Riemann 流形第一特征值的线性逼近 *

陈木法[①]　E. Scacciatelli[②]　姚　亮[①]

(①北京师范大学数学系,北京 100875; ② University "La Sapienza", 00815 Rome, Italy)

摘要　对于 Ricci 曲率下有界的紧连通 Riemann 流形,其 Laplace 算子的第一特征值的线性逼近如何? 这里给出了使用计算机辅助证明的解答,它在一定意义下是最佳的.

关键词　第一特征值　Riemann 流形　线性逼近

1 主要结果

设 M 是紧连通 Riemann 流形,无边或具凸边界 ∂M. 当 $\partial M \neq \emptyset$ 时,考虑 Neumann 边界条件. 再设 $\mathrm{Ric}_M \geqslant K$, $K \in \mathbb{R}$. 分别以 d 和 D 表示流形的维数和直径. 所关心的是 Laplace 算子 Δ 的第一(平非凡)特征值 λ_1 的估计. 关于此论题,已积累大量文献. 详见[1～3]及所引文献. 问题之一是研究(形式上)与流形维数无关的线性估计(文献[4]问题 1):

$$\lambda_1 \geqslant \pi^2/D^2 + \delta K \qquad (\delta \in \mathbb{R}). \tag{1.1}$$

此类线性估计经逐步改进如下表:

钟家庆和杨洪苍(1984)[5]	$\dfrac{\pi^2}{D^2}$, 如 $K \geqslant 0$
D.G. Yang (1999)[6]	$\dfrac{\pi^2}{D^2} + \dfrac{K}{4}$, 如 $K \geqslant 0$
陈木法和王凤雨(1997)[3]	$\dfrac{\pi^2}{D^2} + \max\left\{\dfrac{\pi}{4d}, 1 - \dfrac{2}{\pi}\right\}K$, 如 $K \geqslant 0$ $(1 - 2/\pi \approx 0.36338)$
蔡开仁(1991)[7]	$\dfrac{\pi^2}{D^2} + K$, 如 $K \leqslant 0$
陈木法和王凤雨(1997)[3]	$\dfrac{\pi^2}{D^2} + \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)K$, 如 $K \leqslant 0 (\pi/2 - 1 \approx 0.5708)$
赵迪(1999)[8]	$\dfrac{\pi^2}{D^2} + 0.52K$, 如 $K \leqslant 0$

当 $K = 0$ 时, 第一个估计是最优估计. 文献[8]还证明了 $\lambda_1 \geqslant \pi^2/D^2 + K/2$, 倘若 $-5\pi^2/D^2 \leqslant K \leqslant 0$. 本文的主要结果如下:

2000-03-15 收稿,2001-03-19 收修改稿

* 国家自然科学基金重点项目(批准号: 19631060)、973 项目、教育部博士点专项研究基金、C.N.R. 和罗马 I 大学资助

定理 1.1 (计算机辅助证明) 在一般情况下(对一切 K), 有 $\lambda_1 \geqslant \pi^2/D^2 + K/2$. 特别地,

$$\lambda_1 \geqslant \pi^2/D^2 + (3 - \pi^2/4)K, \quad 如\ K \geqslant 4/D^2, \tag{1.2}$$

$$\lambda_1 \geqslant \pi^2/D^2 + (\pi^2/4 - 2)K, \quad 如\ K \leqslant -4/D^2, \tag{1.3}$$

$$\lambda_1 \geqslant \pi^2/D^2 + (\pi^2/8\alpha_0 - 1)K, \quad 如\ K \leqslant -8\alpha_0/D^2, \tag{1.4}$$

其中 $\alpha_0 \approx 0.85403$ 是方程 $e^{\alpha} = 2\alpha\int_0^1 e^{\alpha y^2}$, $\alpha \in [0, 3)$ 的惟一解.

更明确些, $3 - \pi^2/4 \approx 0.532599$, $\pi^2/4 - 2 \approx 0.467401$, $\pi^2/8\alpha_0 - 1 \approx 0.444563$. 事实上, 若使用将在下节给出的常微分方程的更多精确解, 此结果还可加细. 例如, 部分地使用数值证明, 将在本文的末节给出

$$\lambda_1 \geqslant \pi^2/D^2 + K/2 + (5 - \pi^2/2)D^2K^2/8, \quad 如\ |K| \leqslant 4/D^2, \tag{1.5}$$

而且等号当 $K = 0$ 或 $|K| = 4/D^2$ 时成立. 下节将解释此结果在某种意义下是最优的. 这里, "最优"一词可能有些含混,因为, 在负曲率情况下, 并无 λ_1 精确解的几何实例; 况且这里所求的是与维数 d 无关的估计. 另一方面, 为确定精确常数,需要估计若干二重或三重积分, 相当繁杂而并无特别价值, 故留给计算机去完成. 因此, 所述定理是计算机辅助证明的结果. 当然, 本文所用的方法也可用于改进文献[3]的其他推论.

2 证明思路

证明共分 4 步. 首先使用文献[3]关于 λ_1 下界估计的变分公式, 将高维化为 1 维;然后就维数无关情形将 1 维问题进一步简化;接着给出 Sturm-Liouville 特征值问题的一些特解, 使得有可能确定(1.2)~(1.5)式中的精确常数; 最后使用文献[9]所引进的逼近程序, 证明所得估计成立. 研究此论题的目的之一就是检验上述逼近程序的有效性. 本节完成前 3 步,最后一步留到下一节去完成.

文献[3]所得到的变分公式如下:

$$\lambda_1 \geqslant 4 \sup_{f\in\mathscr{F}} \inf_{r\in(0,D)} f(r)\left\{\int_0^r e^{-C(s)}ds\int_s^D [e^C f](u)du\right\}^{-1}, \tag{2.1}$$

其中 $C(r) = \frac{1}{4}\int_0^1 \gamma(s)ds$. 当 $K \geqslant 0$ 时, $\gamma(r) = -2\sqrt{K(d-1)}\tan\left[\frac{r}{2}\sqrt{K/(d-1)}\right]$, 而当 $K \leqslant 0$ 时, $\gamma(r) = 2\sqrt{-K(d-1)}\tanh\left[\frac{r}{2}\sqrt{-K/(d-1)}\right]$; 试验函数类为 $\mathscr{F} = \{f \in C[0, D]: f|_{(0,D)} > 0\}$. (2.1)式本质上是一种特征值比较定理(见文献[3]和[10]). 事实上, 若记 $\lambda_0^{(1)}$ 为算子 $L_1 = 4d^2/dr^2 + \gamma(r)d/dr$ 的第一混合特征值(边界条件为 $f(0) = 0$, $f'(D) = 0$), 则 $\lambda_1 \geqslant \lambda_0^{(1)} \geqslant$(2.1)式的右方. 亦即,若存在 f: $f(0) = 0$, $f'(D) = 0$, $f'|_{(0,D)} > 0$ 和常数 $\varepsilon > 0$,使得

$$4f'' + \gamma f' + \varepsilon f \leqslant 0, \tag{2.2}$$

则 $\lambda_1 \geqslant \varepsilon$(当 $\lambda_0^{(1)} > 0$ 时, $\lambda_0^{(1)}$ 的特征函数满足如上所述 f 所满足的条件). 事实上, 此断言等价于 $\lambda_0^{(1)} \geqslant$(2.1)式的右方.

在继续深入讨论之前, 提及一个等价结果. 由于 γ 为奇函数: $\gamma(-r) = -\gamma(r)$, L_1 在 $(0, D)$上的第一混合特征值重合于它在$(-D, D)$上的第一非平凡 Neumann 特征值. 这样, 后一特征值即是 λ_1 的下界. 这是文献[11]定理 2 及其注和文献[12]定理 14 的主要结果.

如同文献[4]所指出：当 $d \uparrow \infty$ 时，$\gamma(r) \uparrow -Kr$. 这样，问题转化为考虑算子 $L_2 = 4\mathrm{d}^2/\mathrm{d}r^2 - Kr\mathrm{d}/\mathrm{d}r$ 的混合特征值. 这是因为：满足相同边界条件的微分不等式

$$4f'' - Krf' + \varepsilon f \leqslant 0 \tag{2.3}$$

的解必定满足(2.2)式. 反之，若(2.2)式对于一切 d 成立，则(2.3)式也成立. 另一方面，经一尺度变换，可把 D 化为 1. 详言之，若记 $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha)$ 为算子 $L = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 - 2\alpha x\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,1)$ 上的第一混合特征值($f(0)=0$, $f'(1)=1$)，其中 $\alpha = D^2K/8$，则有如下结果：

引理 2.1　$\lambda_1 \geqslant 4\lambda_0/D^2$.

自此以后，固定刚刚所用的记号 α，L 和 $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha)$. 熟知，对于一般的 α，λ_0 并无显式解. 但我们确有一批特解. 下述特解是熟知的：

引理 2.2　当 $\alpha = 0$ 时，$\lambda_0 = \pi^2/4$ 且特征函数为 $g(x) = \sin(\pi x/2)$.

事实上，有无穷多个特解.

引理 2.3　对于每一整数 $n \geqslant 2$，设 α_n 为多项式 $\sum_{k=1}^{n}(-4\alpha)^{k-1}/(n-k)!(2k-2)!$ 的最小正根，则特征值 $\lambda_0(\alpha_n) = 2(2n-1)\alpha_n$ 且对应的特征函数

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-4\alpha_n)^{k-1}x^{2k-1}/(n-k)!(2k-1)!.$$

开头 4 个特解如下表：

n	α_n	$\lambda_0(\alpha_n)$
2	$1/2$	3
3	$(3-\sqrt{6})/2 \approx 0.275255$	$5(3-\sqrt{6}) \approx 2.75255$
4	$\frac{1}{2}(5-\sqrt{10}\cos\theta - \sqrt{30}\sin\theta) \approx 0.190164 \quad \theta := \frac{1}{3}\arctan\sqrt{3/2}$	$14\alpha_4 \approx 2.66229$
5	$\frac{7}{2} - \frac{B}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2^{1/4}}\sqrt{-\frac{14}{B} + \frac{21-B^2}{\sqrt{2}}} \approx 0.145304 \quad B := \sqrt{7+\sqrt{70}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\sqrt{3/7}\right)}$	$18\alpha_5 \approx 2.61546$

当 $n \geqslant 6$ 时，只能作数值计算. 注意当 n 增加时，α_n 严格下降. 此结果对应于正曲率情形. 有趣的是，其"对偶"给出负曲率情形的特解.

引理 2.4　设 $n \geqslant 2$ 而 α_n 如上. 则对应于 $\alpha = -\alpha_n$，有特征值 $\lambda_0(-\alpha_n) = 4(n-1)\alpha_n$ 及特征函数 $g_n(x) = \mathrm{e}^{-\alpha_n x^2}\sum_{k=1}^{n-1}(-4\alpha_n)^{k-1}x^{2k-1}/(n-1-k)!(2k-1)!$. 此外，相应于 $\alpha = -\alpha_0$ (由定理 1.1 给定)，有 $\lambda_0(-\alpha_0) = 2\alpha_0$ 及特征函数 $g(x) = \mathrm{e}^{-\alpha_0 x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{\alpha_0 y^2}$.

有了这些引理之后，便容易理解定理 1.1 的含义. 一般估计意味着曲线 $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha)$ 位于直线 $\lambda(\alpha) = \pi^2/4 + \alpha$ 的上方并与之相切. 估计(1.2)式意味着曲线 $\lambda_0(\alpha)$ 在区间 $[1/2, \infty)$ 上位于两点 $(0, \pi^2/4)$ 和 $(1/2, 3)$ 的联线的上方. 类似地，此曲线在 $(-\infty, -\alpha_0]$ 上位于 $(0, \pi^2/4)$ 和 $(-\alpha_0, 2\alpha_0)$ 联线的上方. 以上事实解释了"最优"一词的含义. 现在，容易明白可使用引理 2.3 和 2.4 所提供的更多特解来进一步改进定理 1.1. 例如，刚刚提到的那条 $(0, \pi^2/4)$ 和 $(-\alpha_0, 2\alpha_0)$ 的联线可换成曲线 $\lambda_0(\alpha)$ 在点 $-\alpha_0$ 处的切线.

为证明这些引理，需作些准备. 首先是特征函数的刻画.

引理 2.5 $\lambda_0(\alpha)$的特征函数 g 可表成

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \prod_{k=1}^{m-1} [2(2k-1)\alpha - \lambda_0(\alpha)]. \tag{2.4}$$

此外，

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \prod_{k=1}^{m} [2(2k-1)\alpha - \lambda_0(\alpha)] \geqslant 0, \tag{2.5}$$

等号成立当且仅当 $x=1$：

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \prod_{k=1}^{m} [2(2k-1)\alpha - \lambda_0(\alpha)] = 0. \tag{2.6}$$

证 设 $\alpha \in \mathbb{R}$. 考虑$(0, 1)$上的微分方程 $f'' - 2\alpha x f' + \lambda f = 0$，满足边界条件 $f(0)=0$ 及 $f'(1)=0$. 不失一般性，可设 λ_0 的特征函数 g 还满足 $g'|_{(0,1)} > 0$. 设 f 为方程的解，其幂级数展式为 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 那么，边界条件 $f(0)=0$ 推出 $a_0 = 0$，$a_{2n} = 0$ 及 $a_{n+2} = \frac{2\alpha n - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n$,对一切 $n \geqslant 1$ 成立. 不失一般性，可设 $a_1 = 1$,令 $\beta_m = a_{2m-1}$，$m \geqslant 1$,则对于一切 $m \geqslant 1$,有 $\beta_{m+1} = \frac{2\alpha(2m-1) - \lambda}{2m(2m+1)} \beta_m$,归纳得出

$$\beta_m = \frac{1}{(2m-1)!} \prod_{k=1}^{m-1} [2(2k-1)\alpha - \lambda], \quad m \geqslant 1, \tag{2.7}$$

因而 $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m x^{2m-1}$. 由于 $x \in [0, 1]$，而且$|\beta_{m+1}/\beta_m| \sim m^{-1}$，此级数恒绝对收敛. 同样结论也适用于 $f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)\beta_m x^{2m-2}$ 和 $f''(x)$. 现在，边界条件 $f'(1) = 0$ 导出 $\sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)\beta_m = 0$.

其次，当 $\lambda = \lambda_0(\alpha)$时,$f'(x) \geqslant 0$,等号当且仅当处于边界 $x=1$ 时成立. 由此及简单计算导出(2.5)和(2.6)式. 证毕.

下述结果即是上面所提到的“对偶”.

引理 2.6 设$|\alpha| \leqslant 1/2$，则 $\lambda_0(\alpha) = \lambda_0(-\alpha) + 2\alpha$ 且其特征函数可表成 $g(x) = \mathrm{e}^{\alpha x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \prod_{k=1}^{m-1} [-2(2k+1)\alpha - \lambda_0(-\alpha)]$. 此外，

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \prod_{k=1}^{m} [-2(2k-1)\alpha - \lambda_0(-\alpha)] \geqslant 0, \tag{2.8}$$

等号成立当且仅当 $x=1$：

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \prod_{k=1}^{m} [-2(2k-1)\alpha - \lambda_0(-\alpha)] = 0. \tag{2.9}$$

证 设 $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x^2} g(x)$,则方程 $g'' - 2\alpha x g' + \lambda g = 0$ 变成 $f'' + 2\alpha x f' + (\lambda + 2\alpha) f = 0$. 这给出了 α 和 $-\alpha$ 之间的对偶. 然而，条件$g'|_{(0,1)} > 0$ 变成在$(0, 1)$上 $f' > -2\alpha x f$，而 $g'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = -2\alpha f(1)$.

由引理 2.5 的证明的第 1 段可见, $f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m x^{2m-1}$, 且 $\beta_m=\frac{1}{(2m-1)!}\prod_{k=1}^{m-1}[-2(2k-1)\alpha-\lambda-2\alpha]$. 将 λ 换成 $\lambda'+2\alpha$, 得

$$\beta_m=\frac{1}{(2m-1)!}\prod_{k=1}^{m-1}[-2(2k+1)\alpha-\lambda']=\frac{1}{(2m-1)!}\prod_{k=2}^{m}[-2(2k-1)\alpha-\lambda'].$$

现在

$$f'(x)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m x^{2m-2},\qquad c_m:=(2m-1)\beta_m,$$

$$f'>-2\alpha x f\Leftrightarrow c_1>\sum_{m=1}^{\infty}(-c_{m+1}-2\alpha\beta_m)x^{2m}.\tag{2.10}$$

注意 $c_{m+1}+2\alpha\beta_m=\frac{1}{(2m)!}\prod_{k=1}^{m}[-2(2k-1)\alpha-\lambda']$ 且 $c_1=1$. 由(2.10)式, $f'>-2\alpha x f$, 当且仅当 $1>-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\prod_{k=1}^{m}[-2(2k-1)\alpha-\lambda']$, 即

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\prod_{k=1}^{m}[-2(2k-1)\alpha-\lambda']>0.\tag{2.11}$$

这样, 当且仅当

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}\prod_{k=1}^{m}[-2(2k-1)\alpha-\lambda']=0\tag{2.12}$$

时, 有 $f'(1)=-2\alpha f(1)$. 由引理 2.5, 最后两条件(2.11)和(2.12)式意味着 λ'是算子 $L=\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2+2\alpha x\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ 的第一特征值, 并有特征函数 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\prod_{k=1}^{m-1}[-2(2k-1)\alpha-\lambda']$, 进而 $\lambda'=\lambda_0(-\alpha)$. 回到原来的 $\lambda(=\lambda'+2\alpha)$和 g, 断言 $\lambda_0(\alpha)=\lambda_0(-\alpha)+2\alpha$ 而且其特征函数 $g=\mathrm{e}^{\alpha x^2}f$ 具有引理所述的表达式. 证毕.

引理 2.3 的证　设 $n\geqslant 2$ 为整数,令 $\lambda=2(2n-1)\alpha$, 其中 $\alpha>0$ 待定,则对于一切 $k\geqslant n+1$, 有 $\beta_k=0$. 进而易证

$$\beta_k=\frac{(n-1)!}{(n-k)!(2k-1)!}(-4\alpha)^{k-1},\quad 1\leqslant k\leqslant n.\tag{2.13}$$

这样, $f(x)=(n-1)!\sum_{k=1}^{n}(-4\alpha)^{k-1}x^{2k-1}/(n-k)!(2k-1)!$. 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-4\alpha)^{k-1}}{(n-k)!(2k-2)!}=0\tag{2.14}$$

时, 有 $f'(1)=0$. 由此求得最小根 α_n, 然后由它导出特征函数 $g_n=f/(n-1)!$. 证毕.

引理 2.4 的证　设 $\alpha_n(n\geqslant 2)$如引理 2.3 所给定,则

$$\prod_{k=1}^{m-1}[2(2k+1)\alpha_n-\lambda_0(\alpha_n)]=\begin{cases}(-4\alpha_n)^{m-1}(n-2)!/(n-1-m)!, & \text{如 } m\leqslant n-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是

$$\mathrm{e}^{-\alpha_n x^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\prod_{k=2}^{m}[2(2k-1)\alpha_n-\lambda_0(\alpha_n)]=\mathrm{e}^{-\alpha_n x^2}(n-2)!\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-4\alpha_n)^{m-1}x^{2m-1}}{(n-1-m)!(2m-1)!}.$$

由引理 2.6 得 $\lambda_0(-\alpha_n)=\lambda_0(\alpha_n)-2\alpha_n=4(n-1)\alpha_n$ 及所求的特征函数. 至此, 已证得引理的主要部分.

引理的末项断言更易证. 同样地, 只需说明 $g(0)=0$, $g'|_{(0,1)}>0$ 且 $g'(1)=0$. 证毕.

3 定理的证明(计算机辅助)

由引理 2.1, 只需证明

$$\lambda_0 \geqslant \pi^2/4+\alpha, \qquad \text{对一切 } \alpha, \tag{3.1}$$

$$\lambda_0 \geqslant \pi^2/4+(6-\pi^2/2)\alpha, \qquad \text{当 } \alpha \geqslant 1/2, \tag{3.2}$$

$$\lambda_0 \geqslant \pi^2/4+(\pi^2/2-4)\alpha, \qquad \text{当 } \alpha \leqslant -1/2 \tag{3.3}$$

$$\lambda_0 \geqslant \pi^2/4+(\pi^2/4\alpha_0-2)\alpha, \qquad \text{当 } \alpha \leqslant -\alpha_0. \tag{3.4}$$

由引理 2.2, 当 $\alpha=0$ 时, 4 个不等式全变为等式. 由引理 2.3 和 2.4, (3.2)~(3.4)式分别于 $\alpha=1/2$, $-1/2$ 和 $-\alpha_0$ 处等号成立. 待证诸不等式对于其他的所有 α 也成立. 想法是使用文献[9]所建议的逼近程序.

记 $C(x)=-\alpha x^2$, $\mathscr{F}=\{f\in C[0,D]: f(0)=0, f|_{(0,1)}>0\}$. 令 $II(f)(x)=f(x)^{-1}\int_0^x \mathrm{e}^{-C(y)}\mathrm{d}y\int_y^1 f\mathrm{e}^C$. 显然, 若 $f\geqslant 0$, 则 $II(f)\in\mathscr{F}$. 定义 $\varphi(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-C(y)}\mathrm{d}y$, $f_1=\sqrt{\varphi}$, $f_{n+1}=f_n II(f_n)$, $\delta_n=\inf_{x\in(0,1)}II(f_n)(x)^{-1}$, $\delta_n'=\sup_{x\in(0,1)}II(f_n)(x)^{-1}$, 则文献[9]中已证: $\delta_n\downarrow$, $\delta_n'\uparrow$, $\delta_n'^{-1}\geqslant\lambda_0\geqslant\delta_n^{-1}$ 对于一切 n 成立. 这样, 由(3.1)~(3.4)式知, 只需证明存在 $n\geqslant 1$, 使得

$$\sup_{x\in(0,1)} II(f_n)(x)\leqslant[\pi^2/4+\alpha]^{-1}, \qquad \text{当 } |\alpha|\leqslant 1/2, \tag{3.5}$$

$$\sup_{x\in(0,1)} II(f_n)(x)\leqslant[\pi^2/4+(6-\pi^2/2)\alpha]^{-1}, \qquad \text{当 } \alpha\geqslant 1/2, \tag{3.6}$$

$$\sup_{x\in(0,1)} II(f_n)(x)\leqslant[\pi^2/4+(\pi^2/2-4)\alpha]^{-1}, \qquad \text{当 } -\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant -1/2, \tag{3.7}$$

$$\sup_{x\in(0,1)} II(f_n)(x)\leqslant[\pi^2/4+(\pi^2/4\alpha_0-2)\alpha]^{-1}, \qquad \text{当 } -\alpha_0\pi^2/(\pi^2-8\alpha_0)\leqslant\alpha\leqslant -\alpha_0. \tag{3.8}$$

困难在于: 每一次迭代, 需要多计算一、两重积分. 这样,除非被积函数较为简单(如多项式), 三次以上的迭代就不易实现. 克服这一困难的要点是改变初值 f_1. 注意上述迭代法不仅是特征值、而且也是特征函数的逼近定理, 因此自然采用 4 种显式解的适当修正来代替初值 $f_1=\sqrt{\varphi}$. 相应地, 将实直线分成 5 段来处理: $[1/2,\infty)$, $(0,1/2)$, $(-1/2,0)$, $(-\alpha_0,-1/2)$ 及 $(-\alpha_0\pi^2/(\pi^2-8\alpha_0), -\alpha_0)$.

(a) $\alpha\geqslant 1/2$ 情形. 取 $f_1(x)=x-x^3/3$, 它是对应于 $\alpha=1/2$ 的 λ_0 的特征函数. 令 $J_m(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{\alpha y^2}\mathrm{d}y\int_y^1 u^{2m-1}\mathrm{e}^{-\alpha u^2}\mathrm{d}u$, $m\geqslant 1$, 则

$$J_{m+1}(x)=-\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha}\varphi(x)+\frac{1}{2(2m+1)\alpha}x^{2m+1}+\frac{m}{\alpha}J_m(x), \tag{3.9}$$

其中 $\varphi(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{\alpha y^2}\mathrm{d}y$. 于是

$$J_m(x)=-\frac{e^{-\alpha}\varphi(x)}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!\alpha^{k+1}}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-1)!x^{2(m-k)-1}}{(m-1-k)!\alpha^{k+1}[2(m-k)-1]}.\tag{3.10}$$

因此

$$\begin{aligned}f_2(x)&=\int_0^x e^{\alpha y^2}dy\int_y^1 f_1(u)e^{-\alpha u^2}du=J_1(x)-J_2(x)/3\\&=\frac{1-2\alpha}{6\alpha^2}e^{-\alpha}\varphi(x)+\frac{3\alpha-1}{6\alpha^2}x-\frac{1}{18\alpha}x^3.\end{aligned}\tag{3.11}$$

故可断言 $II(f_1)=f_2/f_1$ 在$[0.725,\infty)$上满足(3.6)式. 即曲线$[f_2/f_1](x)$位于直线 $y(x)\equiv(\pi^2/4+\alpha)^{-1}$的下方. 通常，如结论在所考虑区间内的某点 α_c 处成立，则该结论对于区间上的一切 $\alpha>\alpha_c$ 也成立，以后不再重述这一事实. 这里使用 $f_2/f_1\leqslant C$,而不用 $f_2\leqslant Cf_1$(虽然后者更易计算)的原因在于:f_2/f_1 的上(下)确界的倒数乃是 λ_0 的下(上)界. 因此，振幅 $\operatorname{osc}(f_2/f_1)$刻画了 f_2 与特征函数之间的差距(振幅越小,两者越接近). 换言之，若 $\operatorname{osc}(f_2/f_1)$不是很小,则所得的估计可在下一步迭代中得以改进.

为覆盖区间(1/2, 0.725)，需再作一次迭代. 因为

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=\int_0^x e^{-C(y)}dy\int_y^1 f_n(u)e^{C(u)}du=\int_0^1 f_n(u)e^{C(u)}\varphi(x\wedge u)du\\&=\int_0^x f_n(u)e^{C(u)}\varphi(u)du+\varphi(x)\int_x^1 f_n(u)e^{C(u)}du,\end{aligned}\tag{3.12}$$

结合(3.9)~(3.11)式，得

$$\begin{aligned}f_3(x)&=\int_0^x e^{\alpha y^2}dy\int_y^1 f_2(u)e^{-\alpha u^2}du\\&=\frac{3\alpha-1}{6\alpha^2}J_1(x)-\frac{1}{18\alpha}J_2(x)+\frac{1-2\alpha}{6\alpha^2}e^{-\alpha}\Big[\int_0^x\varphi(u)^2e^{-\alpha u^2}du+\varphi(x)\int_x^1\varphi(u)e^{-\alpha u^2}du\Big]\\&=\frac{1-2\alpha}{9\alpha^3}e^{-\alpha}\varphi(x)+\frac{9\alpha-4}{36\alpha^3}x-\frac{1}{108\alpha^2}x^3\\&\quad+\frac{1-2\alpha}{6\alpha^2}e^{-\alpha}\Big[\int_0^x\varphi(u)^2e^{-\alpha u^2}du+\varphi(x)\int_x^1\varphi(u)e^{-\alpha u^2}du\Big].\end{aligned}$$

此处只用到二重积分. 上述计算减少了积分的重数,这对于有效地使用数学软件是很重要的. 然后，只需使用计算机验证 $II(f_2)=f_3/f_2$ 在区间(0.5, 0.725)上满足(3.6)式.

(b) 设 $\alpha\leqslant-\alpha_0$. 取 $f_1(x)=e^{\alpha x^2}\int_0^x e^{-\alpha y^2}dy$, 则由(3.12)式得

$$\begin{aligned}f_2(x)&=\int_0^x f_1(u)\varphi(u)e^{-\alpha u^2}du+\varphi(x)\int_x^1 f_1(u)e^{-\alpha u^2}du\\&=\int_0^x du\varphi(u)\int_0^u e^{-\alpha y^2}dy+\varphi(x)\int_x^1 du\int_0^u e^{-\alpha y^2}dy\\&=\int_0^x\varphi\psi+\varphi(x)[\psi(1)-x\psi(x)+(e^{-\alpha}-e^{-\alpha x^2})/2\alpha],\end{aligned}$$

其中 $\varphi(x)=\int_0^x e^{\alpha y^2}dy,\psi(x)=\int_0^x e^{-\alpha y^2}dy$. 此时 $II(f_1)=f_2/f_1$ 覆盖了区间$(-\alpha_0\pi^2/(\pi^2-$

$8\alpha_0$), -1.55). 为覆盖另一部分区间，还需再作一次迭代(参见(3.12)式):

$$f_3(x) = \int_0^x \varphi(u) f_2(u) \mathrm{e}^{-\alpha u^2} \mathrm{d}u + \varphi(x) \int_x^1 f_2(u) \mathrm{e}^{-\alpha u^2} \mathrm{d}u. \tag{3.13}$$

这里用到了三重积分. 作图时应小心计算误差. 例如在 $-\alpha_0$ 处，比值 f_3/f_2 在区间[0,1]上应为常数 $2\alpha_0$，但所得到的图像却可能不同.

(c) 设 $\alpha \in [-\alpha_0, -1/2)$. 回忆 $C(x) = -\alpha x^2$,自然取 $f_1(x) = x\mathrm{e}^{\alpha x^2}$,则

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_0^x f_1 \varphi \mathrm{e}^C + \varphi(x) \int_x^1 f_1 \mathrm{e}^C = \int_0^x u\varphi(u) \mathrm{d}u + \varphi(x) \int_x^1 u \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^x u^2 \mathrm{e}^{\alpha u^2} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)\varphi(x) - \frac{x}{4\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x^2}. \end{aligned}$$

然而，$II(f_1)$仅在点 $\alpha = -1/2$ 处满足(3.7)式. 所以需作下一步迭代.

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \int_0^x f_2 \varphi \mathrm{e}^C + \varphi(x) \int_x^1 f_2 \mathrm{e}^C \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)\left[\int_0^x \varphi^2 \mathrm{e}^C + \varphi(x)\int_x^1 \varphi \mathrm{e}^C\right] - \frac{1}{4\alpha}\left[\int_0^x u\varphi(u)\mathrm{d}u + \varphi(x)\int_x^1 u \mathrm{d}u\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)\left[\int_0^x \varphi^2 \mathrm{e}^C + \varphi(x)\int_x^1 \varphi \mathrm{e}^C - \frac{\varphi(x)}{4\alpha}\right] + \frac{x}{16\alpha^2}\mathrm{e}^{\alpha x^2}. \end{aligned}$$

这里也只用到二重积分. 然后，容易使用计算机验证 $II(f_2) = f_3/f_2$ 满足(3.7)式.

(d) $|\alpha| \leqslant 1/2$. 首先指出：由文献[8]和引理 2.6 已经得知此时定理的结论为真. 这里再建议几种不同方式验证之.

设 $\alpha \in [0, 1/2]$. 取引理 2.3 中的 g_n 作为试验函数 $f_1 = g_n$. 当 $n = 3$ 时,一次迭代 f_2/f_1 便覆盖[0.23, 0.5]. 借助于(3.9)和(3.10)式，此计算相当容易. 当 $n = 4$ 时,f_2/f_1 覆盖[0.166, 0.23]，如此继续. 另一种方式是取 $f_1(x) = \sum_{m=1}^{M} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\prod_{k=1}^{m-1}[2(2k-1)\alpha - \lambda']$，其中 $\lambda' = \pi^2/4 + \alpha + (10 - \pi^2)\alpha^2$ 而 M 足够大,并验证 f_2/f_1(也使用(3.10)式)覆盖包含 α 的某个区间. 此法是基于(2.4)和(1.5)式(又见(3.17)式). 然而，下面还有更简单些的试验函数.

设 $\alpha \in [-1/2, 0]$. 经实践，这比[0, 1/2]容易处理. 先解释如何寻找新的试验函数. 当 $\alpha = 0$ 时,特征函数为 $g(x) = \sin(\pi x/2)$. 将它代入微分不等式

$$g'' + 2\alpha g' + \varepsilon g \leqslant 0, \tag{3.14}$$

得 $\lambda_0 \geqslant \varepsilon_{\max} = \pi^2/4 - 2\alpha$. 除非 $\alpha = 0$，这总小于所需的估计(3.1)式. 虽然使用此函数 g 作为初值以代替$\sqrt{\varphi}$，经逐步迭代，可一步步扩大 α 的范围，使之满足(3.5)式. 然而，更为有效的办法是先优化 g,使得由(3.14)式导出更好的估计,然后再做迭代. 在目前的情况下，取 $f_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x^2}\sin(\beta x)$,$\beta \in (0, \pi/2]$. 它是将 $-\alpha x$ ($-\alpha \ll 1$) 视为常数时所得到的特征函数的近似解. 此时,$f_1'(x)$的最小值为 $f_1'(1)$. 而 $f_1'(1) \geqslant 0$ 当且仅当 $\beta\cot\beta \geqslant -2\alpha$. 注意当 β 从 0 上升到 $\pi/2$ 时，$\beta\cot\beta$ 从 1 下降到 0. 改用 β 作为参数，即令 $-\alpha = \beta\cot\beta/2$. 将 f_1 代入(3.14)式得到估计 $\varepsilon_{\max} = \beta^2 + \beta\cot\beta + (\beta\cot\beta)^2$，它优于直接使用 g 所得出的估计. 总之，取

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x^2}\sin(\beta x), \qquad \alpha = -\beta\cot\beta/2, \qquad \beta \in (0, \pi/2].$$

$$f_2(x) = \int_0^x e^{\alpha y^2} dy \int_y^1 \sin(\beta u) du = \frac{1}{\beta} \int_0^x e^{\alpha y^2} [\cos(\beta y) - \cos\beta]$$
$$= \frac{1}{\beta} \int_0^x e^{\alpha y^2} \cos(\beta y) - \frac{\cos\beta}{\beta} \varphi(x).$$

这一步只用到单重积分．然后，使用计算机验证 $II(f_1) = f_2/f_1$ 在区间 $\beta \in (0, 1.195]$ 上满足(3.5)式．使用(3.13)式，下一步迭代覆盖区间[1.195, 1.51]．这样，两步迭代已覆盖区间[0, $\pi/2$]的 96%．余下部分为(1.51, $\pi/2$]．为此，需进入第 3 步迭代．此处，说明还可减少积分的重数．回忆 $C(x) = -\alpha x^2, \varphi(x) = \int_0^x e^{-C}$ 及 $\psi(x) = \int_0^x e^C$．定义 $\xi(x) = \int_0^x e^C \varphi$，则

$$\int_0^x f_n e^C \varphi = \int_0^x f_n d\xi = (f_n \xi)(x) - \int_0^x \xi f_n',$$
$$\int_x^1 f_n e^C = \int_x^1 f_n d\psi = (f_n \psi)(1) - (f_n \psi)(x) - \int_x^1 \psi f_n'.$$

这样，由(3.12)式得

$$f_{n+1}(x) = (\xi f_n)(x) - \int_0^x \xi f'_n + \varphi(x)\Big[(f_n\psi)(1) - (f_n\psi)(x) - \int_x^1 \psi f'_n\Big],$$
$$f'_{n+1}(x) = \varphi'(x)\Big[(f_n\psi)(1) - (f_n\psi)(x) - \int_x^1 \psi f'_n\Big]. \tag{3.15}$$

所求断言 $II(f_n) \leqslant \delta$ 现在变成

$$[\xi(x) - \delta] f_n(x) + \varphi(x)\Big[(f_n\psi)(1) - (f_n\psi)(x) - \int_x^1 \psi f_n\Big] \leqslant \int_0^x \xi f'_n. \tag{3.16}$$

当 $n \geqslant 2$ 时，(3.16)式和 f_n 的积分重数相同，但少于 f_{n+1} 的积分重数．在目前情况下，$n = 3$，$\delta = (\pi^2/4 + \alpha)^{-1}$，

$$f'_2(x) = e^{\alpha x^2}[\cos(\beta x) - \cos\beta]/\beta,$$
$$f'_3(x) = e^{\alpha x^2}\Big[(f_2\psi)(1) - (f_2\psi)(x) - \int_x^1 \psi f'_2\Big],$$
$$f_3(x) = (\xi f_2)(x) - \int_0^x \xi f'_2 + \varphi(x)\Big[(f_2\psi)(1) - (f_2\psi)(x) - \int_x^1 \psi f'_2\Big],$$

这里用到了(3.15)式．其次，固定 α，以 $F(x)$表(3.16)式左、右两边之差．为证在区间[0, 1]上有 $F(x) \geqslant 0$，并不需要在整个区间上计算 F．这是因为，在若干点 x 上作些数值计算，便可看出 F 先增后减．这样，因 $F(0) = 0$，只需再验证 $F(1) \geqslant 0$．由(3.16)式可见，这远为容易．此次迭代将适用的区间延拓为[0, 1.564]（对应的 α 区间是[0.0053, 0.5]），这覆盖了区间[0, $\pi/2$]的 99.6%．基于计算精度所限，在此处结束迭代或许已令人满意．在本证明之末，还将讨论另一种验证方法．

在继续讨论之前，先对上面所用的试验函数作些注解．留心在(d)中限定了 $\beta > 0$，从而 $-\alpha < 1/2$．当 $\beta = 0$ 时，f_1 退化．然而，若改用 $f_1(x) = e^{\alpha x^2}\sin(\beta x)/\beta$，则当 $\beta \to 0$ 时，$f_1(x) \to x e^{-x^2/2}$，此极限恰好是 $\alpha = 1/2$ 处的特征函数．因为常数变换不会改变 $II(f_1)$的值，故所述证明无需任何变动，但却可延拓至区间的左端点 $\alpha = -1/2$．

在情形(b)，可以使用更一般的初值 $f_1(x) = e^{\alpha x^2}\int_0^x e^{\beta y^2}(\beta \leqslant -\alpha)$. 此时，为使 $f'_1>0$，当且仅当 $e^\beta \geqslant -2\alpha\int_0^1 e^{\beta y^2}$. 当 $-\alpha \downarrow 1/2$ 时，$\beta \downarrow 0$. 那么也有 $f_1(x) \to x e^{-x^2/2}$. 这说明了在 $\alpha=0$，$\alpha=-1/2$ 和 $\alpha=-\alpha_0$ 处的 3 个特征函数之间的联系.

在证明(c)中，也可取 $f_1(x) = e^{\alpha x^2}\int_0^x e^{\beta y^2}(\beta \leqslant -\alpha)$. 类似于(d)，可将 $\beta(\beta \geqslant 0)$视为参数并令 $\alpha = -e^\beta/2\int_0^1 e^{\beta y^2}$. 然后一步迭代覆盖$(-\alpha_0,\ -0.605)$，遗憾的是并不包括$(-0.605,\ -0.5)$. 虽然可进入下一步迭代，但将需要计算 3 重积分反而不如(c)中所用者方便.

(e) 最后证明(1.5)式. 先使用 Mathematica 写个程序(只需几行)计算 α_n 和引理 2.3 中所定义的 $\lambda_0(\alpha_n)$，并对每个 $n(\geqslant 2)$(在计算机所允许的范围内)验证

$$\lambda_0(\alpha_n) = 2(2n-1)\alpha_n \geqslant \pi^2/4 + \alpha_n + (10-\pi^2)\alpha_n^2. \tag{3.17}$$

换言之，(1.5)式在每一点 $\alpha=\alpha_n>0$ 上成立，而且等号在 $\alpha=0$ 和 $\alpha=\alpha_2=1/2$ 两处成立. 由引理 2.6 知，若将 α_n 换成 $-\alpha_n$，结论亦真.

其次，由于特征值 $\lambda_0(\alpha)$和二次函数 $y(\alpha)=\pi^2/4+\alpha+(10-\pi^2)\alpha^2$ 沿序列$\{\pm\alpha_n\}$之差均很小，至多约 10^{-5}，并且曲线 $\lambda_0(\alpha)$很规则，不难相信曲线 $\lambda_0(\alpha)$总位于曲线 $y(\alpha)$的上方. 因为现在处于一个较小的区域内：$|\alpha| \leqslant 1/2$，这也可以使用特征值的标准幂级数解验证之. 为此，如(2.5)式定义$\{\beta_m\}$. 对于每一 $\alpha \in [0,\ 1/2]$，选取足够大的 M(比如说，33)(此处也需要写个程序)，求出 $\sum_{m=1}^{M}(2m-1)\beta_m$ 的最小根. 它可视为 $\lambda_0(\alpha)$的近似值.

最后，由于直线 $z(\alpha)=\pi^2/4+\alpha$ 切于曲线 $y(\alpha)$，直线 $z(\alpha)$在$[-1/2,\ 1/2]$上理应位于曲线 $\lambda_0(\alpha)$的下方. 至此，完成了定理的证明.

致谢 本文第一作者感谢王梓坤教授对于此论题的关注和鼓励，也感谢在访问罗马第 I 大学期间(2000 年 6 月)该校所提供的资助.

参 考 文 献

1 Chavel I. Eigenvalues in Riemannian Geometry. New York: Academic Press, 1984
2 丘成桐，孙理察. 微分几何. 北京：科学出版社，1988
3 陈木法，王凤雨. Riemann 流形第 1 特征值下界估计的一般公式. 中国科学，A 辑，1997, 27(1): 34 ~ 42
4 陈木法. 耦合、谱隙及相关课题(Ⅱ). 科学通报，1997, 42(15): 1585 ~ 1591
5 钟家庆，杨洪苍. 紧致 Riemann 流形上 Laplace 算子第一特征值的估计. 中国科学，A 辑，1983, (9): 812 ~ 820
6 Yang D G. Lower bound estimates of the first eigenvalve for compact manifolds with positive Ricci curvature. Pacific J Math, 1999, 190(2): 383 ~ 398
7 Cai K R. Estimate on lower bound of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold. Chin Ann Math (B), 1991, 12(3): 267 ~ 271
8 赵 迪. 紧 Riemann 流形上的第一特征值下界估计. 中国科学，A 辑，1999, 29(3): 207 ~ 214
9 陈木法. 一维情形第一特征值的变分公式及逼近定理. 中国科学，A 辑，2001, 31(1): 28 ~ 36
10 陈木法. 第一特征值对偶变分公式的分析证明(一维情形). 中国科学，A 辑，1999, 29(4): 327 ~ 336
11 Kröger P. On the spectral gap for compact manifolds. J Differ Geom, 1992, 36: 315 ~ 330
12 Bakry D, Qian, Z M. Some new results on eigenvectors via dimension, diameter and Ricci curvature. Adv Math, 2000, 155(1): 98 ~ 153