中国科学: 数学 2015 年 第 45 卷 第 5 期: 567～578
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

Q 过程唯一性准则及其相关问题

张汉君*, 彭向阳

湘潭大学数学与计算科学学院, 湘潭 411105
E-mail: hjz001@xtu.edu.cn, pengxy@xtu.edu.cn

收稿日期: 2015-01-31; 接受日期: 2015-02-07; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11371301) 资助项目

摘要 本文以侯振挺 "Q 过程唯一性准则" 为中心, 对 Q 过程的存在唯一性进行综述, 强调侯 - 条件 (H- 条件) 在 Q 过程构造论中的作用, 进而对不中断 Q 过程、可逆 Q 过程、随机单调 Q 过程、对偶 Q 过程和抽象空间上的 Q 过程存在唯一性进行总结, 给出生灭过程的一些相应结果, 指出了三个尚未解决的开问题, 以期对我国年轻的概率论学者了解中国概率论前辈特别是侯振挺教授的杰出工作有所帮助.

关键词 Q 过程 存在性 唯一性

MSC (2010) 主题分类 60J27, 60J35

1 引言

设 E 为可数集, $P(t)=(p_{ij}(t), i,j\in E, t\geqslant 0)$ 是标准的齐次转移函数, 它满足

(i) $p_{ij}(t)\geqslant 0$, $\sum_{j\in E}p_{ij}(t)\leqslant 1$;

(ii) $p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E}p_{ik}(s)p_{kj}(t)$;

(iii) $\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=p_{ij}(0)=\delta_{ij}$.

如果 $P(t)$ 还满足 $\sum_{j\in E}p_{ij}(t)=1$ $(\forall\, i\in E)$, 则称 $P(t)$ 为不中断的 (或诚实的). 设 $P(t)$ 是 E 上的标准转移函数, 则 Doob-Kolmogorow 极限

$$q_{ii}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{ii}(t)-1}{t},\quad q_{ij}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t)}{t},\quad i\neq j$$

存在且满足

(DK1) $$0\leqslant q_{ij}<\infty,\quad i\neq j;$$

(DK2) $$\sum_{k\neq i}q_{ik}\leqslant -q_{ii}\leqslant\infty.$$

矩阵 $Q=(q_{ij}, i,j\in E)$ 称为 $P(t)$ 的密度矩阵, 习惯上也称为 Q- 矩阵; 有时也称 $P(t)$ 为标准的 Markov 过程. 如果 $Q=P'(0)$, 则简称 $P(t)$ 为 Q 过程. 如果 $i\in E$, $q_i\triangleq -q_{ii}<\infty$, 则称 i 为 $P(t)$ 的稳定状

英文引用格式: Zhang H J, Peng X Y. The uniqueness criteria and related issues of Q-process (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 567–578, doi: 10.1360/N012015-00068

态. 若 $q_i=\infty$, 则称 i 为 $P(t)$ 的瞬时状态. 如果对一切 $i\in E$, i 均为 $P(t)$ 的稳定状态, 则称 $P(t)$ 是全稳定的, 否则称 $P(t)$ 为带瞬时态的.

因为在实际问题中, Q 往往比 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 更容易得到. 于是, 所谓 Q- 矩阵问题应运而生, 即任给一个 Q- 矩阵, 是否存在一个标准 Markov 过程 $P(t)=(p_{ij}(t))$, 使得 $p'_{ij}(0)=q_{ij}$. 如果 Q 过程存在, 是否唯一? 我们把存在性和唯一性问题称为 Q- 矩阵问题. 自 1931 年始, 不少著名的概率论学者, 例如, 文献 [1–5] 的作者均在该问题上展开过工作, 并作出了重要贡献. 从 20 世纪 50 年代开始, 我国概率论工作者, 如王梓坤[6]、侯振挺[7–9]、杨向群[10]、陈木法[11] 等人也对这一领域进行了广泛深入的研究, 取得了可喜的成就, 并有若干专著出版.

上面已经指出, 任一 Markov 转移函数的密度矩阵是 Q- 矩阵. 现在提出相反的问题, 对任给的一个矩阵 Q:

(i) 在什么条件下, Q 成为 Q- 矩阵, 即何时 Q 过程存在?

(ii) 若已知 Q 过程存在, 何时 Q 过程唯一?

(iii) 已知 Q 过程存在, 如何实际求出 Q 过程? 特别当 Q 过程不唯一时, 如何实际构造出全部 Q 过程?

这三个基本问题就称为 Q 过程的构造性问题 (前两个问题也称为 Q- 矩阵问题). 此问题是 Kolmogorov [1] 于 1931 年提出来的, 距今已有八十多年的历史. 在此期间, 各国概率论工作者做了大量的工作, 取得了很大的进展, 但也留下了一批尚未解决的问题. 本文紧紧围绕上述三个基本问题, 特别是 Q 过程的唯一性问题来进行总结, 并在文末提出了三个有关的开问题.

2 存在性问题

Feller [3] 构造了全稳定最小 Q 过程, 即定理 2.1.

定理 2.1 设矩阵 $Q=(q_{ij},i,j\in E)$ 满足条件 (DK1) 和

$$\sum_{k\neq i} q_{ik}\leqslant -q_{ii}<\infty,\quad \forall\, i\in E,$$

则存在转移函数 $F(t)=(f_{ij}(t),i,j\in E,t\geqslant 0)$ 使得

$$f'_{ij}(0)=q_{ij},\quad i,j\in E.$$

并且 $F(t)$ 是下列意义下的最小转移函数, 即如果存在转移函数 $P(t)=(p_{ij}(t))$, 使得 $p'_{ij}(0)=q_{ij}$, 则

$$p_{ij}(t)\geqslant f_{ij}(t),\quad i,j\in E,\quad t\geqslant 0.$$

对于全瞬时 Q 过程的存在性, 1967 年, Williams [12] 得到了下面的结果:

定理 2.2 设矩阵 $Q=(q_{ij},i,j\in E)$ 满足条件 (DK1) 和

$$\text{(TI)}\qquad q_i=\infty,\quad \forall\, i\in E$$

(此时条件 (DK2) 是自动满足), 则存在转移函数 $P(t)=(p_{ij}(t),i,j\in E,t\geqslant 0)$ 满足 $Q=P'(0)$ 当且仅当以下两个条件同时成立,

$$\text{(N)}\qquad \sum_{j\notin\{a,b\}} q_{aj}\wedge q_{bj}<\infty,\quad a,b\in E,\quad a\neq b;$$

(S) 存在一个无穷子集 $K\subset E$, 使得

$$\sum_{j\in K\setminus i} q_{ij}<\infty,\quad \forall\, i\in E.$$

Williams 是用概率方法来证明该定理的. 侯振挺和费志凌[13] 给出了其分析证明.

经过许多学者的努力 (参见文献 [5,9,11,12,14–17]), 使得一般情形下 Q- 矩阵的存在性问题有了突破性的的进展, 但仍未完全解决, 限于篇幅不在此展开, 有兴趣的读者, 请参见文献 [9].

3　Q 过程的唯一性问题

利用分解定理[14], 我们有下面的定理:

定理 3.1　设 $Q=(q_{ij},i,j\in E)$ 是含瞬时态的 Q- 矩阵, 若 Q 过程存在, 必存在无穷多个 Q 过程, 从而, Q 过程不唯一.

由定理 3.1, 我们讨论 Q 过程唯一性问题只需讨论全稳定的情形. 1957 年, Reuter [18] 给出了 Q 保守时 Q 过程的唯一性准则, 即定理 3.2.

定理 3.2　设矩阵 $Q=(q_{ij},i,j\in E)$ 满足条件 (DK1) 和

(TS)
$$\sum_{j\neq i} q_{ij}=q_i<\infty,\quad \forall\, i\in E,$$

则 Q 过程唯一的充要条件是方程

(RE)
$$\begin{cases}(\lambda I-Q)U=0, & \lambda>0,\\ 0\leqslant U\leqslant \mathbf{1}\end{cases}$$

只有零解.

1974 年, 侯振挺[19] 给出了一般 Q 过程的唯一性准则, 即定理 3.3.

定理 3.3　若矩阵 $Q=(q_{ij},i,j\in E)$ 满足条件 (DK1) 和

$$\sum_{j\neq i} q_{ij}\leqslant q_i<\infty,\quad \forall\, i\in E,$$

则存在唯一 Q 过程的充要条件是下面两条同时成立,

(i) (H) 条件成立, 即

(H)
$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\phi_{ij}(\lambda)>0;$$

(ii) $\Phi(\lambda)=(\phi_{ij}(\lambda),i,j\in E,\lambda>0)$ 满足 $\lambda\sum_{j\in E}\phi_{ij}(\lambda)=1,\forall\, i\in E$, 或者方程

(LE)
$$\begin{cases}\eta(\lambda)(\lambda I-Q)=0,\\ 0\leqslant \eta_i(\lambda),\quad \displaystyle\sum_i \eta_i(\lambda)<\infty, & \lambda>0\end{cases}$$

只有零解, 其中 $\Phi(\lambda)=(\phi_{ij}(\lambda),\ i,j\in E,\ \lambda>0)$ 是最小 Q 过程 $F(t)=(f_{ij}(t),\ i,j\in E,\ t\geqslant 0)$ 的 Laplace 变换, 即

$$\phi_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} f_{ij}(t)dt.$$

Reuter [20] 称定理 3.3 为侯氏定理, 下面讨论侯氏定理中 (H) 条件在 Q 过程构造中的作用.

性质 3.1 若 (H) 条件成立, 则方程 (RE) 只有零解.

下文中有关 B 型 Q 过程、F 型 Q 过程和 $B\cap F$ 型 Q 过程的定义参见文献 [9]. 由性质 3.1 知, 下面的命题成立.

命题 3.1 如果 (H) 条件成立, 则 B 型 Q 过程唯一.

利用文献 [7,21] 得到如下结果:

命题 3.2 如果 (H) 条件成立, 则一切 Q 过程均为 F 型 Q 过程.

Reuter [18] 得到下面的命题:

命题 3.3 F 型 Q 过程唯一的充分必要条件为定理 3.3(ii) 成立.

注 3.1 由命题 3.2 和 3.3, 我们得到 Q 过程唯一性准则的一个新证明; 同时, 这也说明了侯氏定理中两条件的各自独立意义.

下面讨论在一些特殊情形下 Q 过程的唯一性准则.

首先, 设存在常数 $0\leqslant c<\infty$, 使 $-q_{ii}\leqslant c$, $i\in E$, 此时称 Q 是有界的.

命题 3.4 若 Q 有界, 则方程

$$\begin{cases}\eta(\lambda I-Q)=0,\\ 0\leqslant\eta\in l_E,\quad \lambda>0\end{cases}$$

只有零解, 并且 (H) 条件成立.

由命题 3.4, 有下面的定理:

定理 3.4 若 Q 有界, 则 Q 过程唯一, 从而 B 型和 F 型 Q 过程唯一.

特别地, 若 E 为有限集, 则 Q 过程必唯一.

若 $q_{ij}=0$ $(\forall i\neq j)$, 此时称 $Q=(q_{ij})$ 为对角型的.

定理 3.5 若 Q 为对角型的, 则

(i) B 型 Q 过程唯一;

(ii) F 型 Q 过程唯一;

(iii) Q 过程唯一的充要条件是 $\sup_{i\in E}q_i=c<\infty$.

上述验证 Q 过程唯一性的条件, 在理论上有重大价值, 但在大部分情形下, 方程 (RE) 和 (LE) 只有零解的条件难以验证, (H) 条件直接加在过程自身上更难实际应用. 为此, 下文将给出一些容易验证的充分条件.

定理 3.6 设 $f=(f_i,i\in E)$ 满足 $f_i\geqslant q_i$ $(\forall i\in E)$, 如果存在常数 c 使得

$$\Omega f\triangleq\sum_{j\neq i}q_{ij}(f_i-f_j)\leqslant cf_i,\quad i\in E,$$

则 Q 过程唯一.

定理 3.7 设 $\{E_n\}\subset E$, $f=(f_i,i\in E)$ 满足 $f_i\geqslant 0$, $i\in E$, 假设

(i) $E_n\uparrow E$, $\sup_{i\in E_n}q_i<\infty$, $\lim_{n\to\infty}\inf_{i\notin E_n}f_i=\infty$, 习惯上定义 $\inf\emptyset=\infty$;

(ii) 存在常数 $c\in R$, 使得 $\Omega f\leqslant cf$,

则 Q 过程唯一.

注 3.2 定理 3.6 和 3.7 取自文献 [11]. 文献 [11] 中有例子表明定理 3.7 的条件满足, 但定理 3.6 的条件不满足.

下面考虑一种无论在理论上还是实际应用中均占有重要地位的 Markov 过程 — 生灭过程.

称连续时间 Markov 过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 为状态空间 E 上的生灭过程, 如果其 Q- 矩阵满足

$$q_{ij}=\begin{cases}\lambda_i, & j=i+1, \quad i \geqslant 0,\\ \mu_i, & j=i-1, \quad i \geqslant 1,\\ -(\lambda_i+\mu_i), & j=i, \quad i \geqslant 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{BD}$$

其中 $\{\lambda_n, n \geqslant 0\}$ 和 $\{\mu_n, n \geqslant 0\}$ 为两正数序列, 分别称为生系数和灭系数. 如果 $\mu_0=0$, 则 Q 保守. 为了叙述简单, 本文只讨论 Q 保守的生灭过程. 记

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}+\frac{\mu_n}{\lambda_n\lambda_{n-1}}+\cdots+\frac{\mu_n\cdots\mu_2\mu_1}{\lambda_n\cdots\lambda_1\lambda_0}\right),\\ S &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{n+1}}\left(1+\frac{\lambda_n}{\mu_n}+\frac{\lambda_n\lambda_{n-1}}{\mu_n\mu_{n-1}}+\cdots+\frac{\lambda_n\cdots\lambda_2\lambda_1}{\mu_n\cdots\mu_2\mu_1}\right),\\ \pi_0 &= 1, \quad \pi_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}, \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

命题 3.5 对生灭 Q- 矩阵 (BD),

(i) 方程 (RE) 只有零解, 当且仅当 $R=+\infty$;

(ii) 方程 (LE) 只有零解, 当且仅当 $S=+\infty$.

由此命题, 立得下面的定理:

定理 3.8 设 Q 是形如 (BD) 的保守生灭过程, 则

(i) B 型 Q 过程唯一的充要条件是 $R=+\infty$;

(ii) F 型 Q 过程唯一的充要条件是 $R=+\infty$ 或 $R<+\infty$, $S=+\infty$;

(iii) Q 过程唯一的充要条件是 $R=+\infty$;

(iv) $B\cap F$ 型 Q 过程唯一的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n\pi_n}+\pi_n\right)=+\infty.$$

4 不中断 Q 过程的唯一性

在实际应用中, 不中断 Q 过程有其重要意义. 定理 4.1–4.3 分别给出了当 Q 过程全稳定、全瞬时和有限稳定无限瞬时时, 相应的不中断 Q 过程唯一性的结论.

定理 4.1 设 Q 是全稳定的 Q- 矩阵, 则存在唯一不中断 Q 过程的充要条件是下列两条同时成立,

(i) (H) 条件成立, 即 $\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\phi_{ij}(\lambda)>0$ $(\lambda>0)$;

(ii) Q 保守, 或者 Q 非保守, 但方程

$$\begin{cases}\nu(\lambda)(\lambda I-Q)=0,\\ 0\leqslant \nu\in L_E,\end{cases} \quad \lambda>0$$

恰有一个线性独立解.

定理 4.2 设 Q 是全瞬时的 Q- 矩阵, 则存在无穷多个不中断 Q 过程, 故不中断过程不唯一.

定理 4.3 设 Q 是带有限个稳定、无限个瞬时态的 Q- 矩阵, 则存在无穷多个不中断 Q 过程, 故不中断过程不唯一.

有限瞬时无限稳定不中断 Q 过程的唯一性已解决, 但结果比较复杂, 在此不再叙述, 读者可参见文献 [9, 第 11.4 节]. 而对双无限不中断 Q 过程的唯一性, 虽已有若干充分性条件和必要条件, 但此问题还未完全解决, 有兴趣者可参见文献 [9, 第 11.5 节], 希望我国年轻的概率论工作者来攻克这个难题.

5 可逆 Q 过程

可逆 Markov 过程的概念来源于统计物理, 它反映了过程关于时间的可逆性, 即所谓 "细致平衡" 的微观可逆性. 因此, 这类过程有重要的实际意义.

定义 5.1 一个定义在概率空间 $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 上的齐次 Markov $\{X_t,t\geqslant 0\}$ (以下简称为 Markov 过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$) 称为可逆的, 如果对于任意的 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n$, 只要 $t_n-t_{n-1}=t_2-t_1$, $t_{n-1}-t_{n-2}=t_3-t_2,\ldots$ 和 $i_1,i_2,\ldots,i_n\in E$, 就有

$$P(X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\ldots,X_{t_n}=i_n)=P(X_{t_1}=i_n,X_{t_2}=i_{n-1},\ldots,X_{t_n}=i_1).$$

上述定义给出了可逆 Markov 过程明显的直观意义: 有限维分布关于时间是对称的.

我们称 $U=(u_i)_{i\in E}$ 为正分布, 如果

$$u_j>0,\quad j\in E,\quad \sum_{j\in E}u_j=1.$$

定义 5.2 Markov 过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 称为平稳的, 如果 $\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=u_j$ (不依赖于 i) 存在, $U=(u_i)$ 为正分布, 并且

$$P(X_t=j)=u_j,\quad j\in E,\quad t\geqslant 0.$$

此时称 $U=(u_i)$ 为过程 X 的平稳分布.

下面说明具有转移概率矩阵 $P(t)=(p_{ij}(t);i,j\in E,t\geqslant 0)$ 的平稳 Markov 过程与 $P(t)$ 的可配称性之间的关系. 为此, 先引进如下概念:

定义 5.3 转移概率 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 称为可配称的, 如果存在正分布 (u_i), 使

$$u_ip_{ij}(t)=u_jp_{ji}(t),\quad i,j\in E,\quad t\geqslant 0.$$

此时称 (u_i) 为 $(p_{ij}(t))$ 的配称分布.

定理 5.1 设平稳 Markov 过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 的转移矩阵为 $(p_{ij}(t))$, 平稳分布为 $U=(u_i)$, 则 X 可逆的充要条件是 $(p_{ij}(t))$ 可配称且以 (u_i) 为配称分布.

定义 5.4 对 Markov 过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$, 称自 i 可到 j, 如果存在 $t>0$, 使 $p_{ij}(t)>0$; 称 i 与 j 互通, 如果自 i 可到 j 并且自 j 可到 i; 如果对于一切 $i,j\in E$, i 与 j 互通, 就称 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 不可约.

我们称既平稳又可逆的 Markov 过程 X 为可逆 Q 过程, 有时也直接称其转移矩阵 $P(t)$ 为可逆 Q 过程, 即定义 5.5.

定义 5.5 称 Q 过程 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 可逆, 如果存在正分布 $U=(u_i)$ 使得条件

(i) $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=u_j$ $(i\in E)$;

(ii) $P(t)$ 关于 U 可配称,

同时成立.

下面是可逆 Q 过程的判别准则.

定理 5.2 称 Q 过程 $P(t)$ 可逆的充要条件是 $P(t)$ 不中断、不可约、可配称.

定义 5.6 称 Q- 矩阵可配称, 如果存在正分布 $U=(u_i)_{i\in E}$, 使得

$$u_i q_{ij}=u_j q_{ji}, \quad i,j\in E.$$

此时称 U 为 Q 的配称分布.

定理 5.3 如果 Q 过程 $P(t)$ 关于 U 可配称, 则 Q- 矩阵 Q 亦然.

下面给出可逆 Q 过程的存在准则.

定理 5.4 对任给的全稳定 Q- 矩阵 Q, 存在可逆 Q 过程的充要条件为下列三条同时成立,

(i) Q 可配称;

(ii) 或者 Q 即约; 或者 Q 可约, 但每个零流出子块至少含有一个非保守状态;

(iii) 存在 Q 的某个配称分布 $U=(u_i)$ 使得或者 $\sum_{i\in E} u_i d_i=+\infty$; 或者 $\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{k\in E}\lambda u_k\overline{X}_k(\lambda)=+\infty$; 或者 $\sum_{i\in E} u_i d_i\leqslant\sum_{k\in E}\lambda u_k\overline{X}_k(\lambda)<+\infty$, 其中 $\overline{X}(\lambda)$ 是方程 (RE) 的最大解, $d=(d_i,i\in E)$ 为 Q 的非保守量.

注 5.1 保守情形下可逆 Q 过程的存在性最先由侯振挺等人[22] 得到. 陈安岳和张汉君[23] 得到了 "可逆 Q 过程的存在性准则", 即定理 5.4. 陈安岳和张汉君[24] 解决了单瞬时可逆 Q 过程的存在性问题. 对于含多个瞬时态可逆 Q 过程的存在性, 至今仍未解决.

关于可逆 Q 过程的唯一性问题, 首先, 侯振挺和陈木法[22] 给出了单流出可逆 Q 过程的唯一性准则; 随后, 陈木法[25] 研究了保守有限流出可逆 Q 过程的存在唯一性问题; 陈安岳[26] 研究了有限非保守有限流出时, 可逆 Q 过程的存在唯一性. 但是, 全稳定情形下可逆 Q 过程的唯一性问题还没有解决, 这个问题有很重要的实际意义, 值得认真地研究.

对生灭 Q- 矩阵, 我们有如下结论:

命题 5.1 生灭 Q- 矩阵可配称的充要条件是

$$\text{(PT)} \qquad \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i<\infty.$$

定理 5.5 给定生灭 Q- 矩阵 Q, 可逆 Q 过程存在的充要条件是 (PT) 成立, 如果可逆 Q 过程存在, 可逆 Q 过程是唯一的. 事实上,

(i) 如果 (PT) 成立且 $R=+\infty$, 则最小 Q 过程 $F(t)=(f_{ij}(t),i,j\in E)$ 为唯一可逆 Q 过程;

(ii) 如果 (PT) 成立且 $R<+\infty$, 则可逆 Q 过程 $P(t)=(p_{ij}(t),i,j\in E)$ 的 Laplace 变换为

$$\psi_{ij}(t)=\phi_{ij}(t)+\frac{\overline{X}_i(\lambda)\overline{X}_j(\lambda)\pi_j}{\lambda\sum_{k\in E}\pi_k\overline{X}_k(\lambda)}, \quad i,j\in E, \quad \lambda>0,$$

其中 $\Phi(\lambda)=(\phi_{ij}(t),i,j\in E,\lambda>0)$ 是最小 Q 过程的 Laplace 变换, $\overline{X}(\lambda)$ 是方程 (RE) 的最小解.

6 随机单调 Q 过程及对偶 Q 过程

随机单调过程在理论和应用中都有重要意义. 一方面, 随机单调过程的对偶过程存在, 我们可以通过研究对偶过程的性质来得到原过程的性质. 例如, 生灭 Q 过程主特征值的估计和拟平稳分布的存在性均要用到对偶的思想. 另一方面, 具有广泛应用的生灭过程、分枝过程和一维扩散过程均为随机单调过程.

本节取状态空间 $E=\{0,1,2,\ldots\}$, 并设状态之间有自然序关系 "$\leqslant$".

定义 6.1 设 $u,v\in l_1^+$, 称 $u\overset{a}{\leqslant}v$ ($u\overset{a}{<}v$), 如果 $\sum_{i\geqslant k}u_i\leqslant\sum_{i\geqslant k}v_i$ ($\sum_{i\geqslant k}u_i<\sum_{i\geqslant k}v_i$) 对所有的 $k>0$ 成立.

设 X 和 Y 为随机变量, 状态空间为 E, 其分布如下:

$$u_i=P\{X=i\},\quad v_i=P\{Y=i\},\quad i\in E,$$

那么, 我们称

$$X\leqslant Y\Leftrightarrow u\overset{a}{\leqslant}v,$$

或等价于

$$X\leqslant Y\Leftrightarrow P\{X\geqslant k\}\leqslant P\{Y\geqslant k\},\quad \forall k\geqslant 0.$$

注意 $\overset{a}{\leqslant}$ 定义了 l_1^+ 中的一个偏序, $\leqslant$ 定义所有取值于状态空间 E 的随机变量所成集合上的偏序. 如果 $X\leqslant Y$, 则称 X 随机小于 Y, 也可类似定义 $X<Y$ 的概念, 这时称 X 严格地随机小于 Y.

下面的定义中, 定义 $\mathcal{P}$ 为 E 上的所有 (可退化) 概率测度, 即 $\mathcal{P}=\{u\in l_1^+:\sum_{i\geqslant 0}u_i\leqslant 1\}$.

定义 6.2 称两个转移函数 $p_{ij}^{(1)}(t)$ 和 $p_{ij}^{(2)}(t)$ 是随机可比较的, 如果

$$u,v\in\mathcal{P},\quad u\overset{a}{\leqslant}v\Rightarrow\sum_{j\geqslant k}\sum_{i\in E}u_ip_{ij}^{(1)}(t)\leqslant\sum_{j\geqslant k}\sum_{i\in E}v_ip_{ij}^{(2)}(t),\quad \forall k\geqslant 0.$$

单个转移函数 $p_{ij}(t)$ 称为随机单调的, 如果它自身是可比较的, 即

$$u,v\in\mathcal{P},\quad u\overset{a}{\leqslant}v\Rightarrow\sum_{j\geqslant k}\sum_{i\in E}u_ip_{ij}(t)\leqslant\sum_{j\geqslant k}\sum_{i\in E}v_ip_{ij}(t),\quad \forall k\geqslant 0.$$

设 $X(t),t\geqslant 0$ 和 $Y(t),t\geqslant 0$ 是连续时间 Markov 链, 转移函数为 $p_{ij}^{(1)}(t)$ 和 $p_{ij}^{(2)}(t)$. 如果 $X(0)\leqslant Y(0)$ 可推得 $X(t)\leqslant Y(t)$ 对所有的 $t>0$ 成立, 那么, $p_{ij}^{(1)}(t)$ 和 $p_{ij}^{(2)}(t)$ 是随机可比较的.

命题 6.1 (i) $p_{ij}^{(1)}(t)$ 和 $p_{ij}^{(2)}(t)$ 是随机可比较的充要条件是, 对所有 $k\geqslant 0$, $i\leqslant m$ 有

$$\sum_{j\geqslant k}p_{ij}^{(1)}(t)\leqslant\sum_{j\geqslant k}p_{ij}^{(2)}(t).$$

(ii) $p_{ij}(t)$ 是随机单调的充要条件是对每一个固定的 k 和 t, $\sum_{j\geqslant k}p_{ij}(t)$ 是 i 的非减函数.

如果对所有的 $i\leqslant m$, $k\leqslant i$ 或 $k\geqslant m+1$, 有 $\sum_{j\geqslant k}q_{ij}^{(1)}\leqslant\sum_{j\geqslant k}q_{mj}^{(2)}$, 则我们称两个 Q- 矩阵 $Q^{(r)}=(q_{ij}^{(r)})$, $i,j\in E$, $r=1,2$ 是可比较的.

定理 6.1 对于给定的两个全稳定 Q- 矩阵 $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$, 最小 Q 过程 $f_{ij}^{(1)}(t)$ 和 $f_{ij}^{(1)}(t)$ 是随机可比较的充要条件是下面两条件满足:

(i) $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$ 是可比较的;

(ii) $Q^{(2)}$ 是零流出, 即对任意 $\lambda>0$, 方程 $(\lambda I-Q^{(2)})U=0$ $(0\leqslant U\leqslant 1)$ 只有零解.

注 6.1 在文献 [27] 中条件 (ii) 没有, 如果没有条件 (ii), 这个定理是错误的, 反例很容易得到的, 在此省略. 由定理 6.1 得下面的推论:

推论 6.1 对给定的全稳定 Q- 矩阵 Q, 最小 Q 过程 $F=(f_{ij}(t))$ 随机单调, 当且仅当以下两条同时成立,

(i) Q 单调, 即

$$\sum_{j\geqslant k} q_{ij} \leqslant \sum_{j\geqslant k} q_{mj}, \quad i\leqslant m, \quad k\leqslant i \quad \text{或} \quad k\geqslant m+1;$$

(ii) Q 零流出.

由陈安岳和张汉君[28], 有下面两个定理:

定理 6.2 对任给的 Q- 矩阵 Q, 如果随机单调 Q 过程存在, 则它必是唯一的.

定理 6.3 对任给的生灭 Q- 矩阵 Q,

(i) 最小 Q 过程是随机单调的当且仅当 $R=+\infty$;

(ii) 存在非最小随机单调 Q 过程的充要条件是 $R<\infty$ 且 $S<\infty$, 此时定理 5.5 中构造的 Q 过程 $P(t)$ 是唯一的随机单调 Q 过程.

下面讨论与随机单调过程密切相关的对偶过程.

给定一个转移函数 $p_{ij}(t)$, 定义 $P_i(A)$, $i\in E$ 为空间 $(\Omega,\mathfrak{F})$ 上的一族 (可能是退化的) 概率测度, 设 $X(t)$, $t\geqslant 0$ 为坐标过程. 如果 $P_i(X(t)\geqslant k)$ 对固定的 k 和 t 是 i 的非减函数, 则 $p_{ij}(t)$ 是随机单调的.

命题 6.2 [29] 设 $p_{ij}^{(1)}(t)$ 是转移函数, 那么存在另一个转移函数 $p_{ij}^{(2)}(t)$ 满足

$$P_i^2(X(t)\leqslant j) = P_j^1(X(t)\geqslant i), \quad i,j\in E, \quad t\geqslant 0 \tag{D}$$

的充要条件是 $p_{ij}^{(1)}(t)$ 是随机单调的.

设 $P^{(1)}(t)$ 是一个随机单调的转移函数, 由命题 6.2, 存在另一转移函数 $P^{(2)}(t)$ 满足条件 (D), 设 $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$ 分别为 $P^{(1)}(t)$ 和 $P^{(2)}(t)$ 的 Q- 矩阵, 则我们有下面的简单关系:

$$\begin{aligned} &q_{ji}^{(1)} - q_{j-1,i}^{(1)} = q_{ji}^{(2)} - q_{j-1,i}^{(2)}, \quad \forall i,j\in E \quad (q_{-1,j}\equiv 0, \quad \forall j\in E), \\ &q_{ij}^{(1)} = \sum_{k=0}^{i} (q_{jk}^{(2)} - q_{j+1,k}^{(2)}), \quad \forall i,j\in E. \end{aligned}$$

注 6.2 虽然 $Q^{(1)}$ 可以由 $Q^{(2)}$ 通过上式来确定, 但在一般情形下, $Q^{(2)}$ 不能由 $Q^{(1)}$ 来确定.

定理 6.4 [27] 设 $P^{(1)}(t)$ 是随机单调, 则它的对偶 $P^{(2)}(t)$ 是 Feller Q 过程. 因此, $Q^{(2)}$ 是全稳定的, 且 $P^{(2)}(t)$ 是最小 Q 过程.

命题 6.3 设 $Q^{(1)}$ 是生灭 Q- 矩阵, 即 $Q^{(1)}$ 满足 (BD), 则其对偶 Q- 矩阵 $Q^{(2)}=(q_{ij}^{(2)})$ 也是生灭 Q- 矩阵且满足

$$q_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \mu_{i+1}, & j=i+1, \quad i\geqslant 0, \\ \lambda_i, & j=i-1, \quad i\geqslant 1, \\ -(\lambda_i+\mu_{i+1}), & j=i, \quad i\geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

7 抽象空间上 Q 过程唯一性准则

在以下部分, 状态空间 (E,ε) 是一个 Polish 空间 (可分完备距离空间), ε 为其上的 Borel σ- 代数.

定义 7.1 (1) 我们称 $(q(x),q(x,A))$ $(x\in E, A\in\varepsilon)$ 为 q- 对, 如果对每一个 $x\in E$, $q(x,\cdot)$ 是 ε 上的测度, $q(x,\{x\})=0$, $q(x,E)\leqslant q(x)$; 并且对每一个 $A\in\varepsilon$, $q(x,\cdot)$ 和 $q(\cdot,A)$ 都是 $q(x,\cdot)$- 可测.

(2) 一个状态 x 称为稳定的或者瞬时的, 如果 $0\leqslant q(x)<\infty$ 或 $q(x)=\infty$. 一个 q- 对为全稳定的或者全瞬时的, 如果 E 的所有状态分别都是全稳定的或都是全瞬时的.

(3) 进一步, 如果 $q(x)=q(x,E)$, 称状态 x 为保守的, 如果对所有的状态 $x\in E$ 都是保守的, 则称 q- 对保守.

陈木法和郑小谷[30] 给出了一般状态空间 q 过程唯一性准则, 即定理 7.1.

定理 7.1 给定 q- 对 $(q(x),q(x,A))$, 则 q- 过程是唯一的当且仅当下面两条同时成立,

(i) 存在 $\lambda>0$, 使得 $C(\lambda)\triangleq\inf_{x\in E}P^{\min}(\lambda,x,E)>0$;

(ii) q- 对保守, 或者方程

$$\begin{cases}\eta_\lambda(\lambda I-\Omega)=0,\\ 0\leqslant\eta_\lambda,\quad \eta_\lambda(E)<\infty\end{cases}$$

只有零解. 其中 $(P^{\min}(\lambda,x,E), x\in E, E\in\varepsilon)$ 是最小 q 过程.

注 7.1 类似于命题 3.2, 可以证明定理 7.1(i) 成立等价于一切 q 过程都是 F 型 q 过程.

注 7.2 陈木法[11] 给出了类似于定理 3.6 和 3.7 的一般状态空间 Q 过程唯一性的若干充分条件.

8 开问题

本文认为下面三个问题是 Q- 矩阵问题中最有理论和实际价值的开问题, 希望我国年轻的概率论学者能够攻克这些问题:

问题 1 当 Q- 矩阵为 "双无限" 时, 不中断 Q 过程的存在唯一性准则是什么?

问题 2 当 Q- 矩阵为全稳定时, 可逆 Q 过程的唯一性判别准则是什么?

问题 3 (Williams 开问题 [31, 第 349 页]) 设 m 为 E 上的概率测度, Q- 矩阵 $Q=(q_{ij},\, i,j\in E)$ 满足

$$q_{ij}\geqslant 0,\quad i\neq j,\quad \sum_{k\neq i}q_{ik}=-q_{ii}\leqslant\infty,\quad \forall\, i,$$
$$\sum_{j\neq i}m_jq_{ji}=-m_iq_{ii}\leqslant\infty,\quad \forall\, i.$$

在什么情形下存在一个 Q 过程 $P(t)=(p_{ij}(t);i,j\in E,t\geqslant 0)$, 使得 $\sum_{i\in E}m_ip_{ij}(t)=m_j$?

注 8.1 Rogers 和 Williams [32] 在 Q- 矩阵关于 m 可配称时解决了 Williams 开问题.

注 8.2 张汉君等人[33,34] 分别在 Q- 矩阵为全稳定和单瞬时时解决了 Williams 开问题.

致谢 很高兴为侯振挺教授的 80 华诞写这篇纪念文章. 1974 年, 侯振挺教授在《中国科学》上发表了 Q 过程唯一性准则"; 1978 年, 该工作获得英国皇家学会 Rollo Davidson 奖, 这一事件对中国数学的发展起到了极大的推动作用. 侯老师是本文第一作者研究概率论的领路人, 对于侯振挺教授的培养和教诲, 笔者感激不尽, 终生不忘. 最后衷心祝愿侯振挺教授健康长寿! 同时感谢审稿人对本文提出的宝贵意见. 您的建议对本文的修改与完善起到了非常重要的作用, 在此致以深深的谢意!

参考文献

1 Kolmogorov A N. Über die analytischen Mothoden in der wahrs. Math Ann, 1931, 104: 415–458
2 Doob J L. Markov chains-denumberable case. Trans Amer Math, 1945, 58: 455–473
3 Feller W. On the integro-differential equations of pure discontinuous Markov processes. Trans Amer Math Soc, 1940, 48: 488–515
4 Chung K L. Markov chains with stationary transition probablities. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1960
5 Kendall D G. Some receng advances in the theorey of denumberable Markov processes. In: Transactions of the Fourth Prague Conference on Information Theoreyetc. Prague: Cover Publications, 1967
6 王梓坤, 杨向群. 生灭过程与马尔可夫链 (第 2 版). 北京: 科学出版社, 1994
7 侯振挺, 郭青峰. 齐次马尔可夫过程. 北京: 科学出版社, 1978
8 侯振挺. Q 过程唯一性准则. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1984
9 侯振挺, 邹捷中, 张汉君, 等. 马尔可夫过程的矩阵问题. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1994
10 杨向群. 马尔可夫过程构造论. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1980
11 Chen M F. From Markov chains to non-equilibrium particle systems. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004
12 Williams D. A Note on the Q-Matrix of Markov chains. Z Wahrs Verw Geb, 1967, 7: 116–121
13 侯振挺, 费志凌. 关于 Q- 矩阵问题的一个 Williams 定理的注记. 数理统计与应用概率, 1990, 2: 230–242
14 陈安岳. 瞬时态 Q 过程构造论的若干问题. 博士学位论文. 长沙: 长沙铁道学院, 1988
15 邹捷中. p- 函数的震荡问题. 博士学位论文. 长沙: 长沙铁道学院, 1987
16 张汉君. 瞬时态可和的 Q- 矩阵. 数学年刊 A 辑, 1994, 15: 111–118
17 刘再明. 瞬时态 Q 过程定性理论的若干问题. 博士学位论文. 长沙: 长沙铁道学院, 1988
18 Reuter G E H. Denumberable Markov processes. Acta Math, 1957, 5: 1–46
19 侯振挺. Q 过程唯一性准则. 中国科学, 1974, 2: 115–130
20 Reuter G E H. Denumberable Markov processes (IV): On C. T. Hou's uniqueness theorem for Q-semigroups. Probab Theory Related Fields, 1976, 33: 309–315
21 张汉君. Q 过程构造论中 H- 条件. 长沙铁道学院学报, 1992, 10: 68–72
22 侯振挺, 陈木法. 可逆 Q 过程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1979
23 Chen A Y, Zhang H J. Criterion for the existence of reversible Q-processes. Acta Math Sin New Ser, 1987, 3: 133–142
24 陈安岳, 张汉君. 单瞬时可逆 Q 过程存在性问题. 应用概率统计, 1992, 8: 234–241
25 陈木法. 有限流出有势 Q 过程的构造. 数学学报, 1982, 25: 136–166
26 陈安岳. 双有限有势 Q 过程的构造. 数学年刊 A 辑, 1984, 5: 153–164
27 Anderson W J. Continuous-time Markov chains: An applications-oriented approch. New York: Springer, 1991
28 Chen A Y, Zhang H J. Existence and uniqueness of stochastically monotone Q-processes. SEAMS Bull Math, 1999, 23: 559–583
29 Siegmund D. The equivalence of absorbing and reflecting barrier problems for stochastically monotone Markov processes. Ann Probab, 1976, 6: 914–924
30 陈木法, 郑小谷. 抽象空间中 Q 过程的唯一性准则. 中国科学, 1982, 4: 298–308
31 Rogers L C G, Williams D. Diffusions, Markov Processes and Martingales. Cambrige: Cambrige University Press, 2000
32 Rogers L C G, Williams D. Construction and approximation of transition matrix functions. Adv Appl Probab, 1986, 18: 133–160
33 张汉君, 林祥, 侯振挺. Q 过程的不变分布 (I). 数学年刊 A 辑, 2001, 22: 323–330
34 张汉君, 林祥, 侯振挺. Q 过程的不变分布 (II). 数学年刊 A 辑, 2002, 23: 361–370

The criterion for uniqueness of Q-processes and related problems

ZHANG HanJun & PENG XiangYang

Abstract In this paper, concentrating on the Hou Zhenting's paper "The criterion for uniqueness of a Q-process", we review a number of associated results of the existence and uniqueness for Q-processes, especially Hou-Conditions (H-conditions) at the construction of Q-processes. We successively summarize the existence and uniqueness for honest Q-processes, revisable Q-processes, stochastically monotone Q-processes, dual Q-processes and Q-processes in abstract space, give some associated results for birth-death processes, and point out three unsolved open problems. We wish to help Chinese young probability scholars to understand the outstanding contributions of Chinese probability seniors especially Mr. Hou.

Keywords ***Q*-processes, existence, uniqueness**

MSC(2010) **60J27, 60J35**

doi: 10.1360/N012015-00068