_0)|\leqslant 1$, 其中 $\mathscr{R}(P, g_0) = \{P\in\mathscr{R}(E): PP_V = P,\ V\subset\subset\mathbb{Z}^d$; 存在 $G\in[0, \infty)$ 使得 $\int_E\rho(x_t, z)P(\mathrm{d}x)\leqslant G\exp[g_0|t|],\ t\in\mathbb{Z}^d\}$, $|A|$ 表示集合 A 元素的个数.

定理 1 是随机场理论中著名的 Dobrushin 唯一性定理的推广, 被称为 Dobrushin-Shlosman 唯一性定理. 文献[4]中证明这个定理时实际上用到了耦合的可测性. 但对此该文没有证明. 为了避免可测性, 文献[5]中在证明这个定理时, 把定理 1 的条件( ) 改为(′).

(′) 对每个 $\delta > 0$, 存在常数集 $\{k_t\geqslant 0: t\in\partial_r\Lambda\}$ 和 $P_\Lambda(\boldsymbol{x}^1_{\partial_r\Lambda}, \cdot)$ 与 $P_\Lambda(\boldsymbol{x}^2_{\partial_r\Lambda}, \cdot)$ 的可测耦

合 $\tilde{P}(\tilde{x}^1_{\partial_r\Lambda}, \tilde{x}^2_{\partial_r\Lambda}; \mathrm{d}x^1_\Lambda, \mathrm{d}x^2_\Lambda)$ 使得

$$\int_{E(\Lambda)\times E(\Lambda)} \rho_\Lambda(x^1, x^2)\tilde{P}(\tilde{x}^1_{\partial_r\Lambda}, \tilde{x}^2_{\partial_r\Lambda}; \mathrm{d}x^1_\Lambda, \mathrm{d}x^2_\Lambda) \leqslant k_t\rho(\tilde{x}^1_t, \tilde{x}^2_t) + \delta,$$

对一切 $t\in\partial_r\Lambda$, 一切 $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2\in E$ 且满足 $\tilde{x}^1_s = \tilde{x}^2_s (s\neq t)$.

显然由 δ 的任意性及(′) 可推得( ), 而现在由定理 A 及( ) 可推得(′), 于是由文献[5] 中定理 10.9 和定理 A 就严格地证明了定理 1.

2 证明跳过程 ρ 最优耦合算子的存在性

设 $(q(x), q(x, \mathrm{d}y))$ 是 $(E, \rho, \mathscr{E})$ 上的正则 q 对, 用 $b\mathscr{E}$ 表示全体 $\mathscr{E}$ 可测实函数. 定义算子 Ω 为

$$\Omega f(x) = \int q(x, \mathrm{d}y)f(y) - q(x)f(x), f\in b\mathscr{E}.$$

设 $(q_k(x_k), q_k(x_k, \mathrm{d}y_k))$ (或算子 Ω_k) $(k=1, 2)$ 是 $(E, \rho, \mathscr{E})$ 上的正则 q 对,

$$(\tilde{q}(x_1, x_2), \tilde{q}(x_1, x_2; \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2))$$

(或算子 $\tilde{\Omega}$) 是乘积空间 $(E\times E, \mathscr{E}\times\mathscr{E})$ 上的正则 q 对, 称 $\tilde{\Omega}$ 是 Ω_1 与 Ω_2 的耦合算子, 如果满足

$$\tilde{\Omega}f_k(x_1, x_2) := \int\tilde{q}(x_1, x_2; \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2)f_k(y_k) - \tilde{q}(x_1, x_2)f_k(x_k)$$

$$= \Omega_k f_k(x_k), f_k\in b\mathscr{E}\subset b(\mathscr{E}\times\mathscr{E}),\ k = 1, 2.$$

称 Ω_1 与 Ω_2 的耦合算子 $\bar{\Omega}$ 是 ρ 最优耦合算子, 如果满足

$$\bar{\Omega}\rho(x_1, x_2) = \inf_{\tilde{\Omega}} \tilde{\Omega}\rho(x_1, x_2),\ x_1, x_2\in E.$$

上式右端跑遍所有 Ω_1 与 Ω_2 的耦合算子.

定理 2 设 $(q_k(x_k), q_k(x_k, \mathrm{d}y_k))$ (或算子 Ω_k) $(k=1, 2)$ 是 $(E, \rho, \mathscr{E})$ 上的正则 q 对, 则 Ω_1 与 Ω_2 的 ρ 最优耦合算子总是存在的.

证 对任意自然数 M, 令 $\rho_M = \min\{\rho, M\}$. 接文献[2] 中完全类似的方法可以证明(不过在此用定理 A 代替那里的文献[6] 中的定理 4.2), 对每个自然数 M, 存在 Ω_1 与 Ω_2 的 ρ_M 最优耦合算子 $\bar{\Omega}_M$, 即设 $\tilde{\Omega}$ 是 Ω_1 与 Ω_2 的任一耦合算子, 有

$$\bar{\Omega}_M\rho_M(x_1, x_2) \leqslant \tilde{\Omega}\rho_M(x_1, x_2),\ x_1, x_2\in E. \tag{1}$$

设 $(\bar{q}_M(x_1, x_2), \bar{q}_M(x_1, x_2; \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2))$ 是算子 $\bar{\Omega}_M$ 相应的 q 对.

注意到乘积空间 $(E\times E, \mathscr{E}\times\mathscr{E})$ 也是完备可分距离可测空间. 考虑可测核序列

$$\{\bar{q}_M(x_1, x_2; \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2): M\geqslant 1\},$$

因为 $\bar{q}_M(x_1, x_2; E\times E) = \bar{q}_M(x_1, x_2) \leqslant q_1(x_1) + q_2(x_2) < \infty$, 所以对每个固定的 $(x_1, x_2)\in E\times E$, 有 $\sup_{M\geqslant 1}\bar{q}_M(x_1, x_2; E\times E) < \infty$. 又由于 $(E, \rho, \mathscr{E})$ 是内正则空间, 于是对固定的 $x_k\in E (k=1, 2)$, 对每个 $\varepsilon > 0$ 可以选取紧集 $K_k\supset\{x_k\}$ 使得 $q_k(x_k, K_k^c) < \varepsilon/2 (k=1, 2)$. 设 $K = K_1\times K_2$, 则 K 是 $E\times E$ 中的紧集, 并且

$$\begin{aligned}\bar{q}_M(x_1, x_2; K^c) &\leqslant \bar{q}_M(x_1, x_2; K_1^c\times E) + \bar{q}_M(x_1, x_2; E\times K_2^c)\\ &= q_1(x_1, K_1^c) - q_1(x_1)\delta(x_1, K_1^c) + \bar{q}_M(x_1, x_2)\delta(x_1, x_2; K_1^c\times E)\\ &\quad + q_2(x_2; K_2^c) - q_2(x_2)\delta(x_2, K_2^c) + \bar{q}_M(x_1, x_2)\delta(x_1, x_2; E\times K_2^c)\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

于是得到$\{q_M(x_1, x_2; \cdot): M \geqslant 1\}$是胎紧的, 由定理 B, 存在$(E \times E, \mathscr{E} \times \mathscr{E})$上的可测核 $q(x_1, x_2; \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2)$. 对每个固定的$(x_1, x_2) \in E \times E$, 存在$\{M(x_1, x_2)\} \subset \{M\}$使得

$$q_{M(x_1, x_2)}(x_1, x_2; \cdot) \xrightarrow{W} q(x_1, x_2; \cdot), \quad M(x_1, x_2) \to \infty. \tag{2}$$

令 $\Omega f(x_1, x_2) = \int q(x_1, x_2; \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2) f(y_1, y_2) - q(x_1, x_2; E \times E) f(x_1, x_2),\ f \in b(\mathscr{E} \times \mathscr{E})$. 易知 Ω 是 Ω_1 与 Ω_2 的耦合算子, 往证 Ω 还是 ρ 最优的. 由式(2)和积分的单调收敛定理易证:

$$\lim_{M(x_1, x_2) \to \infty} \Omega\rho_{M(x_1, x_2)}(x_1, x_2) = \Omega\rho(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in E, \tag{3}$$

$$\Omega\rho(x_1, x_2) \leqslant \liminf_{M(x_1, x_2) \to \infty} \Omega_{M(x_1, x_2)}\rho_{M(x_1, x_2)}(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in E. \tag{4}$$

由式(1), (3)和(4)立得: $\Omega\rho(x_1, x_2) \leqslant \Omega\rho(x_1, x_2)\ (x_1, x_2 \in E)$. 即 Ω 是 Ω_1 与 Ω_2 的最优耦合算子. 证毕.

致谢 本工作为高等学校博士点专项基金(批准号: 96002704)和湖北省教委科研基金资助项目.

参 考 文 献

1 张绍义. 转移概率的可测耦合与概率距离. 数学年刊, A 辑, 1995, 16(6): 769~ 775
2 张绍义. 跳过程 ρ最优耦合算子的存在性. 数学学报, 1998, 41(2): 393~ 398
3 张绍义. 最优可测耦合的存在性与马氏过程的遍历性. 中国科学, A 辑, 1998, 28(11): 999~ 1008
4 Dobrushin R L, Shlosman S B. Constructive criterion for uniqueness of Gibbs field. In: Fritz J et al eds. Statistical Mechanics and Dynamical Systems. Boston: Birh•user, 1985. 347~ 470
5 Chen Mufa. From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle System. London: World Scientific, 1992
6 张绍义, 徐 侃. 转移概率的最优可测耦合的存在性. 数学学报, 1997, 40(1): 5~ 13

(1998-03-09 收稿)

表面力仪及其在表面接触研究中的应用

邹 鲲 冷永胜[④] 李志军 陈 军 胡元中
王 慧 温诗铸
(清华大学摩擦学国家重点实验室, 北京 100084; ④北京工业大学, 北京 100084)

摘要 介绍了清华大学摩擦学国家重点实验室研制的表面力仪(SFA)的原理及其构造, 并应用它对固体的微观接触进行了初步的研究, 比较了粘着与无粘着时的接触. 实验表明, Hertz 理论与无粘着接触时的实验非常吻合, JKR 理论则较好地描述了粘着时的现象.

关键词 **表面力仪 粘着接触 无粘着接触**

表面力仪(Surface force apparatus, SFA)最初是作为一种直接测量固体表面分子作用力与壁面间隙(0~ 100 nm)关系的仪器而出现的[1]. 经过不断的完善, 进入 90 年代初以来, 继 AFM(Atomic force microscope), STM(Scanning tunnel microscope)之后, SFA 已经成为了一种