

曲线坐标系中的分片检验 条件——列式和应用

吴 长 春

(中国科学技术大学近代力学系, 合肥 230026)

张 佑 启

(香港大学土木与结构工程系, 香港)

摘 要

卡氏直角坐标系中的常应力分片检验条件已经得到广泛地研究, 但这类条件和列式并不适用于曲线坐标系. 本文建立了分片检验条件在曲线坐标中的一般形式和在正交曲线坐标中的物理分量形式. 具体到轴对称问题, 给出了分片检验的轴对称列式, 用来构造非协调的轴对称有限元. 并提出了解决伪剪应力问题的新方法.

关键词 分片检验条件 (PTC)、曲线坐标、PTC 的轴对称形式、伪剪应力

一、引 言

Irons 提出的常应力分片检验是发展非协调有限元的基础^[1,2]. 有关的数学解释已由 Strang^[3] 给出. 简言之, 这个检验就是要看一看有限元是否有能力再现单元的常应力状态. 本文称与该检验相关的力学条件为分片检验条件, 简记之为 PTC. 有关 PTC 的系统推导、陈述及其非线性形式已由吴长春和卞学镛等人给出^[4-6].

第一个二维非协调元 Q6 是 Wilson^[7] 提出的. 他通过附加非协调单元位移函数成功地改善了 4 节点等参元的数值性能. 但是 Q6 元对非规则网格不能通过分片检验. 对此, Taylor^[8] 提出了一个简便的补救办法: 在计算单元应变的非协调部分时, 近似用单元形心点的 $J^*(0, 0)/|J|$ 值取代原 Jacobian 矩阵的逆 $J^{-1}(=J^*(\xi, \eta)/|J|)$, 其中 (ξ, η) 为单元的等参坐标. 该补救方法导致了新的非协调元 QM6, 它成功地通过了分片检验. 另一个二维非协调元 QP6^[9] 的推导基于更多的数学方面的考虑, 所采用的单元非协调基函数比较复杂, 需要使用较高阶 (3×3) 的 Gauss 积分. 近年来, 一个生成满足 PTC 的非协调函数的一般公式已经建立并被用来发展一系列非协调有限元^[4,5,10] 和新的杂交元^[11].

然而, 迄今为止, 几乎所有有关 PTC 的讨论和应用都是在卡氏直角坐标系中进行的. 一般说来, 他们并不适用于曲线坐标系. 例如, 上述 QM6 元虽然通过了平面应力/应变问题的分片检验, 但是却不能通过轴对称问题的分片检验^[12]. 为了把非协调元的理论和方法推广到

曲线坐标问题中去,最重要的是必须找到 PTC 在各种曲线坐标系中的合理形式。这正是作者的主要目标。本文分别建立了一般曲线坐标和正交曲线坐标中 PTC 的列式,详细地讨论了 PTC 的轴对称形式及其对轴对称非协调元的实施等问题。

二、一般曲线坐标中的分片检验条件

考虑三维一般曲线坐标 $\alpha_i (i = 1, 2, 3)^{[13-15]}$ 系中一个具有无限小位移的弹性体系中的典型元素(图 1), 令 v_i 为单元域中的位移张量, 则单元应变张量

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2}(v_i|_j + v_j|_i) \\ &= \frac{1}{2}(v_{i,i} + v_{j,j}) - v_m \Gamma_{ij}^m, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $(\)'_{,i}$ 和 $(\)|_i$ 分别表示 $(\)$ 关于 α_i 的偏导数和协变导数。 Γ_{ij}^m 为 Christoffel 符号。如是单元应变能泛函可表示为

$$\iiint_V \frac{1}{2} C^{ijkl} e_{kl} e_{ij} dv = \iiint_V \frac{1}{2} \tau^{ij} v_i|_j dv, \quad (2)$$

式中 C^{ijkl} 为材料的弹性常数张量, 而应力张量

$$\tau^{ij} = C^{ijkl} v_k|_l. \quad (3)$$

对非协调元, 其单元位移试解可表示为

$$v_i = v_i^q + v_i^f, \quad (4)$$

其中 v_i^q 和 v_i^f 分别为单元位移的协调部分和非协调部分, 两者是线性无关的。应指出, v_i^q 必须满足一定的弱连接条件^[16]以保证非协调元的数值稳定性。我们

假定单元表面域 s_a^e 上的位移边界条件已由 v_i^q 满足, 在表面域 s_a^e 上作用有给定的面力 $\bar{T}^i$ 。如此, 我们可定义非协调元离散系统的势能泛函如下,

$$\pi = \sum_e \pi^e(v_i^q, v_i^f) = \sum_e \left[\iiint_{V^e} \frac{1}{2} \tau^{ij} (v_i^q + v_i^f)|_j dv - \iint_{s_a^e} \bar{T}^i v_i^q ds \right], \quad (5)$$

其中

$$\tau^{ij} = C^{ijkl} (v_k^q + v_k^f)|_l.$$

单元表面域 $\partial V^e = s_a^e \cup s_b^e \cup s_{ab}^e$, 而 $s_{ab}^e = \partial V^{(a)} \cap \partial V^{(b)}$ 是相邻单元 $(a), (b)$ 的交界面。注意到在 s_{ab}^e 上 v_i^q 值对相邻单元是唯一的, 则由泛函驻值条件 $\delta \pi(v_i^q, v_i^f) = 0$ 得到下列变分方程

$$\begin{aligned} \sum_e \iiint_{V^e} -\tau^{ij}|_j (\delta v_i^q + \delta v_i^f) dv \\ + \sum_{ab} \iint_{s_{ab}^e} [(\tau^{ij} v_j)^{(a)} + (\tau^{ij} v_j)^{(b)}] \delta v_i^q ds \end{aligned}$$

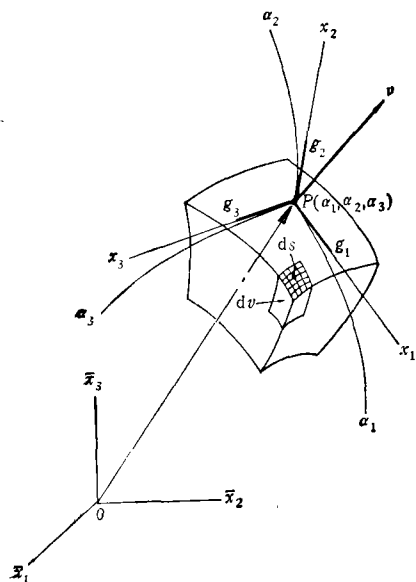


图 1 三维体元与曲线坐标

$$+ \sum_e \iint_{\Gamma_e^c} (\tau^{ij} v_j - \bar{T}^i) \delta v_i^e ds + \sum_e \oint_{\partial v^e} \tau^{ij} v_j \delta v_i^e ds = 0, \quad (6)$$

式中 v_j 是单元表面 ∂v^e 上点 $P(\alpha_i)$ 处单位外法矢 ν 的分量 (图 1), 它可由下面关系式确定:

$$\nu = v_j g^j \text{ 或等价地 } v_j = \nu \cdot g_j,$$

其中 g^j 和 g_j 分别为逆变基矢量和协变基矢量。鉴于变分 δv_i^e 和 δv_i^e 的任意性, (6) 式不但提供了(变分意义下)单元域 v^e 内, $s_{\alpha_i}^e$ 上和 $s_{\alpha_i}^e$ 上的各类平衡关系, 还导致下面的一个能量相容性要求:

$$\sum_e \oint_{\partial v^e} \tau^{ij} v_j \delta v_i^e ds = 0. \quad (7)$$

就一个非协调元离散体系而言, 为保证泛函 π 取驻值, 籍以保证近似解的合理性, 条件(7)必须被满足。

考虑离散网格细分的极限情况, 即当单元步长 $h \rightarrow 0$ 时, 单元内应力张量 τ^{ij} 趋于一组常数, 记之为 τ_e^{ij} 。这时(7)式成为

$$\sum_e \oint_{\partial v^e} \tau_e^{ij} v_j \delta v_i^e ds = 0, \quad (8)$$

式中变分记号 δv_i^e 被简记为 v_i^e 。(8)式即一般曲线坐标系的 PTC 列式。注意到该条件依赖于网格的划分和单元片的构形, 因此使用不便。一个实用的 PTC 列式是对单个典型元提出的, 即

$$\oint_{\partial v^e} \tau_e^{ij} v_j \delta v_i^e ds = 0. \quad (9)$$

借助曲线坐标下的散度定理, 也可以把(9)式表示成下面等价形式:

$$\iiint_{v^e} (\tau_e^{ij} v_i^e|_j + \tau_e^{ij}|_j v_i^e) dv = 0, \quad (10)$$

其中(注意 τ_e^{ij} 在 v^e 内为常数)

$$\begin{aligned} v_i^e|_j &= v_{i,j}^e - v_m^e \Gamma_{ij}^m, \\ \tau_e^{ij}|_j &= \tau_{e,j}^{ij} + \tau_e^{im} \Gamma_{jm}^i + \tau_e^{mj} \Gamma_{jm}^i - \tau_e^{im} \Gamma_{jm}^i + \tau_e^{mj} \Gamma_{jm}^i. \end{aligned}$$

三、正交曲线坐标中的分片检验

以上推导中, 我们考虑的是场变量的张量分量, 在实际应用中, 变量的物理分量更为适用。在采用正交曲线坐标系的情况下, 建立用物理分量表达的 PTC 并不复杂。按定义^[13,17], 我们有下列三组物理分量:

$$\sigma_e^{ij} = \sqrt{\frac{g_{ii}}{g^{jj}}} \tau_e^{ij}, \quad (11a)$$

$$u_i^e = \sqrt{g^{ii}} v_i^e, \quad (11b)$$

$$n_j = \sqrt{g^{jj}} v_j, \quad (11c)$$

其中 g^{ii} 和 g_{ii} 为度量张量。曲线坐标为正交系时有

$$g^{ii} = 1/g_{ii}.$$

如是, 将 (11) 各式引入条件 (9), 得到

$$\oint_{\partial v^e} \sigma_e^{ij} n_j u_i^A ds = 0. \quad (12)$$

这就是正交曲线坐标中的 PTC 物理分量形式。这里关于分量 n_j 的物理意义有必要进一步说明如下。首先, 如果坐标系正交, 则它在 ∂v^e 上点 $P(\alpha_i)$ 处的协变基 $\mathbf{g}_j$ 也是相互正交的。因此 $\mathbf{g}_j$ 构成了一组局部卡氏直角坐标系 $x_i (i = 1, 2, 3)$ (图 1)。另一方面, 按 (11c) 式有

$$n_j = \sqrt{g^{jj}} v_j = \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_j = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_j,$$

其中 $\mathbf{i}_j = \mathbf{g}_j / \sqrt{g_{jj}}$ 是局部坐标系 x_i 的单位基向量。这意味着, 对正交曲线坐标系 α_i 而言, 物理分量 n_j 就是点 $P(\alpha_i)$ 处单元表面外法线 $\mathbf{v}$ 关于局部卡氏坐标系 x_i 的方向余弦。

四、PTC 的轴对称形式

轴对称问题中采用圆柱坐标 (r, θ, z) , 如图 2 示有微元关系 $ds = r d\theta dl$, 以致

$$\oint_{\partial v^e} (\dots) ds = 2\pi \oint_{\partial A^e} (\dots) r dl,$$

这里, 线积分 $\oint_{\partial A^e}$ 沿着轴对称元的 r - z 截面上的围线进行。现在可以把 PTC (12) 表示成下列轴对称形式

$$\oint_{\partial A^e} \sigma_e^r n^r u^A r dl = 0, \quad (13)$$

其中

$$\sigma_e = \{\sigma_e^{ij}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_e^{rr} \\ \sigma_e^{zz} \\ \sigma_e^{\theta\theta} \\ \sigma_e^{zr} \end{Bmatrix}, \quad u^A = \begin{Bmatrix} u_r^A \\ u_z^A \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{n} = \{n_i\} = \begin{bmatrix} n_r & 0 & 0 & n_z \\ 0 & n_z & 0 & n_r \end{bmatrix},$$

注意到 σ_e 为常应力, (13) 式可用下面的条件替代:

$$\oint_{\partial A^e} \begin{bmatrix} n_r \\ n_z \end{bmatrix} u_i^A r dl = 0, \quad (14a)$$

或等价地

$$\iint_{A^e} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} u_i^A r dA = 0. \quad (14b)$$

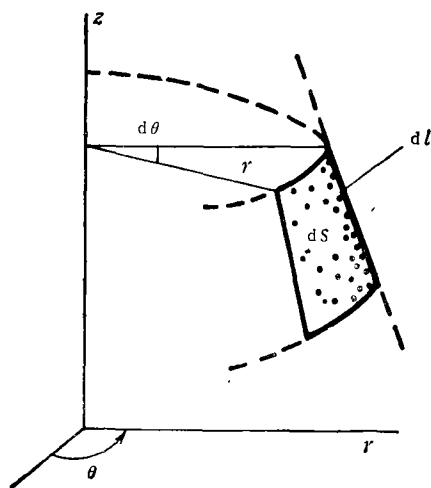


图 2 轴对称元的圆柱坐标

一些成功的二维非协调元,如 QM6^[8],QP6^[9],NQ6 和 NQ10^[4,9] 等严格地通过了下列平面问题的 PTC:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{n}^T \mathbf{u}' dl \equiv \iint_A \boldsymbol{\varepsilon}' dA = \mathbf{0} \quad (\boldsymbol{\varepsilon}' \text{ 为非协调应变}),$$

但是他们却不能通过 PTC 的轴对称形式 (14), 因此不能应用于轴对称问题, 至少对有限尺度的网格(即 $h \rightarrow 0$) 是这样。

五、关于伪剪应力

设轴对称元的非协调位移是由单元内部参数 λ 定义的, 那么这种非协调元可能产生不合理的伪剪应力。如 Cook^[12,18] 指出的那样, 非零环向应变 $\varepsilon'_{\theta\theta} = u'_r/r$ 的存在激活了内部参数 λ , 以致引发不应有的伪剪应变 $\gamma'_{zr} = \partial u'_r / \partial z$ 。为了解除 $\varepsilon'_{\theta\theta}$ 与 γ'_{zr} 之间的耦合, 他建议在形成单元刚度矩阵之前从单元应变矩阵中直接删去那些与 $\varepsilon'_{\theta\theta}$ 相关的项。这样处理虽然避免了伪剪应力的出现, 但是却破坏了 PTC 的满足。假设 u'_r 已满足了 PTC, 那么按照 (14b) 式应有

$$\iint_A \left(\frac{r''}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) u'_r r dA = 0.$$

然而, 如果删去了非零的 u'_r/r 项, 上面的恒等式将不再成立(即不满足 PTC), 除非

$$\iint_A u'_r dA = 0. \quad (15)$$

(15) 式是约束条件 $\varepsilon'_{\theta\theta} = 0$ 的弱形式, 可称之为伪剪应力抑制条件。联合使用条件 (14) 和 (15) 可以保证非协调轴对称元在满足 PTC 的同时避免伪剪应力的出现。

克服伪剪应力的另一种方法介绍如下。考虑 4 节点轴对称元, 假定它具有一组二次完备的位移函数: $\mathbf{u} = \mathbf{u}^q + \mathbf{u}^k$, 其中 $\mathbf{u}^q$ 是熟知的双线性插值。对矩形元, 其剪应变

$$\gamma_{zr} = \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \right] \mathbf{u} \Leftrightarrow \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \right] \mathbf{u}^q = \gamma_{zr}^q \in p_1(r, z)$$

是线性完备的, 且与 $\mathbf{u}^k$ 是否存在无关。换言之, $\mathbf{u}^k$ 对 γ_{zr} 无贡献。因此在系统节点位移求得之后计算单元应变时, 可以直接取 $\gamma_{zr} = \gamma_{zr}^q$ 。如此, 我们在不损失应力计算精度的同时, 排除了不合理的伪剪应力。这个处理方法与 Cook 建议的仅在单元中心点处对剪应力取值的手法是一致的。但是, 前者保留了单元剪应变的线性变化, 而后者只能反映它的常量态。

六、非协调函数的生成

对 4 节点非协调轴对称元(图 3), 其单元位移 u_r 或 u_z 可统一记为

$$u = u^q + u^k = \mathbf{N}^q \mathbf{q} + \mathbf{N}^k \lambda, \quad (16)$$

与标准的双线性插值基函数

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$

相对应, 有下列等参变换:

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_4 + a_1\xi + a_2\xi\eta + a_3\eta \\ b_4 + b_1\xi + b_2\xi\eta + b_3\eta \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

参照文献 [4] 中的虚参数法, 假设单元的初始内部位移模式为

$$u^\lambda = u_0^\lambda + u_*^\lambda, \quad (18)$$

$$u_0^\lambda = N\lambda = [\xi^2 \ \eta^2] \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix},$$

$$u_*^\lambda = N^*\lambda^* = [\xi \ \eta] \begin{Bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{Bmatrix}.$$

将 (18) 式代入 PTC (14) 式得

$$P\lambda + P_*\lambda^* = 0, \quad (19)$$

$$P = \oint_{\partial A^e} \begin{bmatrix} n_r \\ n_z \end{bmatrix} N r dl,$$

$$P_* = \oint_{\partial A^e} \begin{bmatrix} n_r \\ n_z \end{bmatrix} N^* r dl,$$

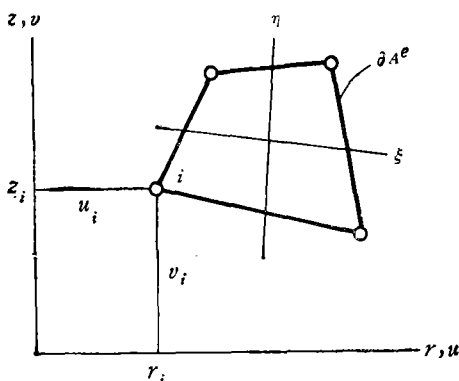


图 3 4 节点轴对称元

其中 r 由 (17) 式给定, 可以验证 $|P_*| \neq 0$, 如是, 依

方程 (19) 虚参数 λ^* 可以从 (18) 式中消去, 从而得到要求的非协调单元函数

$$u^\lambda = (N - N^*P_*^{-1}P)\lambda = N^*\lambda, \quad (20a)$$

$$N^* = [\xi^2 - a\xi - c\eta \quad \eta^2 - b\xi - d\eta], \quad (20b)$$

其中系数 a, b, c 和 d 可由单元的几何形状确定如下

$$a = (p_{11}q_{22} - p_{21}q_{12})/e, \quad b = (p_{12}q_{22} - p_{22}q_{12})/e,$$

$$c = (p_{21}q_{11} - p_{11}q_{21})/e, \quad d = (p_{22}q_{11} - p_{12}q_{21})/e,$$

$$e = q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}.$$

$$p_{11} = 2b_2a_4 + 3b_3a_1 - b_1a_3, \quad q_{11} = 3b_3a_4 + 2b_2a_1 - b_1a_2,$$

$$p_{12} = -2b_2a_4 + b_3a_1 - 3b_1a_3, \quad q_{12} = -3b_1a_4 - 2b_2a_3 + b_3a_2,$$

$$p_{21} = -2a_2a_4 - 2a_3a_1, \quad q_{21} = -3a_3a_4 - a_2a_1,$$

$$p_{22} = -p_{21}, \quad q_{22} = 3a_1a_4 + a_2a_3.$$

七、数值试验

以下的数值试验中, 我们只考虑基于势能原理的位移法轴对称元。它们是

Axi-Q4: 相应于 4 节点平面等参元 Q4,

Axi-Q8: 相应于 8 节点平面等参元 Q8,

Axi-Q6: 相应于 Wilson 的平面非协调元 Q6^[7],

Axi-QM6: 相应于 Taylor 的平面非协调元 QM6^[8],

Axi-NQ6: 相应于 Wu-Pian 的平面非协调元 NQ6^[4,9] 以及 AQ6: 即本文的非协调轴对称元, 其中引入了非协调位移函数(20)。以上各轴对称元中, 除 Axi-Q8 采用 3×3 Gauss 求积外, 全都采用 2×2 求积。

1. 轴对称分片检验

如图 4 所示, 一厚壁圆筒受大小相等方向相反的一对压力 $P = 2000$ 作用, 圆筒处于常应

力状态,其横截面由四个规则或非规则单元组成。试验结果列于表 1,其中括号内的数值为非规则网格的结果,“No Const.”表示不存在应力的常量态。我们看到,所有参与计算的非协调元中,唯有 AQ6 元通过了这个分片检验。

2. 不可压缩材料的自锁试验

对不可压缩轴对称体,其中的零体积应变条件 $u_{i,i} = 0$ 将对等参元导致过份的变形约束,使得位移解自锁而趋于零,同时,应力解也将变得不可靠了。这种困难可以通过引入单元内的非协调位移而克服^[19]。作为一个说明的例子,考虑一受均匀内压 p 作用的无限长圆筒,对其中的一段使用 5 个矩形单元。表 2 中的结果显示,当 Poisson 比 $\mu \rightarrow 0.5$ 时,等参元 Axi-Q4 和 Axi-Q8 的径向位移解发生了自锁,同时,单元中心的应力解也变得非常糟糕。另一方面,本文的 AQ6 元适用于不可压缩计算,对位移和应力两者都能给出合理的结果。顺便指出,用 AQ6 计算单元应力时宜采用双线性外推处理,就像文献 [12,20] 说明的那样。

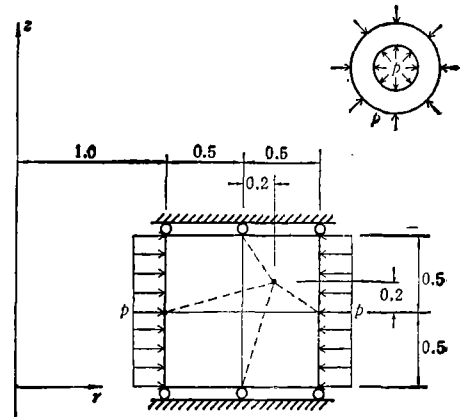


图 4 轴对称分片检验

$$E = 10000, \mu = 0.3, p = 2000/\pi$$

表 1 轴对称常应力分片检验(图 4)

单元	Axi-Q4	Axi-Q6	Axi-QM6	Axi-NQ6	AQ6	Exact
u_r	-3.31 (-3.31)	-3.28 (-3.43)	-3.306 (-3.26)	-3.28 (-3.35)	-3.31 (-3.31)	-3.31
σ_r	-636.6 (-636.6)	No Const.	No Const.	No Const.	-636.6 (-636.6)	-636.6
τ_{rz}	0.0 (0.0)	No Const.	No Const.	No Const.	0.0 (0.0)	0.0
通过 PTC?	是	否	否	否	是	—

3. 计算塑性试验

假定图 5 中的圆筒由理想弹塑性材料构成 ($H = 0.0$), 服从 Mises 屈服准则, 屈服强度 $\sigma_s = 6000 \text{ kg/cm}^2$, $E = 10^5 \text{ kg/cm}^2$, 而 $\mu = 0.49$ 。一个修正的增量迭代法被用来计算结构的极限荷载。计算结果见表 3 和图 6, 其中 p_e 为弹性极限荷载, p_s 为塑性极限荷载, 而 p_{ss} 表示当整个结构都变为塑性体时对应的荷载值。我们看到, 当使用 Axi-Q4 等参元时, 即使 5 个单元都进入了塑性态, 压力荷载 p 仍然可以继续增加, 就是说, 用等参轴对称元是得不到结构的塑性极限荷载的。另一方面, 对非协调轴对称元 AQ6, 如图 6 显示的那样, 当荷载加至 $p_s = 4824$ 时, 圆筒径向位移突然成为一个大数, 即塑性流动发生了。显然, 此 p_s 值就是 AQ6 元提供的该圆筒的塑性极限荷载值。

表 2 受均匀内压的圆筒解(图5)

单 元	μ	0.3	0.49	0.4999	0.499999
Axi-Q4	$u_{r,B}$	30.15	28.78	2.84	0.031
	$\sigma'_{r,A}$	-2.44	-2.00	2.40	2.54
	$\sigma^{\theta\theta}_A$	4.58	4.40	2.73	2.55
	σ^{zz}_A	0.64	1.17	2.41	2.54
Axi-Q8	$u_{r,B}$	30.34	31.77	30.93	0.62
	$\sigma'_{r,A}$	-0.125	-0.159	-3.61	-70.6
	$\sigma^{\theta\theta}_A$	0.227	0.193	-3.28	-70.6
	σ^{zz}_A	0.031	0.016	-3.44	-70.6
AQ6	$u_{r,B}$	30.21	31.47	31.51	31.51
	$\sigma'_{r,A}$	-2.43	-2.42	-2.41	-2.41
	$\sigma^{\theta\theta}_A$	4.61	4.62	4.63	4.63
	σ^{zz}_A	0.65	1.08	1.11	1.11
理论解	$u_{r,B}$	30.35	31.78	31.83	31.83
	$\sigma'_{r,A}$	-2.45	-2.45	-2.45	-2.45
	$\sigma^{\theta\theta}_A$	4.57	4.57	4.57	4.57
	σ^{zz}_A	0.64	1.04	1.06	1.06

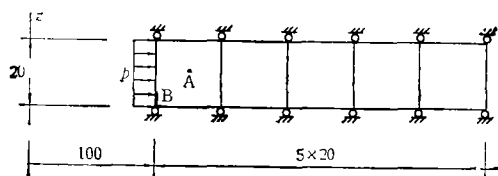


图 5 均匀内压作用下的厚壁圆筒

$$E = 1, p = 1/2\pi$$

表 3 圆筒塑性极限分析(图5)

方 法	p_c	p_s	p_{ss}
Axi-Q4	3100	(不存在)	5856
AQ6	2700	4824	4824
文献[21]	2598	4802	4802

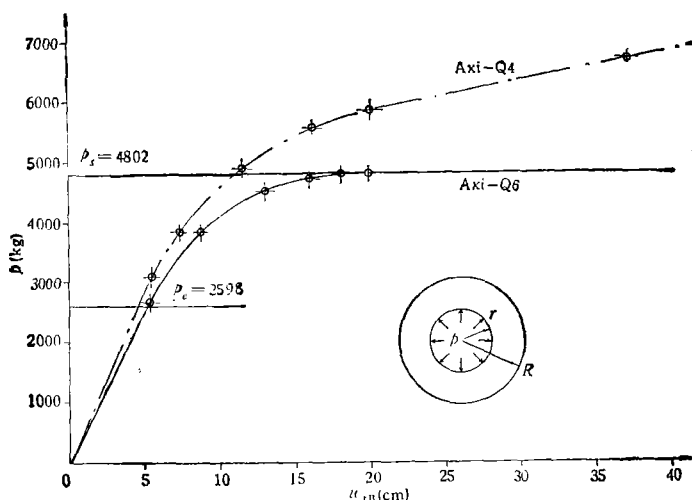


图 6 理想弹塑性圆筒的压力-位移曲线

$r = 100\text{cm}$, $R = 200\text{cm}$, $E = 10^3 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 0.49$, $\sigma_s = 6000 \text{ kg/cm}^2$, $H = 0.0$

八、结 论

随着非协调元理论和方法的深入发展, PTC 不仅被用来检验现有单元的收敛性, 还被用来指导发展新的离散模型。由于生成非协调函数的一般公式已经建立^[4], 只要找到相关的 PTC 列式就能建立各种形式的非协调元模型。可见, 关键是对不同类型的问题找出其对应的 PTC, 并给出它的数学列式。

虽然卡氏坐标系中的常应力 PTC 已经弄清并被广泛应用, 但是曲线坐标系中的 PTC 至今还没有被深刻认识。这就严重限制了非协调元对那些与曲线坐标相关的数学物理问题的应用。结果是, 那些不满足于使用常规等参元的人们情愿使用较为复杂的杂交混合元去处理曲线坐标问题^[22-27]。

本文给出了 PTC 在曲线坐标中的一般形式, 可应用于那些曲线系中的非协调有限元方法, 例如轴对称问题、扭转问题以及曲面结构等问题的数值分析。

文章详细研究了在轴对称体非协调计算中可能出现的如何满足 PTC 和避免伪剪应力的问题。指出, 一些平面问题非协调元(如 QM6 等)不能直接推广用于轴对称问题的根本原因是两类问题中的 PTC 列式并不相同。为避免伪剪应力出现, 本文提出了两种新的方法。就 4 节点非协调轴对称元(如文中的 AQ6)而言, 第二种处理伪剪应力的方法尤为简单方便。

致谢 对于 Croucher Foundation 的资助和卡学锁教授所给予的重要建议深表感谢。

参 考 文 献

- [1] Irons, B. M. & Razzaque, A., *Proc. Symp. on the Mathematical Foundation of E. E. M.* (Ed. Aziz), Baltimore, 1972.
- [2] Taylor, R. L. et al., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 22(1986), 39—62.

- [3] Strang, G. & Fix, G. J., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.
- [4] Wu, C. C. Huang, M. G. & Pian, T. H. H., *Computers & Structures*, 27(1987), 639—644.
- [5] Pian, T. H. H. & Wu, C. C., *Proc. The Invitational China-American Workshop on F. E. M.*, Chende, China, 1986.
- [6] Wu, C. C. & Bufler, H., *Science in China (A)*, 34(1991), 284—299.
- [7] Wilson, E. L. et al., In *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics* (Eds. Fennes, S. J. et al), Academic Press, New York, 1973, 43—57.
- [8] Taylor, R. L. et al., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10(1976), 1211—1219
- [9] Wanchspres, E. L., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 12(1978), 589—595
- [10] Pian, T. H. H. & Wu, C. C., *Nonlinear Computational Mechanics* (Eds. Wriggers & Wagner), Springer-Verlag, 1991.
- [11] Pian, T. H. H. & Wu, C. C., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26(1988), 2331—2343.
- [12] Cook R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 2nd Ed. John Wiley & Sons, 1981.
- [13] Fung. Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, 1965.
- [14] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd Ed. Pergamon Press, 1975.
- [15] Malven, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, 1969.
- [16] Wu, C. C. & Cheung, Y. K., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 31(1991), 1669—1682.
- [17] 李松年、黄执中, 非线性连续动力学, 北京航空学院出版社, 1987.
- [18] Cook, R. D., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 6(1973), 146—147.
- [19] Wu, C. C. & Bufler, H., *Proc. 3rd Int. Conf. NUMIFORM* (Eds. Thompson, et al), 115—120, Colorado USA, June, 1989, 26—30.
- [20] Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, Vol. 1, 4th ed, McGraw-Hill, New York. 1989.
- [21] Prager, W. & Hodge, P. G., *Theory of Perfectly Plastic Solids*, John Wiley, 1951.
- [22] Spilker, R. L. & Pian, T. H. H., *Computers and Structures*, 9(1978), 273—279.
- [23] Bachrach, W. E. & Belytschko, T., *Computers and Structures*, 23(1986), 323—331.
- [24] Wu, C. C., Di, S. L. & Pian, T. H. H., *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 9A(1987), 8: 439—448.
- [25] Di, S. L., Wu, C. C. & Song, Q. G., *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2(1989), 1—18.
- [26] Sze, K. Y., *Ph. D. thesis*, University of Hong Kong, 1991.
- [27] Weissman, S. L. & Taylor, R. L., *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 85(1991), 39—55.